COOMOLOGIA DEI FASCI: DISPENSA N. 1

MARCO MANETTI, 10 MARZO 2020

1. Prefasci, spighe e morfismi

Definizione 1.1. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su X è il dato di:

(1) un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subset X$;
(2) un omomorfismo di gruppi $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ per ogni inclusione di aperti $V \subset U$.

Il dato precedente deve soddisfare le seguenti condizioni:

(F0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
(F1) $\rho_{UU} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ è l'identità per ogni U;
(F2) se $W \subset V \subset U$ sono inclusioni di aperti, allora $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(W)$.

Se $\mathcal{F}$ è un prefascio, gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ vengono usualmente detti le **sezioni** di $\mathcal{F}$ su U, in particolare gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(X)$ sono detti **sezioni globali**; i morfismi ρ_{UV} vengono detti morfismi di **restrizione**. A volte, per semplicità notazionale, se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subset U$ si scrive $\rho_{UV}(s) = s_{|V}$.

Naturalmente per descrivere un prefascio è sufficiente definire le sue sezioni ed i morfismi di restrizione esclusivamente per gli aperti non vuoti, e ciò è esattamente quello che faremo nei prossimi esempi.

Esempio 1.2. Il prefascio $\mathcal{C}_X$ delle funzioni continue in uno spazio topologico X è definito, ponendo

$$\mathcal{C}_X(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \text{ continue }\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X,$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

Esempio 1.3. Il prefascio $\mathcal{C}^\infty_X$ delle funzioni C^∞ in una varietà differenziabile X è definito, ponendo

$$\mathcal{C}_X(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X,$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

Si noti che $\mathcal{C}^\infty_X$ è un **sottoprefascio** di $\mathcal{C}_X$. La nozione di sottoprefascio non presenta grosse sorprese: dato un prefascio $\mathcal{F}$ con funzioni di restrizione ρ_{UV}, un sottoprefascio $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ è il dato, per ogni aperto U di un sottogruppo $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ tale che, per ogni coppia di aperti $V \subset U$, si ha $\rho_{UV}(\mathcal{G}(U)) \subset \mathcal{G}(V)$. Le restrizioni a $\mathcal{G}$ delle funzioni di restrizione di $\mathcal{F}$ inducono una struttura di prefascio su $\mathcal{G}$.

Esempio 1.4. Sia X uno spazio topologico. Ad ogni gruppo abeliano G possiamo associare i prefasci $\overline{G}_X$ e G_X delle funzioni costanti e localmente costanti a valori in G:

$$\overline{G}_X(U) = \{f \colon U \to G \text{ costante }\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X.$$

$$G_X(U) = \{f \colon U \to G \text{ localmente costante }\} \qquad \forall\, \emptyset \neq U \subset X.$$

Come sopra i morfismi ρ_{UV} sono quelli naturali di restrizione. Poiché somma e differenza di due funzioni (localmente) costanti sono ancora (localmente) costanti, ogni $G_X(U)$ è in modo naturale un gruppo abeliano e $\overline{G}_X(U)$ un suo sottogruppo. Dunque G_X è un prefascio su X e $\overline{G}_X$ un suo sottoprefascio.

Si noti che prendendo i gruppi quozienti possiamo definite un terzo prefascio

$$\mathcal{F}(U) = \frac{G_X(U)}{\overline{G}_X(U)}$$

con la proprietà che $\mathcal{F}(U) = 0$ se U è connesso.

Esempio 1.5. Siano X, Δ spazi topologici fissati e G un gruppo abeliano: per ogni aperto non vuoto $U \subset X$ definiamo

$$C(\Delta, U) = \{f \colon \Delta \to U \text{ continue}\}, \qquad \mathcal{F}(U) = \{\alpha \colon C(\Delta, U) \to G \text{ qualsiasi }\}.$$

Allora $\mathcal{F}$ è un prefascio con i morfismi di restrizione definiti nel modo naturale. Quando $\Delta = \Delta^n_{\mathbb{R}}$ coincide con il simplesso topologico standard di dimensione n, ritroviamo la ben nota costruzione del prefascio delle cocatene singolari di dimensione n.

La costruzione dei germi di funzioni (si consulti [1, I.6.9-10]) si estende naturalmente alle sezioni di un prefascio.

Definizione 1.6 (germe e spiga)**.** Sia $\mathcal{F}$ un prefascio con funzioni di restrizione ρ_{UV} su uno spazio topologico X e sia $x \in X$ un punto fissato: sull'insieme

$$\{(U, s) \mid U \text{ intorno aperto di } x,\ s \in \mathcal{F}(U)\}$$

si consideri la relazione di equivalenza:

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists\, W \text{ aperto tale che } x \in W \subset U \cap V \text{ e } \rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)\,.$$

Definiamo la **spiga** delle sezioni di $\mathcal{F}$ in x l'insieme

$$\mathcal{F}_x = \{\text{germi di sezioni di } \mathcal{F} \text{ in } x\} = \frac{\{(U, s) \mid x \in U,\ s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim},$$

Gli elementi della spiga, ossia le classi di equivalenza, sono detti **germi**.

Equivalentemente $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza tale che, per ogni $V \subset U$ ed ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha $(U, s) \sim (V, \rho_{UV}(s))$.

Ogni spiga è un gruppo abeliano, dove l'operazione di somma è indotta per passaggio al quoziente dalle applicazioni

$$(U, s) + (V, t) = (W, \rho_{UW}(s) + \rho_{VW}(t)), \qquad x \in W \subset V \cap U.$$

L'elemento neutro è chiaramente $(X, 0)$ e l'inverso è indotto da $(U, s) \mapsto (U, -s)$.

Notiamo che se U è un aperto, allora per ogni $x \in U$ l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\text{germe}} \mathcal{F}_x, \qquad s \mapsto s_x \equiv (U, s) \pmod{\sim},$$

è un omomorfismo di gruppi.

Esempio 1.7. Le spighe del prefascio localmente costante G_X (Esempio 1.4) sono tutte isomorfe al gruppo G. Infatti, per ogni punto fissato x, i morfismi (surgettivi) di valutazione in x:

$$G_X(U) \to G, \qquad f \mapsto f(x), \qquad x \in U,$$

inducono un omomorfismo surgettivo di gruppi abeliani tra la spiga in x ed il gruppo G. Viceversa, date due coppie (U, f) e (V, g), se $f(x) = g(x)$ allora $\exists U' \ni x$ tale che $f\big|_{U'}$ è costante. Allo stesso modo, $\exists V' \ni x$ tale che $g\big|_{V'}$ è costante. Segue che $f\big|_{U'\cap V'} = g\big|_{U'\cap V'}$, ossia $(U, f) \sim (V, g)$.

Definizione 1.8. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due prefasci sullo stesso spazio topologico X. Un **morfismo** $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il dato, per ogni aperto non vuoto U, di un omomorfismo di gruppi abeliani $f_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Gli omomorfismo f_U devono commutare con i morfismi di restrizione, ossia per ogni coppia di aperti $V \subset U$ si deve avere un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

La composizione di morfismi è definita in maniera prevedibile: $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$. Similmente l'insieme dei morfismi tra due prefasci è un gruppo abeliano, con la somma definita in maniera altrettanto prevedibile

$$f, g \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}, \qquad (f + g)_U = f_U + g_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\,.$$

Esempio 1.9. Ogni omomorfismo di gruppi abeliani $A \to B$ induce in maniera naturale un morfismo tra i rispettivi prefasci di sezioni localmente costanti $A_X \to B_X$.

Esempio 1.10. Dato che ogni funzione localmente costante è anche continua, si ha un ovvio morfismo di prefasci $\mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_X$, che per ogni aperto non vuoto U corrisponde all'inclusione

$$\{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ localmente costante }\} \subset \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ continua }\}.$$

Ogni morfismo di prefasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce canonicamente dei morfismi tra le rispettive spighe: per ogni punto $x \in X$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ che, per ogni intorno aperto $x \in U$, rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

commutativo.

2. Fasci

Il concetto di prefascio è molto semplice, troppo per essere di grande utilità senza richidere ulteriori specifiche. Introduciamo quindi la nozione di **fascio** come un prefascio che soddisfa alcune condizioni aggiuntive, e che si rivelerà di grande uso in matematica.

Definizione 2.1. Un prefascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su X si dice un **fascio** se per ogni unione di aperti $U = \cup_i U_i$, $i \in I$, valgono le seguenti condizioni:

(F3) Sia $s \in \mathcal{F}(U)$. Allora $s = 0$ se e solo se $s_{|U_i} = \rho_{UU_i}(s) = 0$ per ogni i.

(F4) Data, per ogni i, una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ in modo tale che per ogni i, j si abbia

$$\rho_{U_i\,U_{ij}}(s_i) = \rho_{U_j\,U_{ij}}(s_j), \qquad U_{ij} = U_i \cap U_j\,,$$

(ossia le due restrizioni di s_i ed s_j all'aperto $U_i \cap U_j$ coincidono), allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_{|U_i} = s_i$ per ogni i.

È immediato osservare che se vale la condizione (F3) allora la sezione s in (F4) è unica: infatti se per $s, t \in \mathcal{F}(U)$ fosse $s_{|U_i} = t_{|U_i} = s_i$ per ogni i, allora $(s-t)_{|U_i} = 0$ per ogni i e quindi $s - t = 0$.

Ribadiamo che ogni fascio è, per definizione, anche un prefascio. Esistono prefasci che non sono fasci, come negli esempi seguenti.

Esempio 2.2. Siano X una varietà differenziabile e n un intero positivo. Definiamo il prefascio

$$\mathcal{F}(U) = H^n_{dR}(U) = n\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham di } U.$$

Siccome ogni aperto di X è unione di aperti contraibili, ne consegue che il prefascio $\mathcal{F}$ soddisfa (F3) se e solo se è il prefascio nullo, ed è ben noto che ciò è generalmente falso, e.g. $X = S^n$.

Esempio 2.3. Consideriamo un insieme sconnesso, ad esempio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per ogni aperto $U \neq \emptyset$ poniamo $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$. Sia $V \subset U$ se $V \neq \emptyset$ prendiamo come morfismo di restrizione l'identità, altrimenti se $V = \emptyset$ per la proprietà (F0) l'unico morfismo che possiamo prendere è quello banale. Mostriamo quindi che non vale la proprietà di incollamento (F4). Scelti gli aperti $U =]0, +\infty[$ e $V =]-\infty, 0[$, presi due elementi $s \in \mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ e $p \in \mathcal{F}(V) = \mathbb{Z}$ diversi tra loro, le loro restrizioni coincidono sull'intersezione che è l'insieme vuoto, ma non esiste alcun elemento di $\mathbb{Z}$ tale che la restrizione su U valga s e su V valga p.

Osservazione 2.4. In teoria dei fasci esistono alcune variazioni sulle notazioni usate che devono essere conosciute per poter comprendere i testi scritti. In particolare, per il gruppo delle sezioni di un fascio $\mathcal{F}$ su di un aperto U vengono usate indistintamente le due notazioni:

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})\,.$$

(Per i prefasci che non sono fasci si usa solo la notazione $\mathcal{F}(U)$).

Esempio 2.5. Il prefascio $\mathcal{C}_X$ delle funzioni continue in uno spazio topologico X è un fascio.

Per ogni gruppo abeliano G, il prefascio G_X delle funzioni localmente costanti in uno spazio topologico X a valori in G è un fascio. L'Esempio 2.3 mostra che in generale il prefascio costante $\overline{G}_X$ non è un fascio.

Esempio 2.6 (Fascio grattacielo)**.** Siano $x \in X$ e G un gruppo abeliano. Per ogni aperto $U \subset X$ possiamo definire un fascio $\mathcal{F}$ ponendo

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \rho_{UV} = \begin{cases} Id & \text{se } x \in V \subset U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se il singoletto $\{x\}$ è chiuso, si verifica facilmente che

$$\mathcal{F}_y = \begin{cases} G & \text{se } y = x \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Un **morfismo di fasci** è per definizione un morfismo di prefasci (ogni fascio è anche un prefascio).

I morfismi tra fasci sono univocamente determinati dai morfismi tra le rispettive spighe, nel senso descritto dal seguente lemma:

Lemma 2.7. *Siano $f, g \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ due morfismi di fasci. Allora $f = g$ se e solo se $f_x = g_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ per ogni x. In particolare un morfismo di fasci è nullo se e solo se è nullo sulle spighe.*

Dimostrazione. Una implicazione è chiara. Viceversa, supponiamo $f_x = g_x$ per ogni $x \in X$ e siano $U \subset X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione. Per ipotesi si ha

$$f(s)_x = f_x(s_x) = g_x(s_x) = g(s)_x \qquad \text{per ogni } x \in U\,.$$

Per definizione di germe, per ogni $x \in U$ esiste un aperto $x \in V_x \subset U$ tale che $f(s)_{|V_x} = g(s)_{|V_x}$, ossia $(f(s) - g(s))_{|V_x} = 0$. Siccome gli aperti V_x ricoprono U, per F3 si ha $f(s) - g(s) = 0$. □

Esempio 2.8 (Somma diretta)**.** Dati due fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, la loro somma diretta è definita come

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto U. Esistono due ovvi morfismi di inclusione $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ e per ogni punto x vale

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x\,.$$

Abbiamo visto che non ogni prefascio è un fascio: il seguente criterio si applica a prefasci contenuti in un fascio ed è molto utile.

Lemma 2.9. *Siano $\mathcal{F}$ un fascio su X e $\mathcal{G}$ un sottoprefascio di $\mathcal{F}$. Allora $\mathcal{G}$ soddisfa (F3).*

Inoltre, $\mathcal{G}$ soddisfa (F4), ossia $\mathcal{G}$ è un sottofascio di $\mathcal{F}$, se e solo se per ogni unione di aperti $U = \cup_i U_i$, e per ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ vale:

$$s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \text{ per ogni } i \iff s \in \mathcal{G}(U).$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà (F3) per $\mathcal{G}$: si abbia $U = \cup_i U_i$ ed $s \in \mathcal{G}(U)$ tale che $s_{|U_i} = 0$ per ogni i. Dato che $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ e che $\mathcal{F}$ è un fascio si ha $s = 0$

Per dimostrare invece (F4) consideriamo degli elementi $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ in modo che coincidano sull'intersezioni U_{ij} par ogni i, j. Di nuovo, vediamoli come elementi di $\mathcal{F}(U)$. Ma allora $\exists s$: $s_{|U_i} = s_i$ $\forall i$. Ma dalla condizione $s_i = s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ $\forall i$ si ricava che $s \in \mathcal{G}(U)$ e quindi la tesi.

Viceversa se $\mathcal{G}$ è un fascio, sia $U = \cup_i U_i$ una unione di aperti e sia $s \in \mathcal{F}(U)$. Dobbiamo mostrare che $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \iff s \in \mathcal{G}(U)$. Se $s \in \mathcal{G}(U)$ allora applicando il morfismo di restrizione si ottiene $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(\bigcup U_i)$, viceversa se $s_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)\, \forall i$ allora vale l'ipotesi (F4) perché $\left(s_{|U_i}\right)\big|_{U_j} = s_{|U_i \cap U_j} = s_{|U_j \cap U_i} = \left(= s_{|U_j}\right)\big|_{U_i}$ e pertanto $\exists s' \in \mathcal{G}(\bigcup U_i)$ tale che $s'\big|_{U_i} = s_i$. Quindi applicando la proprietà $(F3)$ a $s - s'$ si ottiene la tesi. □

Dato un fascio $\mathcal{F}$ in uno spazio topologico X ed un aperto $U \subset X$ possiamo restringere $\mathcal{F}$ ad U in maniera ovvia: per ogni aperto $V \subseteq U$ si pone

$$\mathcal{F}_{|U}(V) = \mathcal{F}(V)\,.$$

Si verifica immediatamente che $\mathcal{F}_{|U}$ è un fascio su U e che se $V \subset U \subset X$ sono aperti, allora $\mathcal{F}_{|V} = (\mathcal{F}_{|U})_{|V}$.

Dati due fasci $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ su uno spazio topologico X denotiamo con $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ il gruppo abeliano dei morfismi di fasci $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$;

Se $U \subset X$ è un aperto, segue immediatamente dalle definizioni che ogni morfismo $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce un morfimo di fasci su U:

$$f_{|U} \colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}\,.$$

In altri termini abbiamo definito un prefascio $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$:

$$U \mapsto \mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) = \mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U}).$$

Teorema 2.10. *Il prefascio $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ è un fascio.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Sia $\{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di X e come al solito indichiamo $U_{ij} = U_i \cap U_j$ ecc. e con $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}_0(I)$ il nervo di Cech associato:

$$\mathcal{N} = \coprod_{k\geq 0} \mathcal{N}_k, \qquad \mathcal{N}_k = \{\alpha \subset I \mid |\alpha| = k+1,\ U_\alpha \neq \emptyset\}.$$

Si noti che se $\alpha \subset \beta$ allora $U_\beta \subseteq U_\alpha$. Supponiamo di avere:

(1) un fascio $\mathcal{F}_\alpha$ su U_α per ogni $\alpha \in \mathcal{N}$;
(2) un isomorfismo di fasci $r_{\alpha\beta}\colon (\mathcal{F}_\alpha)_{|U_\beta} \to \mathcal{F}_\beta$ su U_β per ogni $\alpha \subset \beta$.
(3) le identità $r_{\beta\gamma} r_{\alpha\beta} = r_{\alpha\gamma}$ per ogni $\alpha \subset \beta \subset \gamma$.

Esiste allora un fascio $\mathcal{F}$ su X e, per ogni $\alpha \in \mathcal{N}$ un isomorfismo $r_\alpha\colon \mathcal{F}_{|U_\alpha} \to \mathcal{F}_\alpha$ di fasci su U_α tale che $r_{\alpha\beta} r_\alpha = r_\beta$ per ogni $\alpha \subseteq \beta$.

Notiamo preliminarmente che dalle precedenti condizioni segue che $r_{\alpha\alpha}$ è l'identità per ogni α.

È allora sufficiente definire $\mathcal{F}(V)$ come il sottogruppo di $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(U_i \cap V)$ formato dalle famiglie $\{s_i\}$ tali che $r_{i\alpha}(s_i) = r_{j\alpha}(s_j)$ per ogni $i, j \in \alpha$. Il resto è lasciato per esercizio.

Osservazione 2.11. per avere esistenza ed unicità del fascio $\mathcal{F}$ bastava dare i fasci $\mathcal{F}_\alpha$ ed i isomorfismi $r_{\alpha\beta}$ per $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ (sul 2-scheletro del nervo).

Note. Il materiale di questa sezione è standard. Ottimi riferimenti sono: la Sezione II.1 di [3] e l'Appendice B di [4].

3. Successioni esatte e nucleo

Ricordiamo che una successione di morfismi di gruppi abeliani

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots,$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n, o equivalentemente se $d_n(G_n) \subset \mathrm{Ker}\, d_{n+1}$ per ogni n. Si dice invece una **successione esatta** se $d_n(G_n) = \mathrm{Ker}\, d_{n+1}$ per ogni n. In particolare ogni successione esatta è anche un complesso.

Una **successione esatta corta** è una successione esatta del tipo $0 \to A \to B \to C \to 0$, ossia formata da 5 gruppi con gli estremi nulli. Equivalentemente, il diagramma $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ è una successione esatta corta se e solo se f è iniettiva, g è surgettiva e $f(A) = \mathrm{Ker}\, g$.

Esempio 3.1. Delle seguenti successioni di morfismi di gruppi:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (n, n), \quad g(n, m) = n,$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (2n, 4n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \to 0, \qquad f(n) = (n, 2n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

la seconda e la terza sono complessi, la terza è esatta (corta).

Osservazione 3.2. Ogni successione esatta (lunga)

$$\cdots G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si spezza naturalmente nella sequenza di successioni esatte corte:

$$0 \to \mathrm{Ker}\, d_n \to G_n \xrightarrow{d_n} \mathrm{Ker}\, d_{n+1} \to 0, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Viceversa, una sequenza di successioni esatte corte

$$0 \to A_n \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{g_n} A_{n+1} \to 0, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

in cui il terzo elemento della successione esatta $n$esima coincide con il primo elemento della successione $n+1$-esima (che abbiamo denotato A_{n+1}), può essere ricomposta in una successione esatta lunga

$$\cdots G_{n-1} \xrightarrow{f_n g_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_{n+1} g_n} G_{n+1} \cdots.$$

Le nozioni di complesso e di successione esatta si estendono immediatamente ai fasci. Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n. Per il Lemma **??** una successione di morfismi di fasci è un complesso se e solo se per ogni punto x la successione delle spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots ,$$

è un complesso. Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice una **successione esatta** se per ogni punto x la successione di spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots \qquad ,$$

è una successione esatta.

Lemma 3.3 (Esattezza sulle sezioni implica esattezza sulle spighe)**.** *Siano $\mathcal{B}$ una base della topologia su X e $\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{G}\xrightarrow{g}\mathcal{H}$ due morfismi di prefasci su X tali che per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ la successione*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta. Allora per ogni $x \in X$ la successione di spighe

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x$$

è esatta.

Dimostrazione. La verifica che $\operatorname{Im} f_x \subseteq \operatorname{Ker} g_x$ è immediata. Per l'inclusione opposta notiamo che il seguente diagramma di gruppi è commutativo per ogni scelta dell'aperto U che contenga il punto x, sceglieremo solo aperti della base.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d] & \mathcal{H}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x \arrow[r, "g_x"] & \mathcal{H}_x
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che se $s_x \in \operatorname{Ker} g_x$ allora esiste $r_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(r_x) = s_x$. Consideriamo un rappresentante di s_x, indichiamolo con $s_V \in \mathcal{G}(V)$, $x \in V$, ed il fatto che $g_x(s_x) = 0$ ci assicura che esiste un aperto della base W tale che $x \in W$ e $g_V(s_V)\big|_W = 0$. A questo punto consideriamo la successione esatta

$$\mathcal{F}(W) \xrightarrow{f_W} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{g_W} \mathcal{H}(W)$$

per l'esattezza sappiamo che esiste r_W tale che $f_W(r_W) = s_W$. La tesi segue scegliendo come r_x la classe di r_W.

□

Definizione 3.4. Il nucleo di un morfismo di fasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è definito come

$$\operatorname{Ker} f(U) = \operatorname{Ker}(f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

per ogni aperto U.

È facile vedere che $\operatorname{Ker} f$ è un fascio: basta notare che $\operatorname{Ker}(f)$ è un sottoprefascio di $\mathcal{F}$ e vale la proprietà richiesta dal l Lemma 2.9. Per definizione, la successione

$$0 \to \operatorname{Ker} f(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

è esatta per ogni aperto U. Per il Lemma si ha quindi una successione esatta di fasci

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}\,.$$

L'esistenza del nucleo ci permette di ripetere per i fasci la procedura dell'Osservazione 3.2; possiamo quindi spezzare una qualunque successione esatta di fasci in una serie di successioni esatte corte.

Teorema 3.5 (Esattezza a sinistra delle sezioni globali)**.** *Per ogni successione esatta di fasci su X del tipo*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}\ ,$$

e per ogni aperto $U \subset X$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta.

Dimostrazione. Data una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ che va a zero ho che questa va a zero in ognuna delle spighe, e dunque per ogni punto esiste un aperto V_x in cui la restrizione s_{V_x} va a zero, ma per l'esattezza sulle spighe $s_{V_x} = 0$, a patto di prendere l'aperto eventualmente più piccolo, e quindi ho per le proprietá di fascio di $\mathcal{F}$ che s è 0 e dunque f_U è iniettiva.

Dato un elemento $s \in \mathcal{G}(U)$ che vada a zero posso ripetere lo stesso ragionamento già fatto per ottenere delle sezioni $r_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$ che abbiano come immagine proprio s_{V_x}, per concludere resta da verificare che, dati due punti x, y si abbia che $r_{V_x}\big|_{V_x \cap V_y} = r_{V_y}\big|_{V_x \cap V_y}$, ma chiaramente $r_{V_x}\big|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}\big|_{V_x \cap V_y}$ ha come immagine 0 e dunque per l'iniettività mostrata al punto precedente si ha $r_{V_x}\big|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}\big|_{V_x \cap V_y} = 0$. Quindi per le proprietà di fascio di $\mathcal{F}$ segue la tesi. □

In particolare, se $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni x, allora $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni aperto U. Basta infatti applicare il Teorema 3.5 alla successione esatta di fasci

$$0 \to 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}\ .$$

Similmente, se $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è bigettivo per ogni x, allora $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è bigettivo per ogni aperto U. Basta infatti applicare il Teorema 3.5 alla successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \to 0\ .$$

Esempio 3.6. Se

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0\ ,$$

e una successione esatta di fasci, non è detto che per ogni aperto U la successione

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U) \to 0$$

sia esatta.

Consideriamo ad esempio $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ come gruppo abeliano, dotato del prodotto e di 1 come elemento neutro: dato uno spazio topologico X si consideri il fascio

$$\mathcal{F}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{C}^* \text{ continua }\}, \qquad U \subset X\,.$$

Si ha allora una successione esatta

$$0 \to \{\pm 1\} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\cdot^2} \mathcal{F} \to 0,$$

dove $\cdot^2$ è l'elevazione al quadrato e $\{\pm 1\}$ denota il fascio delle funzioni localmente costanti a valori ± 1.

Basta adesso considerare $X = \mathbb{C} - \{0\}$ e verificare che l'identità appartiene a $\mathcal{F}(X)$ e non è il quadrato di alcuna funzione continua su X.

In analogia con la definizione di successione esatta, diremo che un morfismo di fasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è iniettivo (resp.: surgettivo, bigettivo) se per ogni x il morfismo tra le spoghe $f\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo (resp.: surgettivo, bigettivo). Abbiamo visto un tale f è iniettivo (resp.: bigettivo) se e solo se per ogni aperto U il morfismo $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo (resp.: bigettivo). Abbiamo anche visto che un morfismo surgettivo di fasci non è necessariamente surgettivo a livello di sezioni.

4. I fasci delle sezioni continue e discontinue

Scopo di questa sezione è quello di associare, in maniera canonica e funtoriale, ad ogni prefascio $\mathcal{F}$ un fascio $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$, un suo sottofascio $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ ed un morfismo di prefasci $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$.

Sia $\mathcal{U}$ un insieme di gruppi abeliani. Per ogni spazio topologico X e per ogni applicazione

$$\phi\colon X \to \mathcal{U}, \qquad x \mapsto \phi(x),$$

che ad ogni punto associa un gruppo abeliano, possiamo definire un fascio su X, che indicheremo $\mathcal{C}^0\phi$, ponendo, per ogni aperto non vuoto $U \subset X$:

$$\mathcal{C}^0\phi(U) = \mathcal{C}^0\phi(U) = \prod_{x\in U} \phi(x)\ .$$

Quindi dare un elemento $s \in \mathcal{C}^0\phi(U)$ equivale a dare un elemento $s_x \in \phi(x)$ per ogni punto $x \in U$. I morfismi di restrizione sono dati dalle proiezioni:

$$\rho_{UV}\colon \prod_{x\in U} \phi(x) \to \prod_{x\in V} \phi(x), \qquad \{s_x \mid x \in U\} \mapsto \{s_x \mid x \in V\}\,.$$

La verifica che $\mathcal{C}^0\phi$ è un fascio è del tutto elementare.

Un caso particolare della precedente costruzione si ha quando Se $\mathcal{U}$ è l'insieme delle spighe di un qualunque prefascio $\mathcal{F}$ e $\phi(x) = \mathcal{F}_x$ per ogni x. Il fascio corrispondente viene indicato $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ e detto **fascio delle sezioni discontinue di $\mathcal{F}$**:

$$\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x\ .$$

Per ogni aperto U, gli omomorfismi di gruppi abeliani

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, \qquad x \in U$$

inducono un omomorfismo di gruppi $i\colon \mathcal{F}(U) \to \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$ compatibile con le restrizioni ad aperti più piccoli e quindi anche un morfismo di prefasci $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

Lemma 4.1. *Nelle notazioni precedenti, il prefascio $\mathcal{F}$ soddisfa la condizione (F3) se e solo se per ogni aperto U il morfismo $i\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia $U = \cup U_j$ una unione di aperti di X e sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s_{|U_j} = 0$ per ogni j. Allora per ogni $x \in U$ esiste j tale che $x \in U_j$ e quindi il germe di s in $\mathcal{F}_x$ è uguale al germe di $s_{|U_j}$ che è nullo. In particolare s appartiene al nucleo di i. Abbiamo quindi provato che se i è iniettivo per ogni U, allora vale (F3). Viceversa se vale (F3) ed $i(s) = 0$ per qualche $s \in \mathcal{F}(U)$, allora per ogni $x \in U$ esiste un intorno aperto $x \in V_x$ tale che $(U, s) \sim (V_x, 0)$. Per definizione di $\sim$, a mano di restringere V_x non è restrittivo supporre $V_x \subset U$ e $s_{|V_x} = 0$. Siccome $\cup_{x\in U} V_x = U$, per (F3) si ha $s = 0$. $\square$

Osserviamo inoltre che, per (4.2), ogni morfismo di prefasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, induce in maniera naturale un morfismo tra i rispettivi fasci di sezioni discontinue

$$f^0\colon \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}, \qquad f^0_U = \prod_{x\in U} f_x\colon \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}(U),$$

che commuta con i morfismi i:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{G} \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r, "f^0"] & \mathcal{C}^0\mathcal{G}_x \end{tikzcd} \quad . \tag{4.1}$$

Dato un prefascio $\mathcal{F}$, con annesso morfismo $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$, che ad ogni sezione associa l'insieme di tutti i suoi germi, definiamo $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ come il sottofascio delle sezioni che sono localmente nell'immagine di i: più precisamente, dato un aperto U ed una sezione $s \in \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$, si ha $s \in \mathcal{F}^+$ se e solo se per ogni $x \in U$ esiste un aperto $x \in V \subset U$ ed una sezione $t \in \mathcal{F}(V)$ tale che $i(t) = s_{|V}$. Dal fatto che i è un morfismo di prefasci segue immediatamente che $\mathcal{F}^+$ è un prefascio e la verifica del criterio esposto nel Lemma 2.9 è immediata. È altresì ovvio che l'immagine di i è contenuta in $\mathcal{F}^+$, ossia $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

Lemma 4.2. *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X, allora per ogni $x \in X$ il morfismo $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ induce un isomorfismo di spighe $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}^+_x$. In particolare i è un isomorfismo se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio.*

Dimostrazione. Per definizione ogni sezione di $\mathcal{F}_+$ è localmente immagine di una sezione di $\mathcal{F}$ e questo è del tutto equivalente a dire che i è surgettivo sulle spighe. Per mostrare l'iniettività basta osservare che per ogni $x \in X$ il morfismo $i\colon \mathcal{F}_x \to (\mathcal{C}^0\mathcal{F})_x$ ha un inverso a sinistra, dato dalla valutazione nel punto x dei germi di sezioni discontinue. □

Anche il morfismo $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ è canonico nel senso che per ogni morfismo di prefasci $h\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ vi è un unico morfismo di fasci $h^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ tale che $h^+ i = ih$. Siccome i è un isomorfismo sulle spighe, il morfismo h^+ è unico sulle spighe, e dal Lemma 2.7 segue quindi l'unicità di h^+. Per quanto riguarda l'esistenza, basta definire h^+ come la restrizione di $h^0\colon \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}$ ai sottofasci delle sezioni continue.

Corollario 4.3. *Per ogni prefascio $\mathcal{F}$, il morfismo $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ possiede la seguente prorietà universale: per ogni fascio $\mathcal{G}$ ed ogni morfismo di prefasci $h\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, esiste un unico morfismo di fasci $h^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tale che $h = h^+ i$.*

Dimostrazione. Siccome i è un isomorfismo sulle spighe, il morfismo h^+ è unico sulle spighe, e dal Lemma 2.7 segue quindi l'unicità di h^+. Per quanto riguarda l'esistenza, basta osservare che h induce in maniera canonica un morfismo di fasci $h^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$, e che $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+$ in virtù del lemma precedente. □

La costruzione del fascio $\mathcal{F}^+$ permette di definire in maniera utile le nozioni di immagine e conucleo di un morfismo di fasci.

Sia $f\colon \ \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci; è duopo notare che la definizione più ovvia di "prefascio immagine", ossia:

$$\overline{\operatorname{Im} f}(U) = \operatorname{Im} f_U = f_U(\mathcal{F}(U)), \qquad U \subset X,$$

non è in generale un fascio. Si consideri ad esempio il morfismo di elevazione al quadrato di funzioni complesse descritto nell'Esempio 3.6; sempre nel caso $X = \mathbb{C} - \{0\}$ si ha che possiamo scrivere X come unione di due aperti in cui esiste la radice quadrata dell'identità, e questo implica che il prefascio immagine non soddisfa (F4).

Definizione 4.4. Sia $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Il fascio immagine $\operatorname{Im} f$ è definito come il sottofascio di $\mathcal{G}$ formato dalle sezioni che sono localmente immagine di f.

La definizione di fascio immagine è molto simile a quella del fascio $\mathcal{F}^+$ delle sezioni continue, e la verifica che $\operatorname{Im} f$ è un fascio è sostanzialmente identica. Lasciamo per esercizio la semplice verifica che $\overline{\operatorname{Im} f} \to \operatorname{Im} f$ è un isomorfismo sulle spighe, o equivalentemente che $\overline{\operatorname{Im} f}^+ \simeq \operatorname{Im} f$.

Al fine di venire incontro al lettore meno esperto, richiamiamo la nozione di **conucleo**. Dato un omomorfismo di gruppi abeliani $f\colon G \to H$, l'immagine $f(G)$ è un sottogruppo (normale in quanto H abeliano) di H e si definisce il conucleo di f come il gruppo quoziente

$$\operatorname{Coker}(f) = \frac{H}{f(G)}\,.$$

Se denotiamo con $\pi\colon H \to \operatorname{Coker}(f)$ la proiezione al quoziente, per definizione si ha una successione esatta

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker}(f) \to 0\,.$$

Viceversa, se $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{p} K \to 0$ è una successione esatta, per i classici teoremi di omomorfismo dei gruppi, essendo p surgettivo, si ha un isomorfismo di gruppi

$$K \cong \frac{H}{\operatorname{Ker} p} = \frac{H}{f(G)} = \operatorname{Coker}(f)\,.$$

Sempre dai classici teoremi di teoria dei gruppi segue la seguente proprietà universale del conucleo: *Sia $G \xrightarrow{f} H$ un omomorfismo dei gruppi con proiezione sul conucleo $H \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker}(f)$. Per ogni omomorfismo di gruppi $q\colon H \to K$ tale che $qf = 0$ esiste, ed è unico, un omomorfismo di gruppi $\overline{q}\colon \operatorname{Coker}(f) \to K$ tale che $q = \overline{q}\pi$.*

Infatti, dire che $qf = 0$ equivale a dire $f(G) \subseteq \operatorname{Ker} q$ e questa è condizione necessaria e sufficiente affinché q si fattorizzi al quoziente $H/f(G)$. L'unicità segue dal fatto π è surgettivo.

Consideriamo adesso un *quadrato commutativo* di gruppi abeliani, ossia un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$

Se $x \in \operatorname{Ker}\alpha$, allora $\gamma\beta(x) = \delta\alpha(x) = 0$ e quindi $\beta(x) \in \operatorname{Ker}\gamma$. Dunque il quadrato commutativo definisce per restrizione un omomorfismo $\beta\colon \operatorname{Ker}(\alpha) \to \operatorname{Ker}(\gamma)$. Si noti che se $\beta\colon A \to B$ è iniettivo, allora anche $\beta\colon \operatorname{Ker}(\alpha) \to \operatorname{Ker}(\gamma)$ è iniettivo.

Si consideri adesso la proiezione sul conucleo $\pi\colon D \to \operatorname{Coker}(\gamma)$. Allora $\pi\delta\alpha = \pi\gamma\beta = 0$ poiché $\pi\gamma = 0$ e per la proprietà universale del conucleo, l'omomorfismo $\pi\delta$ si fattorizza ad un omomorfismo tra i conuclei $\overline{\delta}\colon \operatorname{Coker}(\alpha) \to \operatorname{Coker}(\gamma)$:

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Ker}(\alpha) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(\gamma) \arrow[d] & \\ \operatorname{Ker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \operatorname{Coker}(\beta) \arrow[d, "\overline{\gamma}"] \\ \operatorname{Ker}(\delta) \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(\delta) \\ & \operatorname{Coker}(\alpha) \arrow[r, "\overline{\delta}"] & \operatorname{Coker}(\gamma) & \end{tikzcd} .$$

Come per l'immagine, la definizione del conucleo di un morfismo di fasci richiede maggior cautela, sempre perché, in generale, se $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, in generale il prefascio

$$\overline{\operatorname{Coker} f}(U) = \operatorname{Coker} f_U = \frac{\mathcal{G}(U)}{f_U\mathcal{F}(U)},$$

non è un fascio.

Si definisce allora il fascio conucleo come $\operatorname{Coker} f = \overline{\operatorname{Coker} f}^{+}$: equivalentemente, sia $\mathcal{C}^0 f$ il fascio definito come

$$\mathcal{C}^0 f(U) = \prod_{x\in U} \operatorname{Coker} f_x = \prod_{x\in U} \frac{\mathcal{G}_x}{f_x\mathcal{F}_x} .$$

I quadrati commutativi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

definiscono degli omomorfismi di gruppi $\overline{\operatorname{Coker} f}(U) \to \operatorname{Coker} f_x$, $x \in U$, e quindi un morfismo di prefasci $i\colon \overline{\operatorname{Coker} f} \to \mathcal{C}^0 f$. Quindi per ogni aperto U si ha che $\operatorname{Coker} f(U) \subset \prod_{x\in U} \frac{\mathcal{G}_x}{f_x\mathcal{F}_x}$ è il sottogruppo delle sezioni localmente nell'immagine di i.

Siccome per ogni aperto U si ha per costruzione una successione esatta

$$0 \to \operatorname{Ker} f_U \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \to \overline{\operatorname{Coker} f}(U) \to 0,$$

passando alle spighe si ha, per ogni $x \in X$ una successione esatta

$$0 \to \operatorname{Ker} f_x \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \to \overline{\operatorname{Coker} f}_x \to 0,$$

e, siccome il morfismo naturale $\overline{\operatorname{Coker} f} \to \operatorname{Coker} f = \overline{\operatorname{Coker} f}^{+}$ è un isomorfismo sulle spighe, ne consegue una successione esatta di fasci

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \to \operatorname{Coker} f \to 0,$$

che, volendo, si può all'occorrenza spezzare in due successioni esatte corte:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \to 0, \qquad 0 \to \operatorname{Im} f \to \mathcal{G} \to \operatorname{Coker} f \to 0 .$$

5. Elementi di algebra omologica

Abbiamo già incontrato il concetto di complesso di gruppi abeliani e di successione esatta ed abbiamo esteso tali concetti ai fasci.

Indichiamo con **CAb** la categoria dei complessi (coomologici, detti anche di cocatene) di gruppi abeliani. Un oggetto in **CAb** è un complesso del tipo

$$G^* : \qquad \cdots \xrightarrow{d} G^n \xrightarrow{d} G^{n+1} \xrightarrow{d} \cdots \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad d^2 = 0\,.$$

Gli omomorfismi d vengono detti i differenziali (o anche il differenziale) del complesso. Ogni complesso G^* con indici in un sottoinsieme $J \subset \mathbb{Z}$ può essere pensato con un oggetto in **CAb** con $G^n = 0$ se $n \notin J$.

Un morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ è una successione di omomorfismi di gruppi $f_n\colon G^n \to A^n$ che commutano con i differenziali, ossia $df_n(x) = f_{n+1}(dx)$ per $x \in G^n$.

I morfismi di complessi si possono comporre nel modo ovvio.

Definizione 5.1. Un morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ si dice:
(1) **iniettivo** se $f_n\colon G^n \to A^n$ è iniettivo per ogni n;
(2) **surgettivo** se $f_n\colon G^n \to A^n$ è surgettivo per ogni n.

Definizione 5.2. Dato un complesso G^* di gruppi abeliani, per ogni intero n definiamo:
(1) il gruppo degli n cocicli
$$Z^n(G^*) = \{x \in G^n \mid dx = 0\}\ ;$$
(2) il gruppo degli n cobordi
$$B^n(G^*) = \{dx \in G^n \mid x \in G^{n-1}\}\ ;$$
(3) l' n-esimo gruppo di coomologia
$$H^n(G^*) = \frac{Z^n(G^*)}{B^n(G^*)}\ .$$

La definizione dei gruppi di coomologia ha perfettamente senso in quanto $d^2 = 0$ e quindi se $x \in B^n(G^*)$ vuol dire che $x = dy$ per qualche $y \in G^{n-1}$ e quindi $dx = d^2y = 0$, ossia $x \in Z^n(G^*)$. Essendo poi tutti i gruppi abeliani il quoziente H^n è ancora un gruppo abeliano. I gruppi H^n sono una misura di quanto manca al complesso per essere una successione esatta: un complesso G^* è una successione esatta se e soltanto se $H^n(G^*) = 0$ per ogni n.

È immediato osservare che ogni morfismo di complessi $f\colon G^* \to A^*$ induce, per restrizione e fattorizzazione, dei morfismi di gruppi abeliani:

$$f\colon Z^n(G^*) \to Z^n(A^*), \qquad f\colon B^n(G^*) \to B^n(A^*), \qquad f\colon H^n(G^*) \to H^n(A^*)\ .$$

Una successione esatta corta di complessi è una successione

$$0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$$

di morfismi di complessi tale che, per ogni intero n la successione di gruppi abeliani

$$0 \to A^n \xrightarrow{f_n} B^n \xrightarrow{g_n} C^n \to 0$$

è esatta.

Per funtorialità, ogni successione esatta corta di complessi come sopra induce per ogni n tre complessi

$$0 \to Z^n(A^*) \xrightarrow{f_n} Z^n(B^*) \xrightarrow{g_n} Z^n(C^*) \to 0,$$
$$0 \to B^n(A^*) \xrightarrow{f_n} B^n(B^*) \xrightarrow{g_n} B^n(C^*) \to 0,$$
$$0 \to H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \to 0,$$

che però non sono successioni esatte in generale. Si consideri ad esempio il caso in cui $A^1 = B^0 = B^1 = C^0 = \mathbb{Z}$ e $A^i, B^i, C^i = 0$ altrimenti, e dove i tre morfismi $d\colon B^0 \to B^1$, $f_1\colon A^1 \to B^1$, $g_0\colon B^0 \to C^0$ sono tutti uguali all'identità.

I complessi degli 0-coclicli, degli 1-cobordi e della 0-coomologia risultano essere rispettivamente:

$$0 \to 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \to 0,$$
$$0 \to 0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_1} 0 \to 0,$$
$$0 \to 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \to 0\ .$$

Teorema 5.3. *Sia $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani. Allora è ben definita una successione di omomorfismi di gruppi*

$$\delta_n \colon H^n(C^*) \to H^{n+1}(A^*), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

che induce una successione esatta (lunga) di coomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Dimostrazione. Sia n un intero fissato e definiamo δ_n. Sia $x \in H^n(C^*)$, sia X l'insieme dei rappresentanti di x in $\operatorname{Ker} g_n \subseteq C^n$. Siccome $g_n \colon B^n \to C^n$ è surgettivo, possiamo scegliere $b \in B^n$ tale che $g_n(b) \in X$. Siccome $g_{n+1}(db) = dg_n(b) = 0$ si ha $db \in \operatorname{Ker} g_{n+1}$.

Per esattezza vi è un unico elemento $a \in A^{n+1}$ tale che $f_{n+1}(a) = db$. Si vede subito che a è un cociclo, infatti

$$f_{n+2}(da) = df_{n+1}(a) = d^2b = 0$$

ed il morfismo f_{n+2} è iniettivo. Poniamo dunque

$$\delta_n(x) = \text{classe di coomologia di } a$$

e mostriamo che non dipende dalla scelta di b. Sia $\tilde{b}$ tale che $g_n(\tilde{b}) \in X$, allora $g_n(b - \tilde{b})$ è un cobordo, ossia esiste $c \in C^{n-1}$ tale che $dc = g_n(b - \tilde{b})$. Poiché g_{n-1} è suriettiva, esiste $h \in B^{n-1}$ tale che $g_{n-1}(h) = c$, allora

$$g_n(b - \tilde{b} - dh) = g_n(b - \tilde{b}) - g_n(dh) = g_n(b - \tilde{b}) - dg_{n-1}(h) = 0$$

e per esattezza esiste $k \in A^n$ tale che $f_n(k) = b - \tilde{b} - dh$. Dunque

$$f_{n+1}(a - dk) = db - f_{n+1}(dk) = db - df_n(k) = db - (db - d\tilde{b} - d^2h) = d\tilde{b}$$

e siccome a, $a - dk$ sono cocicli che inducono la stessa classe di coomologia abbiamo provato che $\delta_n(x)$ è ben definito.

La dimostrazione dell'esattezza della successione lunga di coomologia è lasciata per esercizio. $\square$

I morfismi δ_n del Teorema 5.3 si comportano bene rispetto ai morfismi di complessi. Ad esempio, segue immediatamente dalla definizione che dato un diagramma commutativo di morfismi di complessi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^* \arrow[r] \arrow[d] & B^* \arrow[r] \arrow[d] & C^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^* \arrow[r] & M^* \arrow[r] & L^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con le righe successioni esatte corte, per ogni n vi è un diagramma commutativo di gruppi di coomologia

$$\begin{tikzcd}
H^n(C^*) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d] & H^{n+1}(A^*) \arrow[d] \\
H^n(L^*) \arrow[r, "\delta_n"] & H^{n+1}(N^*)
\end{tikzcd}$$

Corollario 5.4 (Lemma del serpente)**.** *Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con le righe esatte, esiste una successione esatta lunga

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] & \operatorname{Ker} \arrow[dll, "\delta"] & \\
& \operatorname{Coker} f \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & \operatorname{Coker} h \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Considerando le colonne come complessi concentrati nei gradi 0 e 1, i nuclei corrispondono ai gruppi H^0 ed i conuclei ai gruppi H^1. □

Note. Per maggiori dettagli sugli argomenti di questa sezione rimandiamo al primo capitolo di [9] ed al capitolo dedicato all'algebra omologica di [6].

6. Risoluzione canonica e coomologia dei fasci

Abbiamo visto che ad ogni fascio $\mathcal{F}$ è associato un morfismo canonico ed iniettivo di fasci $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Definiamo $\mathcal{F}^{(1)}$ come il conucleo di i in modo da avere una successione esatta corta di fasci $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{(1)} \to 0$. Ripetendo la procedura con $\mathcal{F}^{(1)}$ al posto di $\mathcal{F}$, e poi ricorsivamente aumentando ad ogni passaggio gli indici di 1, si ottiene una serie di successioni esatte corte

$$\begin{aligned}
&0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{(1)} \to 0,\\
&0 \to \mathcal{F}^{(1)} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(1)} \to \mathcal{F}^{(2)} \to 0,\\
&0 \to \mathcal{F}^{(2)} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(2)} \to \mathcal{F}^{(3)} \to 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

che possiamo ricomporre in una unica successione esatta lunga di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \cdots\ ,$$

dove

$$\mathcal{C}^n\mathcal{F} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}^{(1)} = \cdots = \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(n)}\,,$$

che chiameremo **risoluzione canonica** di $\mathcal{F}$.

Abbiamo visto che ogni morfismo di fasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si estende canonicamente ad un morfismo $f^0\colon \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}$: con il termine "canonicamente" intendiamo tra le altra cose che il tutto si comporta in maniera funtoriale rispetto ai morfismi di fasci, ossia $(fg)^0 = f^0g^0$. Considerando la fattorizzazione di f^0 ai conuclei si ottiene un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & \mathcal{F}^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, "f^{(1)}"] & 0\\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G}^{(1)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e ripetendo la procedura su $f^{(1)}$ e poi ricorsivamente otteniamo che f si estende in maniera naturale e funtoriale ad un morfismo tra le risoluzioni canoniche

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^0"] & \mathcal{C}^1\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & \cdots\\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "i"] & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \arrow[r, "d"] & \mathcal{C}^1\mathcal{G} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposizione 6.1. *Sia $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ una successione esatta di fasci su X. Allora per ogni intero $n \geq 0$ ed ogni aperto $U \subset X$ la successione di gruppi abeliani*

$$0 \to \mathcal{C}^n\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f^n_U} \mathcal{C}^n\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g^n_X} \mathcal{C}^n\mathcal{H}(U) \to 0$$

è esatta.

Dimostrazione. Induzione su n. Per $n = 0$ basta osservare che per ogni $x \in X$ la successione di spighe $0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{f} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g} \mathcal{H}_x \to 0$ è esatta e ciò implica che per ogni sottoinsieme $Y \subset X$ si ha una successione esatta di gruppi abeliani

$$0 \to \prod_{x\in Y} \mathcal{F}_x \to \prod_{x\in Y} \mathcal{G}_x \to \prod_{x\in Y} \mathcal{H}_x \to 0\,.$$

In particolare, per ogni aperto U la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f^0_U} \mathcal{C}^0\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g^0_U} \mathcal{C}^0\mathcal{H}(U) \to 0$$

è esatta e per il Lemma 3, anche la successione di fasci $0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{f^0} \mathcal{C}^0\mathcal{G} \xrightarrow{g^0} \mathcal{C}^0\mathcal{H} \to 0$ è esatta. Applicando il lemma del serpente al diagramma commutativo di fasci con righe esatte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^0\mathcal{H} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e ricordando che i morfismi verticali sono iniettivi, si ottiene la successione esatta dei conuclei $0 \to \mathcal{F}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{G}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(1)} \to 0$.

Basta adesso applicare l'ipotesi induttiva osservando che, per come è stata costruita la risoluzione canonica, si ha

$$\mathcal{C}^n\mathcal{F} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}^{(1)}, \qquad \mathcal{C}^n\mathcal{G} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{G}^{(1)}, \qquad \mathcal{C}^n\mathcal{H} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{H}^{(1)},$$

per ogni $n > 0$. □

Definizione 6.2. I **gruppi di coomologia** di un fascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si definiscono come i gruppi di coomologia del complesso di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{C}^1\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{C}^2\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{C}^3\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \cdots$$

Ricordiamo che per un fascio $\mathcal{F}$ si ha la doppia notazione $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. In altri termini:

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0 \qquad n < 0,$$

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{C}^1\mathcal{F})),$$

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{C}^n\mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^{n+1}\mathcal{F}))}{d\Gamma(X, \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F})}, \qquad n > 0\,.$$

Lemma 6.3. *Per ogni fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si ha*

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})\,.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 3.5 alla successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}$$

□

Esempio 6.4. Se X è uno spazio topologico discreto, allora per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X vale $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Infatti per ogni punto $x \in X$ vale $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$ e se consideriamo il ricoprimento fatto da tutti i punti di X segue dalla proprietà (F4) che il morfismo $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ è surgettivo. Dunque $\mathcal{F}^{(1)} = 0$ e $\mathcal{C}^n\mathcal{F} = 0$ per ogni $n > 0$.

Dalla definizione dei gruppi di coomologia segue immediatamente che $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

Teorema 6.5. *Ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

sullo spazio topologico X induce una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^*\mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^*\mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^*\mathcal{H}) \to 0$$

e quindi una successione esatta lunga di coomologia

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots\,.$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 6.1 che per ogni $n \geq 0$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^n\mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^n\mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^n\mathcal{H}) \to 0$$

è esatta. □

Se $\mathcal{F}$ è un fascio su X e $U \subset X$ è un aperto possiamo definire i gruppi di coomologia $H^n(U, \mathcal{F})$ ponendoli per definizione uguali a $H^n(U, \mathcal{F}_{|U})$. È facile vedere che la risoluzione canonica commuta con le restrizioni agli aperti, e quindi che $H^n(U, \mathcal{F})$ coincide con l'n-esimo gruppo di coomologia del complesso di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(U, \mathcal{C}^1\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(U, \mathcal{C}^2\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(U, \mathcal{C}^3\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \cdots$$

Note. Il riferimento principe in fatto di risoluzioni canoniche è [2].

7. Fasci fiacchi, fasci aciclici e teorema di de Rham

Definizione 7.1. Un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si dice **fiacco** se per ogni aperto $U \subset X$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è surgettivo.

Osserviamo che se $\mathcal{F}$ è fiacco, allora per ogni coppia di aperti $U \subset V$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ è surgettivo: basta osservare che la composizione della restrizione $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ con la restrizione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è surgettivo. Lo stesso ragionamento prova che se $\mathcal{F}$ è fiacco, allora per ogni aperto $U \subset X$ la restrizione $\mathcal{F}_{|U}$ è ancora fiacca.

Ad esempio i fasci di sezioni discontinue $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ sono fiacchi. Basta pensare che i morfismi di inclusione non sono altro che le proiezioni, cioè, se $U \subseteq V$, allora:

$$\rho_{UV} : \mathcal{C}^{\mathcal{F}}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(V) = \prod_{x \in Y} \mathcal{F}_x$$

è suriettivo.

Lemma 7.2. *Sia* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ *una successione esatta corta di fasci su* X*:*

(1) *se* $\mathcal{F}$ *è fiacco allora per ogni aperto* U *la successione di gruppi*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{H}(U) \to 0$$

è esatta;

(2) *se* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *sono fiacchi, allora anche* $\mathcal{H}$ *è fiacco.*

Dimostrazione. L'unico punto non banale da dimostrare è la surgettività di $\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{H}(U)$; non è restrittivo supporre $\mathcal{F}$ un sottofascio di $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ il morfismo di inclusione. Sia $s \in \mathcal{H}(U)$ una sezione fissata e consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} = \{(V, r) \mid V \subset U,\ r \in \mathcal{G}(V),\ g(r) = s_{|V}\}\ .$$

Notiamo che $\mathcal{A}$ è non vuoto, poiché contiene la coppia $(\emptyset, 0)$, lo possiamo ordinare dunque per estensione ed l'assioma (F4) per $\mathcal{G}$ ci garantisce che possiamo applicare il lemma di Zorn ed avere a disposizione un elemento massimale di $(W, h) \in \mathcal{A}$; per concludere la dimostrazione basta provare che $W = U$.

Se per assurdo esiste un punto $x \in U - W$, esiste un germe di sezione $r_x \in \mathcal{G}_x$ tale che $g(r_x) = s_x$.

Dunque esiste un intorno aperto $x \in V$ ed una sezione $r \in \mathcal{G}(V)$ tale che $g(r) = s_{|V}$. Sia $\psi = h_{|W \cap V} - r_{|W \cap V} \in \mathcal{F}(W \cap V)$ e, siccome $\mathcal{F}$ è fiacco esiste $\phi \in \mathcal{F}(V)$ che estende ψ; a meno di sostituire r con $r + \phi \in \mathcal{G}(V)$ possiamo supporre che r e h coincidono su $V \cap W$ e quindi si incollano ad una sezione su $W \cup V$, contraddicendo la massimalità di (W, h). $\square$

Teorema 7.3. *Sia*

$$0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \to \cdots$$

una successione esatta di fasci fiacchi su X*. Allora i fasci* $\operatorname{Ker} d_i$ *sono tutti fiacchi e per ogni aperto* $U \subset X$ *la successione*

$$0 \to \mathcal{F}_0(U) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3(U) \to \cdots$$

è esatta.

Dimostrazione. Basta spezzare la successione di fasci in successioni esatte corte, applicare il Lemma 7.2 e ricomporre le sezioni su U in una successione esatta lunga. $\square$

Corollario 7.4. *Se* $\mathcal{F}$ *è un fascio fiacco su* X*, allora* $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ *per ogni* $n > 0$*. In particolare per ogni fascio* $\mathcal{F}$ *si ha* $H^n(X, \mathcal{C}^m\mathcal{F}) = 0$ *per ogni* $n > 0$ *ed ogni* $m \geq 0$*.*

Dimostrazione. Basta osservare che i fasci $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ sono tutti fiacchi ed applicare il Teorema 7.3 alla risoluzione canonica di $\mathcal{F}$. □

Definizione 7.5. Un fascio $\mathcal{F}$ tale che $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$ si dice **aciclico**.

Possiamo riscrivere il Corollario 7.4 dicendo che ogni fascio fiacco è aciclico.

Definizione 7.6. Un fascio $\mathcal{M}$ tale che $H^1(U, \mathcal{M}) = 0$ per ogni aperto $U \subset X$ si dice **molle**[1].

Teorema 7.7. *Ogni fascio fiacco è molle, ed ogni fascio molle è aciclico.*

È chiaro che il Corollario 7.4 è un'ovvia conseguenza del Teorema 7.7, ma come il lettore si accorgerà facilmente, nella dimostrazione di entrambe le implicazioni del teorema si utilizza l'aciclicità dei fiacchi.

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ è fiacco, allora $\mathcal{F}_{|U}$ è fiacco per ogni aperto U; dunque $H^n(U, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$ ed in particolare $\mathcal{F}$ è molle.

Sia $\mathcal{M}$ un fascio molle, e consideriamo una qualunque successione esatta $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to 0$ con $\mathcal{G}$ fiacco: ad esempio possiamo prendere $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0\mathcal{M}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{(1)}$. Vogliamo dimostrare che anche $\mathcal{F}$ è fiacco, ossia che $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è surgettiva per ogni aperto U: siccome $\mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(U)$ è surgettiva per costruzione, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ è surgettiva. A tal fine basta considerare la successione di coomologia associata alla successione esatta corta di fasci

$$0 \to \mathcal{M}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U} \to \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

ed usare il fatto che $H^1(U, \mathcal{M}) = 0$.

Per ipotesi si ha $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$, mentre per ogni $n > 1$ dalla successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \to H^{n-1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \to \cdots$$

e dal fatto che $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono fiacchi segue $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$. □

Vediamo adesso degli esempi di fasci molli che non sono fiacchi: tra non molto vedremo esempi di fasci aciclici che non sono molli.

Teorema 7.8. *I fasci delle forme differenziali (di qualunque ordine) su una varietà differenziabile sono molli.*

Dimostrazione. Per ogni varietà differenziabile X denotiamo con $\mathcal{A}^p_X$ il fascio delle p-forme differenziali su X. Ogni aperto $U \subset X$ è a sua volta una varietà differenziabile e $\mathcal{A}^p_U = (\mathcal{A}^p_X)_{|U}$. Per dimostrare il teorema non è quindi restrittivo dimostrare che $H^1(X, \mathcal{A}^p_X) = 0$ per ogni $p \geq 0$ ed ogni varietà differenziabile X.

I due punti chiave della dimostrazione sono: la partizione dell'unità di classe C^∞; le forme differenziali possono essere moltiplicate per funzioni di classe C^∞.

Proviamo che per una qualunque successione esatta di fasci $0 \to \mathcal{A}^p_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ su X, il morfismo $\beta\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{F}(X)$ è surgettivo. Sia $s \in \mathcal{F}(X)$ fissata, dato che $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ è surgettivo, esistono un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$ e sezioni $r_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tali che $\beta(r_i) = s_{|U_i}$. Denotiamo come al solito con $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$; per ogni i, j esiste quindi una unica forma differenziale $\omega_{ij} \in \mathcal{A}^p_X(U_{ij})$ tale che

$$\alpha(\omega_{ij}) = (r_j)_{|U_{ij}} - (r_i)_{|U_{ij}}\,.$$

Si noti che per ogni i, j, k si ha

$$(\omega_{jk})_{|U_{ijk}} - (\omega_{ik})_{|U_{ijk}} + (\omega_{ij})_{|U_{ijk}} = 0$$

in quanto la sua immagine tramite α è uguale alla restrizione a U_{ijk} di $(r_k - r_j) - (r_k - r_i) + (r_j - r_i)$.

Sia adesso $\{t_i\}$ una partizione dell'unità C^∞ subordinata al ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$. Ricordiamo che:

(1) Ogni $t_i\colon X \to [0, 1]$ è di classe C^∞;
(2) $\operatorname{supp}(t_i) \subset U_i$ per ogni i (per definizione il supporto $\operatorname{supp}(t_i)$ è la chiusura in X dell'aperto $t_i^{-1}(]0, 1])$);
(3) ogni punto $x \in X$ possiede un intorno V tale che $V \cap \operatorname{supp}(t_i) \neq \emptyset$ per un numero finito di indici i;
(4) $\sum_i t_i = 1$.

[1] Traduzione, al pari di morbido e soffice, dei termini **mou** (Francese) e **soft** (Inglese).

In particolare, per ogni i, j la forma differenziale $t_j\omega_{ij}$ è ben definita in U_i e quindi

$$\omega_{ij} = \sum_k t_k\omega_{ij} = \sum_k t_k\omega_{ik} - \sum_k t_k\omega_{jk}\,.$$

Per ogni indice i possiamo considerare

$$\hat{r}_i = r_i + \alpha(\sum_j t_i\omega_{ij}) \in \mathcal{G}(U_i)\,.$$

Si ha $\beta(\hat{r}_i) = \beta(r_i) = s_{|U_i}$ e per ogni i, j

$$(\hat{r}_j)_{|U_{ij}} - (\hat{r}_i)_{|U_{ij}} = (r_j)_{|U_{ij}} - (r_i)_{|U_{ij}} + \alpha(\sum_k t_k\omega_{jk} - \sum_k t_k\omega_{ik}) = \alpha(\omega_{ij} + \sum_k t_k\omega_{jk} - \sum_k t_k\omega_{ik}) = 0.$$

Dunque le sezioni locali $\hat{r}_i$ si incollano ad una sezione globale che solleva s.

Per dimostrare che $H^1(X, \mathcal{A}^p_X) = 0$ basta prendere una successione esatta $0 \to \mathcal{A}^p_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ in cui $\mathcal{G}$ è aciclico (e.g. $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0\mathcal{A}^p_X$) ed applicare la successione lunga di coomologia. $\square$

È importante osservare che per dimostrare la mollezza abbiamo solo usato la possibilità di moltiplicare le sezioni del fascio per una partizione dell'unità di classe C^∞: dunque la stessa dimostrazione prova che anche il fascio dei campi di vettori è molle, e più in generale sono molli tutti i fasci delle sezioni di classe C^∞ di un qualunque fibrato vettoriale.

Esempio 7.9. Il fascio $\mathcal{A}^0_X$ delle funzioni C^∞ su una varietà differenziabile X di dimensione positiva è molle ma non è fiacco. La verifica che $\mathcal{A}^0_X$ non è fiacco è immediata, basta infatti prendere una qualsiasi carta locale U con coordinate $x_1, \ldots, x_n$ e osservare che la funzione x_1^{-1} definita sull'aperto $\{x_1 \neq 0\} \subset U$ non si estende ad U.

Chiameremo **risoluzione** (a destra) di un fascio $\mathcal{F}$ una qualunque successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots\,.$$

Una tale risoluzione è detta aciclica (risp.: molle, fiacca) se ciascun fascio $\mathcal{E}_i$ è aciclico (risp.: molle, fiacco).

Teorema 7.10 (de Rham astratto)**.** *Data una qualsiasi successione esatta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots\,,$$

per ogni $n \geq 0$ esiste un omomorfismo naturale di gruppi

$$\alpha_n \colon H^n(\Gamma(X, \mathcal{E}_*)) = \frac{\mathrm{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_n) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_{n-1})} \to H^n(X, \mathcal{F})\,.$$

Inoltre:

(1) *se $H^{n-i-1}(X, \mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n-2$, allora α_n è iniettivo;*
(2) *se $H^{n-i}(X, \mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, allora α_n è surgettivo.*
(3) *gli omomorfismi α_n commutano con i morfismi di risoluzioni: per ogni diagramma commutativo di fasci*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "i"] & \mathcal{E}'_0 \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{E}'_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{E}'_2 \arrow[r, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con le righe esatte, si hanno dei diagrammi commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^n(\Gamma(X, \mathcal{E}_*)) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & H^n(\Gamma(X, \mathcal{E}'_*)) \arrow[dl, "\alpha'_n"] \\
& H^n(X, \mathcal{F}) &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su n trattando separatamente i casi $n = 0$, $n = 1$ e $n \geq 2$.

Iniziamo con $n = 0$. Ricordiamo che

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

e che si ha la successione esatta corta

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{E}_1)$$

Per iniettività abbiamo che $\Gamma(X, \mathcal{F})$ è isomorfo alla sua immagine in $\Gamma(X, \mathcal{G})$ e dall'esattezza della successione segue l'isomorfismo

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{E}_1))\ .$$

Per $n = 1$ consideriamo il fascio $\mathcal{G} = \operatorname{Ker} d_1$; abbiamo la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

e la successione esatta

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots\ .$$

Per quanto dimostrato al punto precedente si ha dunque $H^0(X, \mathcal{G}) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{E}_1) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{E}_2))$ ed una successione esatta lunga

$$\Gamma(X, \mathcal{E}_0) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{E}_0) \to \cdots$$

che induce una successione esatta

$$0 \to \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_2))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_0)} \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{E}_0)$$

ricordando che

$$\frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_2))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_0)} = H^1(\Gamma(X, \mathcal{E}_*)$$

segue la tesi.

Sia adesso $n > 1$ e supponiamo vero il teorema per tutti gli interi minori di n. Dalla successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

otteniamo la successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \to H^{n-1}(X, \mathcal{E}_0) \to H^{n-1}(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_n} H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{E}_0) \to \cdots\ ,$$

per ipotesi induttiva abbiamo anche un morfismo naturale

$$\gamma_n\colon \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_n) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_{n-1})} = H^n(\Gamma(X, \mathcal{E}_*)) \to H^{n-1}(X, \mathcal{G}), \qquad n > 0\ .$$

α_n non è altro che la composizione di γ_n e β_n.

Le ulteriori proprietà seguono in maniera abbastanza ovvia riscrivendo le varie successioni esatte e sfruttando l'ipotesi induttiva. □

Corollario 7.11. *Data una qualsiasi successione esatta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots\ ,$$

con $\mathcal{E}_i$ aciclico per ogni i, si hanno gli isomomorfismi naturali

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X, \mathcal{E}_n) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_{n+1}))}{d\Gamma(X, \mathcal{E}_{n-1})}, \qquad n \geq 0\ .$$

Dimostrazione. Conseguenza immediata del teorema di de Rham astratto. □

Il passaggio dal teorema di de Rham astratto a quello usuale segue dal lemma di Poincaré, secondo il quale ogni forma differenziale chiusa è localmente esatta. Ciò implica in particolare che, a livello di fasci, il complesso di de Rham

$$\mathcal{A}^0_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^3_X \xrightarrow{d} \cdots\ ,$$

è una successione esatta. Siccome una 0-forma è chiusa se e solo se è localmente costante, si ha una risoluzione molle

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}^0_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^3_X \xrightarrow{d} \cdots\ ,$$

e quindi

$$H^n(X,\mathbb{R}) = \frac{\operatorname{Ker}(d\colon \Gamma(X,\mathcal{A}^n) \to \Gamma(X,\mathcal{A}^{n+1}))}{d\Gamma(X,\mathcal{A}^{n-1})}\,.$$

Osservazione 7.12. A rigore il precedente teorema mostra che la coomologia di de Rham coincide con la coomologia del "fascio $\mathbb{R}$" e non con la coomologia singolare: tuttavia non è difficile dimostrare che, almeno per spazi topologici localmente contraibili, la coomologia singolare a coefficienti in un gruppo abeliano G coincide con la coomologia del fascio delle funzioni localmente costanti a valori in G.

Osservazione 7.13. Segue dal teorema di de Rham che il fascio $\mathbb{R}$ è aciclico su $X = \mathbb{R}^2$, mentre per ogni punto $x \in X$ vale $H^1(X - \{x\}, \mathbb{R}) \neq 0$ e quindi $\mathbb{R}$ non è molle.

Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki: *General Topology Chapters 1-4* Elements of mathematics, Springer-Verlag, (1989).
[2] R. Godement: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris (1958).
[3] R. Hartshorne: *Algebraic geometry.* Springer Verlag GTM **52** (1977).
[4] D. Huybrects: *Complex geometry.* Springer Verlag Universitext (2005).
[5] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura: *Foundations of algebraic analysis.* Princeton University press (1986).
[6] S. Lang: *Algebra.* Springer-Verlag, third edition (2002).
[7] M. Manetti: *Topologia* Springer Unitext **71** (2014).
[8] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge University Press (1975).
[9] C.A. Weibel: *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).