LA FORMA DI NEWTON

MARCO MANETTI, 2019

1. Interpolazione polinomiale

Lemma 1.1. *Dati $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ distinti, e $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ esiste unico un polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ di grado $\leq n$ tale che $p(u_i) = p_i$.*

Dimostrazione. Sia $V \subset \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$: esso ha dimensione $n+1$ in quanto una base è data ad esempio da $1, t, \ldots, t^n$. L'applicazione

$$e\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad p(t) \mapsto (p(u_0), \ldots, p(u_n))$$

è lineare ed è iniettiva perché un polinomio non nullo di V può avere al massimo n radici e quindi non può annullarsi in $u_0, \ldots, u_n$. Dunque e è lineare iniettiva tra spazi vettoriali della stessa dimensione ed è quindi un isomorfismo. □

Il precedente lemma continua a valere, mutatis mutandis, oltre alle condizioni $p(u_i) = b_i$ imponiamo i valori delle prime h derivate nei punti u_i, come ad esempio nel prossimo lemma.

Lemma 1.2. *Dati $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ distinti, e $p_0, \ldots, p_n, q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$ esiste unico un polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ di grado $\leq 2n+1$ tale che*

$$p(u_0) = p_0, \quad p'(u_0) = p_1, \ \ldots, p^{(n)}(u_0) = p_n, \quad p(u_1) = q_0, \quad p'(u_1) = q_1, \ \ldots, p^{(n)}(u_1) = q_n\,.$$

Dimostrazione. Sia $V \subset \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq 2n+1$, che ha dimensione $2n+2$. L'applicazione

$$e\colon V \to \mathbb{R}^{2n+2}, \qquad p(t) \mapsto (p(u_0), p'(u_0), \ldots, p^{(n)}(u_0), p(u_1), p'(u_1), \ldots, p^{(n)}(u_i))$$

è lineare e come nel lemma precedente basta dimostrare che e è iniettiva. Ma se $e(p) = 0$ allora u_0, u_1 sono entrambe radici di $p(t)$ di moltelicità $\geq n+1$ e quindi p ha almeno $2n+2$ radici contate con molteplicità. □

2. La forma di Newton e la forward differencing

Indichiamo con V lo spazio vettoriale (di dimensione infinita) di tutte le successioni $a = \{a_0, a_1, \ldots\}$ di numeri reali, ossia $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definiamo gli operatori lineari di *shift indietro* $S\colon V \to V$ e *differenza* $\Delta\colon V \to V$ come

$$Sa_i = (Sa)_i = a_{i+1}, \qquad \Delta a_i = (\Delta a)_i = a_{i+1} - a_i\,.$$

Dunque $S = I + \Delta$, e per ogni $i > 0$ si ha

$$S^i a_j = a_{i+j}, \qquad \Delta^i a_j = \Delta\Delta^{i-1} a_j = \Delta^{i-1} a_{j+1} - \Delta^{i-1} a_j\,.$$

È utile riscrivere la seconda uguaglianza nella forma

$$\Delta^{i-1} a_{j+1} = \Delta^i a_j + \Delta^{i-1} a_j\,. \tag{1}$$

Lemma 2.1. *Per ogni successione $a_0, a_1, \ldots$ ed ogni $n > 0$ valgono le formule:*

$$\Delta^n a_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i, \qquad a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_0\,.$$

Dimostrazione. Nell'algebra associativa degli endomorfismi di V si hanno gli sviluppi di Newton:

$$\Delta^n = (S - I)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} S^i\,,$$

$$S^n = (I + \Delta)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i\,.$$

Di conseguenza

$$\Delta^n a_0 = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}S^i a_0 = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}a_i,$$

$$a_n = S^n a_0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i a_0\,.$$

□

Si consideri adesso $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ distinti ed in progressione aritmetica: ciò significa che esiste un numero reale $h \neq 0$ tale che $u_{i+1} = u_i + h$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, e quindi $u_i - u_j = h(i-j)$. Dati $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sappiamo che esiste un unico polinomio $p(t)$ di grado $\leq n$ tale che $p(u_i) = a_i$ per $i = 0, \ldots, n$.

Teorema 2.2 (Forma di Newton)**.** *Nelle notazioni precedenti, se*

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^i a_0}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{t-u_j}{h} = a_0 + \frac{1}{h}\Delta a_0(t-u_0) + \frac{1}{2h^2}\Delta^2 a_0(t-u_1)(t-u_0) + \cdots$$

allora $p(u_r) = a_r$ per ogni $r = 0, \ldots, n$.

Dimostrazione. Per ogni $0 \leq i \leq r \leq n$ si ha

$$\prod_{j=0}^{i-1}\frac{u_r-u_j}{h} = \prod_{j=0}^{i-1}(r-j) = r(r-1)\cdots(r-i+1) = i!\binom{r}{i},$$

e quindi

$$p(u_r) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^i a_0}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{u_r-u_j}{h} = \sum_{i=0}^{r}\frac{\Delta^i a_0}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{u_r-u_j}{h}$$

$$= \sum_{i=0}^{r}\frac{\Delta^i a_0}{i!}\,i!\binom{r}{i} = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\Delta^i a_0 = a_r\,.$$

□

Corollario 2.3 (Forward differencing)**.** *Nelle notazioni del teorema, se per ogni intero s poniamo $u_s = u_0 + hs$ e $a_s = p(u_s)$, allora per ogni $s \geq 0$ si ha*

$$a_s = \sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i a_0, \qquad \Delta^n a_s = \Delta^n a_0, \qquad \Delta^{n+1}a_s = 0\,.$$

Dimostrazione. Per la prima uguaglianza, come nella dimostrazione del teorema basta osservare che

$$\prod_{j=0}^{i-1}\frac{u_s-u_j}{h} = \prod_{j=0}^{i-1}(s-j) = i!\binom{s}{i}.$$

Per dimostrare che $\Delta^n a_s = \Delta^n a_0$, si osserva che il polinomio $p(t)$ è l'unico tal che $p(u_{s+i}) = a_{s+i}$ per ogni $i = 0, \ldots, n$, da cui

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^i a_0}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{t-u_j}{h} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^i a_s}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{t-u_{j+s}}{h}$$

e per dedurre $\Delta^n a_s = \Delta^n a_0$ basta confrontare i coefficienti direttori. Per finire $\Delta^{n+1}a_s = \Delta^n a_{s+1} - \Delta^n a_s = 0$. A maggior ragione $\Delta^m a_s = 0$ per ogni s ed ogni $m > n$. □

Dall'uguaglianza $\Delta^n a_s = \Delta^n a_0$ segue un semplice e rapido algoritmo per il calcolo della successione a_s partendo dalla *startup phase*, ossia dalla collezione degli $\binom{n+1}{2}$ coefficienti

$\Delta^i a_j$, $i+j \leq n$, convenientemente rappresentati dalla tabella

$$\begin{array}{cccc} & & & a_0 \\ & & \Delta a_0 & a_1 \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ \Delta^n a_0 & \cdots & \Delta a_{n-1} & a_n \end{array}$$

con $\Delta^i a_j$ posizionato in riga $i+j$ e colonna $n-i$. Successivamente si calcolano gli $n+1$ coefficienti

$$\Delta^n a_1 \quad \Delta^{n-1} a_2 \quad \cdots \quad \Delta a_n \quad a_{n+1}$$

partendo da $\Delta^n a_1 = \Delta^n a_0$ e poi in maniera ricorsiva usando la definizione di Δ:

$$\Delta^{n-1} a_2 = \Delta^n a_1 + \Delta^{n-1} a_1, \quad \Delta^{n-2} a_3 = \Delta^{n-1} a_2 + \Delta^{n-2} a_2, \ \ldots \qquad a_{n+1} = \Delta a_n + a_n \,.$$

Alla stessa maniera si calcola a_{n+2} e così via. In pratica si scrive (da sinistra a destra, e dall'alto verso il basso la matrice $a_{ij} = \Delta^{n-j} a_i$, di $n+1$ colonne ed infinite righe:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^n a_0 & \Delta^{n-1} a_1 & \Delta^{n-2} a_2 & \cdots & a_n \\ \Delta^n a_1 & \Delta^{n-1} a_2 & \Delta^{n-2} a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \Delta^n a_2 & \Delta^{n-1} a_3 & \Delta^{n-2} a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

dove i coefficienti della prima colonna sono uguali e ciascun coefficiente è la somma dei due posizionati sopra ed a sinistra. Data la startup phase, questo algoritmo consente di calcolare a_s con solamente $n(s-n)$ addizioni e nessuna moltiplicazione.