

Istituzioni di geometria superiore

Marco Manetti

Versione preliminare ed incompleta del 29 novembre 2024

SOMMARIO. Versione incompleta e preliminare del 29 novembre 2024, ad **uso esclusivo** del corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2024–25, corso di Laurea Magistrale in Matematica, Sapienza Università di Roma.

Tratteremo i preliminari algebrici e topologici un po' alla volta, poco prima del loro effettivo utilizzo.

Scarico di responsabilità. Queste dispense sono il tentativo, altamente imperfetto, di collegare ed armonizzare svariate nozioni matematiche sparse in letteratura, a volte in bella mostra, a volte in reconditi anfratti, utili allo studio della geometria e, si spera, di autonomo interesse.

Se ne consiglia la lettura a un pubblico matematicamente adulto e maturo, in grado di comprendere gli argomenti proposti senza tormentare l'autore con domande banali o sfasate, e superare le difficoltà senza inciampare in granelli di sabbia.

L'autore declina ogni responsabilità in merito a eventuali interpretazioni erranee dei contenuti e si dissocia, sin d'ora, da qualsiasi tipo di atti illeciti e millanterie possano da esse derivare.



Questo lavoro è rilasciato sotto la licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale (CC BY-NC-SA 4.0).

Ognuno è libero:

- Condividere, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare questo materiale con qualsiasi mezzo e formato.
- di creare opere derivate.

Alle seguenti condizioni:

Attribuzione: Di riconoscere il contributo dell'autore originario. In occasione di ogni atto di riutilizzo o distribuzione, bisogna chiarire agli altri i termini della licenza di quest'opera.

Non commerciale: Di non usare quest'opera per scopi commerciali.

Condividi allo stesso modo: Le opere derivate devono essere distribuite con la stessa licenza del materiale originario.

Se si ottiene il permesso dal titolare del diritto d'autore, è possibile rinunciare ad ognuna di queste condizioni.

Indice

Capitolo 1. Omologia singolare	5
1.1. Gruppi abeliani liberi	5
1.2. Le identità semicosimpliciali	10
1.3. Omologia singolare	13
1.4. Omologia ed applicazioni continue	16
1.5. Il numero di spire (winding number)	18
1.6. Invarianza omotopica	20
1.7. Suddivisioni baricentriche e catene piccole	24
1.8. Successioni esatte, lunghe e corte	28
1.9. Successione esatta di Mayer–Vietoris ed applicazioni	32
Capitolo 2. Omologia e coomologia delle varietà compatte	37
2.1. Gruppi abeliani finitamente generati	37
2.2. Ricoprimenti semplici	39
2.3. Il funtore Hom	43
2.4. Coomologia singolare	46
2.5. Il teorema dei coefficienti universali, versione ‘lazy’	48
2.6. Mayer–Vietoris e cocatene piccole	51
2.7. Coomologia di Alexander–Spanier	54
Capitolo 3. Fasci	57
3.1. Germi di funzioni differenziabili	57
3.2. Prefasci	60
3.3. Fasci	63
3.4. Morfismi di fasci	66
3.5. Successioni esatte	69
3.6. La successione esponenziale	72
Capitolo 4. Coomologia di Čech	75
4.1. Coomologia di Čech dei ricoprimenti	75
4.2. Cocatene di Čech normalizzate, alternanti ed ordinate	79
4.3. Insiemi diretti e colimiti	84
4.4. Coomologia di Čech di fasci e prefasci	86
4.5. Spazi topologici paracompatti e PHH	90
4.6. La successione esatta lunga di coomologia	92
4.7. Il teorema di Leray	94
4.8. Risoluzioni e teorema di de Rham astratto	95
4.9. Le risoluzioni singolare e di Alexander–Spanier	98
Capitolo 5. Spazi con funzioni	103
5.1. Fasci di anelli, moduli e spazi vettoriali	103
5.2. Prevarietà	106
5.3. Prevarietà modellate	109
5.4. Spazi tangente e cotangente di Zariski	111
Capitolo 6. Varietà differenziabili	115
6.1. Varietà differenziabili	115
6.2. Bernoccoli e partizioni dell’unità	118
6.3. Spazi tangenti	121
6.4. Sottovarietà e dipendenza analitica	124

6.5. La prima classe di Stiefel–Whitney	128
Bibliografia	131

Omologia singolare

Faremo una trattazione minimale dell'omologia singolare, lo stretto indispensabile per i nostri obiettivi. Lo studente interessato ad approfondire l'argomento, oltre a seguire l'insegnamento di Topologia Algebrica, può consultare i testi [5, 13, 20, 48, 54].

La teoria dell'omologia singolare, introdotta da Lefschetz nel 1933 [35] e poi modificata, nella sua formulazione attuale, da Eilenberg nel 1944 [8],¹ è comparsa abbastanza tardi rispetto ad altre teorie omologiche ma ha preso rapidamente il sopravvento grazie alle sue caratteristiche che la rendono immediatamente un invariante topologico e per la sua facilità a confrontarsi con la teoria dell'omotopia. Il termine "omologia", così come i concetti di ciclo e bordo, sono stati introdotti da Poincaré nel contesto dei poliedri, contesto che poi si è sviluppato nelle teorie omologiche di tipo combinatorio (e.g. omologia simpliciale). Nella prima metà del XX secolo sono state inoltre introdotte e studiate molte altre teorie omologiche (omologia di Vietoris, di Čech, di Kurosch, di Alexandroff–Lefschetz, di Alexander–Kolmogorov ecc., vedi [36]) oggi in gran parte dimenticate ed inutilizzate.

Nota terminologica. Se non diversamente indicato, la topologia in ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è quella euclidea e tutti i gruppi considerati sono abeliani e scritti in notazione additiva, ossia con operazione di somma $+$ ed elemento neutro 0 . Il gruppo ciclico di ordine n viene rappresentato come quoziente di \mathbb{Z} , e quindi indicato $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{Z}/(n)$.

Useremo entrambe le notazioni $(x_i)_{i \in I}$, e $\{x_i \mid i \in I\}$ per denotare una collezione di oggetti x_i , indicizzata da un insieme I ; qualora tutti gli x_i siano elementi di un insieme fissato X , ciò equivale a dare un'applicazione $I \rightarrow X$. In particolare sono ammessi dopponi, ossia $x_i = x_j$ anche se $i \neq j$.

Useremo la ben nota convenzione per la quale il simbolo $:=$ significa che il termine scritto alla sua sinistra è, per definizione, uguale all'espressione che si trova dalla parte destra.

1.1. Gruppi abeliani liberi

Supporremo che il lettore sia a conoscenza della definizione e delle principali proprietà dei gruppi abeliani; ad esempio, il materiale contenuto nel Capitolo 2 di [2] sarà più che sufficiente per i nostri usi. Riportiamo adesso una breve e veloce descrizione dei gruppi abeliani liberi; il lettore può trovare una trattazione più approfondita sia nella Sezione I.7 di [34] che nel Capitolo 1 di [21].

Data una famiglia indicizzata di gruppi abeliani $(M_i)_{i \in I}$, parametrizzata da un insieme I , si definisce il loro **prodotto diretto**

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i \text{ per ogni } i\},$$

con l'operazione di somma definita componente per componente: $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$. Quando I è un insieme finito di interi consecutivi si scrive anche

$$I = \{p, p+1, \dots, q-1, q\} \Rightarrow \prod_{i \in I} M_i = \prod_{i=p}^q M_i, \quad (x_i)_{i \in I} = (x_p, \dots, x_q).$$

Si definisce poi la loro **somma diretta** come il sottogruppo

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i \neq 0 \text{ per al più finiti indici } i \right\}.$$

¹È istruttivo, anche se molto forzato, pensare che l'articolo di Eilenberg verrebbe schifato dalla VQR, dato che ha collezionato solamente 12 citazioni nei suoi primi 80 anni di vita.

Quando l'insieme I è vuoto, sia il prodotto che la somma diretta sono uguali al gruppo banale; $\prod_{i \in \emptyset} M_i = \bigoplus_{i \in \emptyset} M_i = 0$. Senza entrare nelle intime motivazioni di questo fatto, osserviamo semplicemente che in questo modo, ogni volta che $I = A \cup B$, con A e B disgiunti, si hanno le uguaglianze

$$\prod_{i \in I} M_i = \prod_{i \in A} M_i \times \prod_{i \in B} M_i, \quad \bigoplus_{i \in A} M_i \oplus \bigoplus_{i \in B} M_i.$$

Molto spesso è utile dare una diversa rappresentazione degli elementi della somma diretta. Dato un sottoinsieme finito $S \subseteq I$ denotiamo con

$$\sum_{s \in S} m_s[s] \in \bigoplus_{i \in I} M_i$$

l'elemento $(x_i)_{i \in I}$ in cui $x_i = m_i$ se $i \in S$ e $x_i = 0$ altrimenti. Per definizione, tutti gli elementi della somma diretta si scrivono in questo modo. Questa scrittura risulta particolarmente utile quando i gruppi M_i sono tutti uguali, ossia $M_i = M$ per ogni i , in tal caso si ha

$$\bigoplus_{i \in I} M = \left\{ \sum_{\text{finita}} m_i[i] \mid i \in I, m_i \in M \right\},$$

dove risulta chiaro dal contesto che con \sum_{finita} si intende una generica somma $\sum_{s \in S}$ con $S \subseteq I$ sottoinsieme finito. Ad esempio, per ogni insieme I abbiamo

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} = \left\{ \sum_{\text{finita}} a_i[i] \mid i \in I, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La teoria dei gruppi abeliani è simile, ma non identica, a quella degli spazi vettoriali. Data una successione di elementi s_1, \dots, s_n in un gruppo abeliano G , una combinazione lineare (a coefficienti interi) di essi è un'espressione del tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i s_i, \quad a_i \in \mathbb{Z},$$

dove $a_i s_i$ indica la somma di a_i copie di s_i . Diremo s_1, \dots, s_n sono linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare nulla è quella con tutti i coefficienti uguali a 0. Diremo che un sottoinsieme $T \subseteq G$ è linearmente indipendente su \mathbb{Z} se ogni successione finita di elementi distinti di T è linearmente indipendente.

Diremo che un sottoinsieme $S \subseteq G$ genera G se ogni elemento si può scrivere come combinazione lineare di una successione finita in S ; equivalentemente, S è un insieme di generatori se non è contenuto in alcun sottogruppo proprio di G . Come per gli spazi vettoriali, vale il teorema di scambio.

TEOREMA 1.1.1 (di scambio). *Siano G un gruppo abeliano, $S \subseteq G$ un insieme di generatori e $T \subseteq G$ un sottoinsieme linearmente indipendente su \mathbb{Z} . Allora esiste un'applicazione iniettiva $f: T \rightarrow S$ tale che $f(T)$ è ancora linearmente indipendente su \mathbb{Z} . In particolare, la cardinalità di T è minore od uguale alla cardinalità di S .*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $p: T \times S \rightarrow T$ e $q: T \times S \rightarrow S$ le proiezioni e con \mathcal{A} la famiglia dei sottoinsiemi $C \subseteq T \times S$ tali che:

- (1) entrambe le proiezioni $p|_C: C \rightarrow T$ e $q|_C: C \rightarrow S$ sono iniettive;
- (2) $(T - p(C)) \cap q(C) = \emptyset$;
- (3) l'insieme $(T - p(C)) \cup q(C)$ è linearmente indipendente su \mathbb{Z} .

Dato che $\emptyset \in \mathcal{A}$ la famiglia \mathcal{A} è non vuota ed è ordinata per inclusione. Proviamo che \mathcal{A} soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn e quindi possiede elementi massimali.

Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ una catena, definiamo $D = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$ e mostriamo che $D \in \mathcal{A}$, da cui segue che D è un maggiorante di \mathcal{C} .

La proiezione $p|_D: D \rightarrow T$ è iniettiva; se per assurdo esistono $(t, s_1), (t, s_2) \in D$ con $s_1 \neq s_2$, siccome \mathcal{C} è una catena esiste $C \in \mathcal{C}$ che contiene entrambe le coppie $(t, s_1), (t, s_2)$ contraddicendo l'iniettività di $p|_C: C \rightarrow T$. L'iniettività di $q|_D: D \rightarrow S$ si dimostra alla stessa maniera.

Se per assurdo $D \notin \mathcal{A}$ si avrebbe una uguaglianza

$$\sum_{i=1}^n a_i t_i = \sum_{j=1}^m b_j s_j,$$

con $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ non tutti nulli, $t_i \in T - p(D)$, $s_j \in q(D)$. Dato che gli s_j sono in numero finito e \mathcal{C} è una catena, esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $s_1, \dots, s_m \in q(C)$. Ma questo contraddice l'ipotesi $C \in \mathcal{A}$ dato che a maggior ragione $t_1, \dots, t_n \in T - p(C)$.

Sia dunque $M \in \mathcal{A}$ un elemento massimale e proviamo che $p|_M: M \rightarrow T$ è bigettiva. Già sappiamo che $p|_M$ è iniettiva; se per assurdo $T \neq p(M)$, scegliamo un $t \in T - p(M)$, scriviamo $t = \sum_{i=1}^n a_i s_i$, con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $s_i \in S$, e dimostriamo che esiste un indice i tale che $M \cup (t, s_i) \in \mathcal{A}$, contraddicendo così la massimalità di M .

Per un dato indice i , siccome $t \notin p(M)$, vale $M \cup (t, s_i) \notin \mathcal{A}$ se e solo se vale almeno una delle seguenti due condizioni:

- (1) $s_i \in q(M) \cup (T - p(M) - t)$,
- (2) il sottoinsieme $(T - p(M) - t) \cup (q(M) \cup s_i)$ è linearmente dipendente.

In entrambi i casi esiste una combinazione lineare

$$(1.1) \quad c_i s_i = \sum_h a_{i,h} t_{i,h} + \sum_k b_{i,k} s_{i,k}$$

con entrambe le sommatorie finite, $c_i, a_{i,h}, b_{i,k} \in \mathbb{Z}$ non tutti nulli, $t_{i,h} \in T - p(M) - t$, $s_{i,k} \in q(M)$. Dato che $M \in \mathcal{A}$ deve essere $c_i \neq 0$.

Se per assurdo $M \cup (t, s_i) \notin \mathcal{A}$ per ogni i , allora valgono le relazioni (1.1), ed a meno di moltiplicazioni per opportuni interi non è restrittivo supporre $c_i = c \neq 0$ per ogni i . Sostituendo le (1.1) in $ct = \sum_{i=1}^n a_i c s_i$ si può scrivere ct come combinazione lineare di elementi in $(T - p(M) - t) \cup q(M)$, contraddicendo l'indipendenza lineare di $(T - p(M)) \cup q(M)$.

Abbiamo quindi provato che $p|_M: M \rightarrow T$ è bigettiva e basta definire f come la composizione di $q: M \rightarrow S$ con l'inversa di $p|_M$. L'iniettività di f è chiara ed inoltre $f(T) = q(M)$ è linearmente indipendente. \square

Una \mathbb{Z} -base di un gruppo abeliano G è una collezione indicizzata $\{s_i \mid i \in I, s_i \in G\}$ tale che gli elementi s_i siano, al variare di $i \in I$, generatori linearmente indipendenti. Si vede subito che non tutti i gruppi abeliani possiedono \mathbb{Z} -basi; ad esempio, in un gruppo finito l'unico sottoinsieme linearmente indipendente è il vuoto.

Per definizione, un **gruppo abeliano libero** è un gruppo che possiede una \mathbb{Z} -base.

PROPOSIZIONE 1.1.2. *Un gruppo abeliano G è libero se e solo se è isomorfo ad una somma diretta di copie di \mathbb{Z} , ossia se e solo se esiste un insieme di indici I tale che $G \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ possiede \mathbb{Z} -basi, ad esempio quella canonica $(1[i])_{i \in I}$. Viceversa se un gruppo abeliano G possiede una base $(s_i)_{i \in I}$ possiamo definire l'isomorfismo

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad \sum_i a_i [i] \mapsto \sum_i a_i s_i.$$

\square

Ad esempio, sono liberi i gruppi

$$\mathbb{Z}^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

COROLLARIO 1.1.3. *Sia $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ un omomorfismo. Se il quoziente $\mathbb{Z}^m / f(\mathbb{Z}^n)$ è finito, allora $n \geq m$. In particolare, $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m$ se e solo se $n = m$.*

DIMOSTRAZIONE. L'immagine tramite f della base canonica coi \mathbb{Z}^n genera $f(\mathbb{Z}^n)$. D'altra parte se e_1, \dots, e_m è la base canonica si \mathbb{Z}^m e $r > 0$ è l'ordine del gruppo $\mathbb{Z}^m / f(\mathbb{Z}^n)$, allora gli elementi re_1, \dots, re_m appartengono al sottogruppo $f(\mathbb{Z}^n)$ e sono linearmente indipendenti. \square

ESEMPIO 1.1.4. Sia G un gruppo abeliano. Diremo che $x \in G$ è multiplo di $y \in G$ se $x = ny$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$. Un elemento $x \in G$ si dice **primitivo** se è multiplo solamente di $\pm x$. Ad esempio, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ non possiedono elementi primitivi, mentre $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ è primitivo se e solo se a_1, \dots, a_n non hanno fattori comuni.

Si prova facilmente (esercizio) che in un gruppo abeliano libero ogni elemento non nullo è multiplo di un primitivo ed ha ordine infinito.

TEOREMA 1.1.5. *Siano M un gruppo abeliano libero e $N \subseteq M$ un sottogruppo. Allora anche N è un gruppo abeliano libero. Inoltre, se $M \cong \mathbb{Z}^m$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $N \cong \mathbb{Z}^n$ con $0 \leq n \leq m$.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre $M = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$. Per il teorema di Zermelo (vedi appendice) esiste un buon ordinamento \leq su I . Buon ordinamento significa che ogni sottoinsieme non vuoto possiede minimo.

Per ogni $i \in I$ consideriamo i sottogruppi (anchessi liberi) di M :

$$M_i = \bigoplus_{j \leq i} \mathbb{Z}, \quad P_i = \bigoplus_{j < i} \mathbb{Z},$$

e indichiamo con $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{Z}$ la proiezione sulla coordinata i , il cui nucleo è esattamente P_i . Per definizione di somma diretta ogni elemento di M è contenuto in qualche M_i (basta prendere come i il massimo degli indici con coordinata non nulla); per gli stessi motivi, ogni elemento di P_i è contenuto in M_j per qualche $j < i$.

Definiamo

$$J = \{i \in I \mid f_i(N \cap M_i) \neq 0\}.$$

Per ogni $j \in J$, $f_j(N \cap M_j)$ è un sottogruppo non nullo di \mathbb{Z} e quindi esiste $0 \neq a_j \in \mathbb{Z}$ tale che $f_j(N \cap M_j) = (a_j) = \{ba_j \mid b \in \mathbb{Z}\}$. Scegliamo un $c_j \in N \cap M_j$ tale che $f_j(c_j) = a_j$ (si usa l'assioma della scelta).

Dimostriamo che l'omomorfismo

$$g: \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} \rightarrow N, \quad g\left(\sum a_j j\right) = \sum a_j c_j,$$

è un isomorfismo.

1) g è iniettivo. Siano $j_1 < j_2 < \dots < j_k \in J$ e $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$ tali che $\sum_{s=1}^k b_s c_{j_s} = 0$; ma allora

$$0 = f_{j_k}\left(\sum_{s=1}^k b_s c_{j_s}\right) = b_k a_{j_k}$$

che implica $b_k = 0$. Ripetendo il ragionamento si trova $b_s = 0$ per ogni s .

2) g è surgettivo. Sia $C \subseteq N$ il sottogruppo immagine di g e supponiamo per assurdo $C \neq N$. Allora

$$H = \{i \in I \mid C \cap M_i \neq N \cap M_i\}$$

è non vuoto e denotiamo $h = \min H$. Scegliamo $a \in (N \cap M_h) - C$.

2a) Se $h \notin J$ allora $N \cap M_h = N \cap P_h$ e quindi $a \in N \cap M_i$ per qualche $i < h$, in contraddizione con la definizione di h .

2b) Se $h \in J$, allora $f_h(a) = ba_h$ e quindi $a - bc_h \in (N \cap P_h) - C$, di nuovo in contraddizione con la definizione di h . \square

Il prossimo corollario mostra, tra le altre cose, che le condizioni dell'Esempio 1.1.4 sono necessarie ma non ancora sufficienti affinché un gruppo abeliano sia libero.

COROLLARIO 1.1.6. *Sia I un insieme infinito, allora il gruppo abeliano $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ non è libero.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare il corollario nel solo caso particolare $I = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Infatti, per ogni I infinito possiamo identificare \mathbb{N} con un sottoinsieme di I ; se $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ fosse libero, allora anche il suo sottogruppo

$$\{(a_i) \in \prod_{i \in I} \mathbb{Z} \mid a_i = 0 \forall i \notin \mathbb{N}\} \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

sarebbe libero. Osserviamo preliminarmente che il gruppo $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ è numerabile mentre il gruppo $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ non è numerabile; infatti, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ è unione, al variare di $n \in \mathbb{N}$, dei sottoinsiemi finiti

$$S_n = \{(a_0, a_1, \dots) \mid |a_i| \leq n \text{ per } i \leq n \text{ e } a_i = 0 \text{ per } i > n\},$$

mentre l'applicazione

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad (a_i) \mapsto \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \text{ dispari}\},$$

è surgettiva.

Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $\nu(a) = \sup\{k \mid 2^k \text{ divide } a\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Consideriamo i sottogruppi

$$N = \left\{ (a_0, a_1, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(a_n) = +\infty \right\}$$

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \subseteq N,$$

e dimostriamo che N non è libero. Segue dalla definizione che per ogni $(a_0, a_1, \dots) \in N$ esiste $n \geq 0$ tale che $(0, \dots, 0, a_n, a_{n+1}, \dots) \in 2N$ e quindi $N = M + 2N$. Ne segue che la restrizione a M della proiezione $N \rightarrow N/2N$ è surgettiva e quindi che $N/2N$ è numerabile. D'altra parte, N non è numerabile dato che l'applicazione

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \rightarrow N, \quad (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_0, 2a_1, \dots, 2^n a_n, \dots)$$

è iniettiva.

Supponiamo per assurdo che N sia un gruppo libero, diciamo $N \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}$. Allora l'insieme T sarebbe non numerabile ed a maggior ragione il gruppo $N/2N \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sarebbe non numerabile. \square

Sia S un insieme qualsiasi. Esistono allora un gruppo abeliano libero $F_{ab}(S)$ ed un'applicazione iniettiva di insiemi $\iota: S \rightarrow F_{ab}(S)$ tale che $\iota(S)$ sia una \mathbb{Z} -base di $F_{ab}(S)$: basta infatti definire

$$F_{ab}(S) = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}, \quad \iota(s) = 1[s].$$

Molto spesso si identifica S con la sua immagine $\iota(S) \subseteq F_{ab}(S)$ e pertanto si ha

$$F_{ab}(S) = \left\{ \text{combinazioni lineari finite } \sum a_s s \text{ con } a_s \in \mathbb{Z}, s \in S \right\}.$$

Chiameremo $F_{ab}(S)$ **gruppo abeliano libero generato da S** ; vale la seguente proprietà universale.

Per ogni gruppo abeliano G ed ogni applicazione $f: S \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo di gruppi $\tilde{f}: F_{ab}(S) \rightarrow G$ tale che $f = \tilde{f} \circ \iota$.

Infatti, data un'applicazione $f: S \rightarrow G$ con G gruppo abeliano, si vede subito che l'estensione lineare di f

$$\tilde{f}: F_{ab}(S) \rightarrow G, \quad \tilde{f}\left(\sum a_i s_i\right) = \sum a_i f(s_i),$$

è l'unico omomorfismo che estende f .

Il seguente risultato segue immediatamente dal teorema di scambio.

COROLLARIO 1.1.7. *Due insiemi S, T hanno la stessa cardinalità se e soltanto se i rispettivi gruppi abeliani liberi generati $F_{ab}(S), F_{ab}(T)$ sono isomorfi.*

Nel seguito useremo talvolta la proprietà universale dei gruppi abeliani liberi in una diversa formulazione (vedi Esercizio 1.2), detta **proprietà proiettiva**.

PROPOSIZIONE 1.1.8 (proprietà proiettiva dei gruppi abeliani liberi). *Siano F un gruppo abeliano libero. Per ogni coppia di omomorfismi di gruppi abeliani $f: F \rightarrow G, h: H \rightarrow G$, con h surgettivo, esiste un omomorfismo $g: F \rightarrow H$ tale che $f = hg$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $S \subseteq F$ una \mathbb{Z} -base di F . Dato che h è surgettivo, per ogni $s \in S$ possiamo scegliere $s' \in H$ tale che $f(s) = h(s')$. Allora l'omomorfismo $g: F \rightarrow H$ definito sulla base come $g(s) = s'$, per ogni $s \in S$, ha le proprietà richieste. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 1.1. Sia S un sottoinsieme di un gruppo abeliano G e si consideri l'applicazione

$$f: \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad f\left(\sum a_s [s]\right) = \sum a_s s,$$

(vedi proprietà universale). Provare che:

- (1) S è linearmente indipendente se e solo se f è iniettiva;
- (2) S è un insieme di generatori se e solo se f è surgettiva.

Dedurre che ogni gruppo abeliano è quoziente di un gruppo abeliano libero.

ESERCIZIO 1.2. Sia F un gruppo abeliano con la seguente proprietà: per ogni coppia di omomorfismi di gruppi abeliani $f: F \rightarrow G$, $h: H \rightarrow G$, con h surgettivo, esiste un omomorfismo $g: F \rightarrow H$ tale che $f = hg$. Dimostrare che F è abeliano libero. (Sugg.: prendere $f = \text{Id}$ e H libero.)

ESERCIZIO 1.3 (Prodotto tensoriale). Siano M, N due gruppi abeliani. Denotiamo con

$$F = \bigoplus_{M \times N} \mathbb{Z} = \left\{ \sum_{\text{finite}} a_i [m, n] \mid a_i \in \mathbb{Z}, m \in M, n \in N \right\}$$

il gruppo abeliano libero generato dall'insieme $M \times N$; per semplicità scriveremo $[m, n] \in F$ al posto di $1[m, n]$. Denotiamo con $R \subseteq F$ il sottogruppo generato da tutti gli elementi del tipo:

$$[m_1 + m_2, n] - [m_1, n] - [m_2, n], \quad [m, n_1 + n_2] - [m, n_1] - [m, n_2],$$

al variare di $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$. Infine, denotiamo $M \otimes N = F/R$ e $m \otimes n \in M \otimes N$ la proiezione al quoziente di $[m, n]$. Dimostrare che:

- (1) il sottogruppo R contiene tutti gli elementi del tipo $ab[m, n] - [am, bn]$, al variare di $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in M$ e $n \in N$;
- (2) l'applicazione $M \times N \rightarrow M \otimes N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$, è \mathbb{Z} -bilineare e l'immagine è un insieme di generatori;
- (3) per ogni applicazione \mathbb{Z} -bilineare $\phi: M \times N \rightarrow P$, il sottogruppo R è contenuto nel nucleo dell'omomorfismo $\tilde{\phi}: F \rightarrow P$ tale che $\tilde{\phi}([m, n]) = \phi(m, n)$;
- (4) (proprietà universale) per ogni applicazione \mathbb{Z} -bilineare $\phi: M \times N \rightarrow P$ esiste un unico omomorfismo di gruppi $f: M \otimes N \rightarrow P$ tale che $f(m \otimes n) = \phi(m, n)$;
- (5) $M \otimes \mathbb{Z} \cong M$ per ogni gruppo abeliano M ;
- (6) $\mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}/(\text{MCD}(n, m))$.

1.2. Le identità semicosimpliciali

Con il sostantivo **convesso** intenderemo un sottospazio topologico convesso di \mathbb{R}^n , per qualche $n > 0$.

L'involuppo convesso $\text{Conv}(A)$ di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è il più piccolo convesso che contiene A , ed è facile dimostrare che coincide con l'insieme di tutte le combinazioni convesse di sottoinsiemi finiti di A :

$$(1.2) \quad \text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^p t_i a_i \mid p \geq 0, a_i \in A, t_i \in [0, 1], \sum t_i = 1 \right\}.$$

Per completezza di informazione, citiamo il seguente risultato, del quale però non avremo bisogno in queste note.

TEOREMA 1.2.1 (Carathéodory). *Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \mid a_i \in A, t_i \in [0, 1], \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Avremo invece bisogno più avanti del seguente criterio di convessità. Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice localmente chiuso se è intersezione di un chiuso e di un aperto (vedi Esercizio 1.4).

LEMMA 1.2.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio localmente chiuso. Se $(x+y)/2 \in A$ per ogni $x, y \in A$, allora A è convesso.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $A = U \cap C$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e siano $p, q \in A$ due punti fissati. Consideriamo l'applicazione continua

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t) = (1-t)p + tq.$$

Si tratta della restrizione a $[0, 1]$ di un'applicazione affine; in particolare, per ogni $t, s \in [0, 1]$ si ha $f((s+t)/2) = (f(s) + f(t))/2$. Vogliamo dimostrare che l'immagine di f è contenuta in A , ossia che $f^{-1}(A) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(C) = [0, 1]$, usando come ipotesi che $0, 1 \in f^{-1}(A)$ e che se $s, t \in f^{-1}(A)$ allora anche $(s+t)/2 \in f^{-1}(A)$.

Si prova facilmente per induzione su m che $nt/2^m \in f^{-1}(A)$ per ogni $0 \leq n \leq 2^m$ ed ogni $t \in f^{-1}(A)$. Dato che $1 \in f^{-1}(A)$ e le frazioni diadiche $n/2^m$ sono dense nell'intervallo $[0, 1]$, segue che $f^{-1}(C) = [0, 1]$ e quindi che $f^{-1}(A) = f^{-1}(U)$ è aperto in $[0, 1]$.

Sia adesso $\varepsilon > 0$ tale che $(1-\varepsilon, 1] \subseteq f^{-1}(A)$. Per ogni $t \in (0, 1]$ sia $m > 0$ sufficientemente grande tale che $2^{m_t} \varepsilon > 1$, sia n l'intero tale che $n-1 < 2^{m_t} t \leq n$ e definiamo $x = 2^{m_t} t/n$. Allora

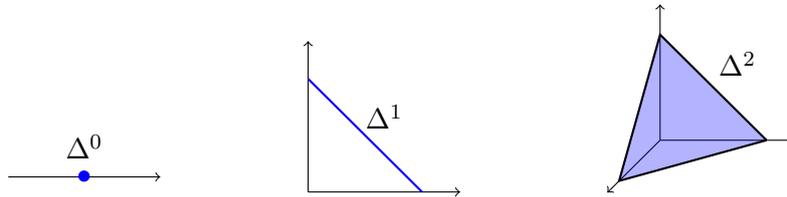
$$\varepsilon > \frac{1}{n}, \quad x \leq 1, \quad 1-x \leq 1 - \frac{2^{m_t} t}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ne segue che $x \in f^{-1}(A)$ e quindi $t = nx/2^{m_t} \in f^{-1}(A)$. \square

DEFINIZIONE 1.2.3 (simpleso topologico standard). Inizieremo a contare i vettori dalla base canonica di ciascun \mathbb{R}^n dallo 0 anziché dall'1. Per ogni $p \geq 0$ definiamo il **p -simpleso topologico standard** Δ^p come l'involuppo convesso della base canonica e_0, \dots, e_p di \mathbb{R}^{p+1} ; equivalentemente

$$\Delta^p = \{(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^p t_i = 1\} = \left\{ \sum_{i=0}^p t_i e_i \in \mathbb{R}^{p+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^p t_i = 1 \right\}.$$

È chiaro che Δ^p è un sottospazio convesso e compatto di \mathbb{R}^{p+1} .



Diremo che un'applicazione $f: A \rightarrow B$ tra due convessi è **affine** se commuta con le combinazioni convesse, ossia se

$$f\left(\sum_{i=0}^p t_i a_i\right) = \sum_{i=0}^p t_i f(a_i)$$

per ogni $p > 0$, $a_0, \dots, a_p \in A$ e $(t_0, \dots, t_p) \in \Delta^p$.

Si dimostra facilmente (Esercizio 1.5) che ogni applicazione affine da un convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ad un convesso $B \subseteq \mathbb{R}^m$ è la restrizione di un'applicazione affine $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ed è pertanto automaticamente continua.

Per ogni convesso B esiste una bigezione tra l'insieme delle applicazioni affini $f: \Delta^p \rightarrow B$ e la potenza cartesiana B^{p+1} : ad ogni $(p+1)$ -upla $b_0, \dots, b_p \in B$ corrisponde l'applicazione $f(t_0, \dots, t_p) = \sum_{i=0}^p t_i b_i$. In altri termini, denotando con $E^p = \{e_0, \dots, e_p\} \subseteq \Delta^p$ il sottoinsieme dei vertici, ogni applicazione $E^p \rightarrow B$ si estende in maniera unica ad un'applicazione affine $\Delta^p \rightarrow B$.

Esempi di applicazioni affini sono le cosiddette **applicazioni faccia**:

$$\delta_i: \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p, \quad \delta_i(t_0, \dots, t_{p-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}), \quad 0 \leq i \leq p.$$

Equivalentemente, $\delta_i: \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$ è la restrizione dell'applicazione lineare $\delta_i: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ definita sui vettori della base canonica come

$$\delta_i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{se } j < i \\ e_{j+1} & \text{se } j \geq i. \end{cases}$$

L'immagine di $\delta_i: \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$ è l'involuppo convesso dei p vertici $e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_p$ (abbiamo usato la notazione standard per la quale il cappello $\widehat{}$ indica gli elementi esclusi dalla collezione).

Le composizioni di applicazioni faccia soddisfano le cosiddette **identità semicosimpliciali**:

$$(1.3) \quad \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad \text{per ogni } j > i.$$

di facilissima dimostrazione (Esercizio 1.6). Dalle identità semicosimpliciali segue che

$$(1.4) \quad \delta_j \delta_i = \delta_{i+1} \delta_j \quad \text{per ogni } j \leq i.$$

Infatti, ponendo $h = i + 1$ si ha $\delta_j \delta_i = \delta_j \delta_{h-1}$ e siccome $h > j$ si ottiene

$$\delta_j \delta_i = \delta_j \delta_{h-1} = \delta_h \delta_j = \delta_{i+1} \delta_j.$$

In letteratura, molto spesso per identità semicosimpliciali si intende l'unione delle due formule (1.3) e (1.4).

Sia X uno spazio topologico, chiameremo **p -simpleso singolare** in X una qualsiasi applicazione continua $\phi: \Delta^p \rightarrow X$. Per ogni $p \geq 0$ denotiamo con

$$\Delta(X)_p = \{\phi: \Delta^p \rightarrow X \text{ continua}\}$$

l'insieme dei p -simpletti singolari in X , mentre se $p < 0$ si conviene che $\Delta(X)_p = \emptyset$.

Per ogni intero p , denotiamo con $S_p(X) = F_{ab}(\Delta(X)_p)$ il gruppo abeliano libero generato da $\Delta(X)_p$. Dunque $\Delta(X)_p \subseteq S_p(X)$ ed ogni elemento di $S_p(X)$ è una combinazione lineare finita $\sum_i a_i \phi_i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\phi_i \in \Delta(X)_p$. In particolare, $S_p(X) = 0$ per ogni $p < 0$ e $S_0(X)$ è canonicamente isomorfo al gruppo abeliano libero generato da X .

Sia $p \geq 0$ fissato, ogni applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ definisce per composizione a sinistra un'applicazione

$$\Delta(X)_p \rightarrow \Delta(Y)_p, \quad \phi \mapsto f \circ \phi,$$

che si estende per linearità ad un omomorfismo di gruppi

$$f_*: S_p(X) \rightarrow S_p(Y), \quad f_*\left(\sum_i a_i \phi_i\right) = \sum_i a_i f \circ \phi_i.$$

DEFINIZIONE 1.2.4. Siano C uno spazio topologico C e $p \geq 0$ un intero fissati. Definiamo per ogni $q > 0$ l'omomorfismo

$$\delta_C = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\text{Id}_C \times \delta_i)_*: S_p(C \times \Delta^{q-1}) \rightarrow S_p(C \times \Delta^q).$$

Equivalentemente, δ_C è l'estensione lineare dell'applicazione che trasforma il p -simpleso singolare $\varphi: \Delta^p \rightarrow C \times \Delta^{q-1}$ nella combinazione lineare

$$\delta_C(\varphi) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\text{Id}_C \times \delta_i)_*(\varphi) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\text{Id}_C \times \delta_i) \circ \varphi.$$

Quando $C = \{pt\}$ è un punto scriveremo semplicemente δ al posto di δ_C e, identificando nella maniera ovvia $C \times \Delta^q$ con Δ^q , otteniamo gli omomorfismi

$$\delta = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\delta_i)_*: S_p(\Delta^{q-1}) \rightarrow S_p(\Delta^q).$$

LEMMA 1.2.5. Nelle notazioni precedenti, $\delta_C^2 = \delta_C \circ \delta_C = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $q \geq 2$ ed ogni p -simpleso singolare $\phi: \Delta^p \rightarrow C \times \Delta^{q-2}$ occorre dimostrare che $\delta_C \delta_C(\phi) = 0$ in $S_p(C \times \Delta^q)$. Si ha

$$\begin{aligned} \delta_C \delta_C(\phi) &= \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{i+j} (\text{Id}_C \times \delta_j)(\text{Id}_C \times \delta_i)\phi = \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{i+j} (\text{Id}_C \times \delta_j \delta_i)\phi \\ &= \sum_{q \geq j > i \geq 0} (-1)^{i+j} (\text{Id}_C \times \delta_j \delta_i)\phi + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q-1} (-1)^{i+j} (\text{Id}_C \times \delta_j \delta_i)\phi \end{aligned}$$

Applicando le identità semicosimpliciali alla prima sommatoria e ponendo $h = i + 1$, $k = j$ nella seconda si ha

$$\delta_C \delta_C(\phi) = \sum_{q \geq j > i \geq 0} (-1)^{i+j} (\text{Id}_C \times \delta_i \delta_{j-1}) \phi + \sum_{q \geq h > k \geq 0} (-1)^{h+k-1} (\text{Id}_C \times \delta_k \delta_{h-1}) \phi$$

e diventa chiaro che le due sommatorie sono una l'opposto dell'altra. □

Esercizi.

ESERCIZIO 1.4. Sia X uno spazio topologico: un sottoinsieme $Z \subseteq X$ si dice **localmente chiuso** se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subseteq X$ tale che $z \in U$ e $Z \cap U$ è chiuso in U .

Siano X uno spazio topologico e $Z \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che sono fatti equivalenti:

- (1) Z è localmente chiuso.
- (2) Z è aperto in \bar{Z} (rispetto alla topologia di sottospazio).
- (3) Z è intersezione di un chiuso e di un aperto di X .

ESERCIZIO 1.5. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ convessi e $f: A \rightarrow B$ affine. A meno di traslazioni non è restrittivo supporre $0 \in A$, $0 \in B$ e $f(0) = 0$. Sia $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq A$ un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che $A \subseteq \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ e che per ogni $v = \sum_i a_i v_i \in A$ vale $f(v) = \sum_i a_i f(v_i)$. (Sugg.: induzione sul numero di coefficienti $a_i \neq 0$.)

ESERCIZIO 1.6. Dimostrare le identità semicosimpliciali (1.3).

1.3. Omologia singolare

Nella sostanza, un **complesso** di gruppi abeliani è una successione (nel senso di coda, trenino, fila indiana ecc.) di omomorfismi di gruppi abeliani tali che la composizione di due omomorfismi consecutivi sia sempre nulla:

$$\dots \longrightarrow H \xrightarrow{h} B \xrightarrow{b} F \xrightarrow{f} D \longrightarrow \dots \quad bh = 0, fb = 0 \text{ eccetera.}$$

Per poter rappresentare in maniera non ambigua i complessi, e per poter enunciare teoremi in maniera chiara è necessario fissare delle convenzioni terminologiche. Per ragioni storiche si sono affermate due notazioni standard ugualmente importanti:

1) Nella *notazione omologica*, i gruppi sono indicizzati dagli interi (posizionati a pedice) e gli omomorfismi abbassano gli indici di una unità:

$$\dots \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} C_{n-2} \xrightarrow{d} \dots \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2) Nella *notazione coomologica*, i gruppi sono indicizzati dagli interi (posizionati ad apice) e gli omomorfismi aumentano gli indici di una unità:

$$\dots \xrightarrow{d} C^m \xrightarrow{d} C^{m+1} \xrightarrow{d} C^{m+2} \xrightarrow{d} \dots \quad n \in \mathbb{Z}.$$

In entrambe le notazioni, i morfismi d prendono il nome generico di **differenziale**. È chiaro che si può passare da una convenzione all'altra semplicemente cambiando il segno dell'indice (e scambiando apici con pedici). Quindi, ogni definizione, teorema, esempio ecc. espresso in una notazione ha un suo corrispondente immediato nell'altra notazione.

Per riconoscere all'istante dove stiamo sguazzando, nella notazione omologica parleremo di *complessi di catene* oppure di *dg-moduli* (dg sta per "differenziale graduato"), mentre nella notazione coomologica parleremo di *complessi di cocatene* oppure di *DG-moduli* (DG è volutamente maiuscolo).

Ad esempio, per ogni spazio topologico C ed ogni $p \geq 0$, il Lemma 1.2.5 equivale a dire che

$$0 \rightarrow S_p(C \times \Delta^0) \xrightarrow{\delta_C} S_p(C \times \Delta^1) \xrightarrow{\delta_C} S_p(C \times \Delta^2) \xrightarrow{\delta_C} \dots$$

è un complesso di cocatene.

In questo capitolo avremo a che fare quasi esclusivamente con complessi di catene, e inizieremo a usare in modo significativo i complessi di cocatene nel Capitolo 2. Per questo motivo

tratteremo la teoria base dei complessi (morfismi, quasi-isomorfismi, omotopie, successioni esatte lunghe ecc.) nella notazione omologica.

DEFINIZIONE 1.3.1. Dato un complesso di catene

$$C_*: \quad \cdots \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} C_{n-2} \xrightarrow{d} \cdots \quad n \in \mathbb{Z},$$

definiamo:

- I **cicli** come gli elementi nei nuclei dei differenziali. Per ogni n il nucleo

$$Z_n(C_*) := \ker(d: C_n \rightarrow C_{n-1}) = \{x \in C_n \mid dx = 0\} \subseteq C_n$$

è detto gruppo degli n -cicli.

- I **bordi** come gli elementi immagine dei differenziali. Per ogni n definiamo il gruppo degli n -bordi $B_n(C_*) := d(C_{n+1}) \subseteq C_n$.

Osserviamo inoltre che la proprietà dei differenziali $d^2 = d \circ d = 0$ implica l'inclusione $B_n(C_*) \subseteq Z_n(C_*)$ ed è quindi possibile considerare il quoziente tra cicli e bordi.

DEFINIZIONE 1.3.2. Definiamo l' n -esimo **gruppo di omologia** del complesso C_* come il quoziente:

$$H_n(C_*) := \frac{Z_n(C_*)}{B_n(C_*)}.$$

Diremo che il complesso C_* è **aciclico** se $H_n(C_*) = 0$ per ogni n .

Sia X uno spazio topologico, per ogni applicazione continua $h: \Delta^q \rightarrow \Delta^p$ denotiamo $h^*: S_p(X) \rightarrow S_q(X)$ l'estensione lineare delle composizioni a destra con h , ossia

$$h^*\left(\sum_i a_i \phi_i\right) = \sum_i a_i (\phi_i \circ h).$$

È immediato osservare che $(fg)^* = g^* f^*$.

In particolare, le applicazioni faccia determinano una famiglia di omomorfismi di gruppi

$$\delta_i^*: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X), \quad 0 \leq i \leq p.$$

DEFINIZIONE 1.3.3. Per ogni $p > 0$ l'omomorfismo

$$d: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X), \quad d = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i^*, \quad d(\phi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi \circ \delta_i, \quad \phi \in \Delta(X)_p,$$

si dice **differenziale**.

Il nome differenziale è ben motivato dal seguente lemma.

LEMMA 1.3.4. Nelle notazioni della Definizione 1.3.3 si ha $d^2 = 0$ e quindi

$$\cdots \xrightarrow{d} S_3(X) \xrightarrow{d} S_2(X) \xrightarrow{d} S_1(X) \xrightarrow{d} S_0(X) \rightarrow 0$$

è un complesso di catene.

DIMOSTRAZIONE. Dualizzando le identità semisimpliciali

$$\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad \forall j > i$$

si ottengono le cosiddette *identità semisimpliciali*:

$$\delta_i^* \delta_j^* = \delta_{j-1}^* \delta_i^* \quad \forall j > i.$$

Per ogni $p \geq 2$ la composizione $d^2: S_p(X) \rightarrow S_{p-2}(X)$ è uguale a

$$d^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \delta_i^* \delta_j^* = \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \delta_i^* \delta_j^* + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j} \delta_i^* \delta_j^*$$

Nella prima sommatoria applichiamo le relazioni semisimpliciali, e nella seconda scambiamo i con $j-1$ e j con i :

$$d^2 = \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \delta_{j-1}^* \delta_i^* + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j-1} \delta_{j-1}^* \delta_i^* = 0.$$

□

Chiameremo il complesso

$$S_*(X) : \quad \cdots \xrightarrow{d} S_2(X) \xrightarrow{d} S_1(X) \xrightarrow{d} S_0(X) \rightarrow 0$$

il complesso delle **catene singolari** di X . I suoi gruppi di omologia, denotati per semplicità $H_n(X) = H_n(S_*(X))$, sono detti gruppi di **omologia singolare** di X .

Sempre per semplicità notazionale si scrive $Z_n(X) = Z_n(S_*(X))$ e $B_n(X) = B_n(S_*(X))$; siccome $S_n(X)$ è un gruppo abeliano libero, anche i suoi sottogruppi $Z_n(X)$ e $B_n(X)$ sono gruppi abeliani liberi. Invece, in generale, i gruppi di omologia singolare non sono liberi.

Dato che $S_p(X) = 0$ per ogni $p < 0$, a maggior ragione $H_p(X) = 0$ per ogni $p < 0$. Inoltre, dato che $\Delta^0 = \{1\} \in \mathbb{R}$, esiste una bigezione naturale tra $\Delta(X)_0$ ed X , che ad ogni 0-simplesso associa la sua immagine. Abbiamo quindi che $S_0(X)$ è naturalmente isomorfo al gruppo abeliano libero generato dai punti di X ed il differenziale di un 1-simplesso $\phi: \Delta^1 \rightarrow X$ è uguale a $d\phi = \phi(0, 1) - \phi(1, 0)$.

Iniziamo a calcolare i gruppi di omologia in qualche caso particolare.

ESEMPIO 1.3.5 (omologia del vuoto). $H_n(\emptyset) = 0$ per ogni n . Infatti, $S_p(\emptyset) = 0$ per ogni p .

ESEMPIO 1.3.6 (omologia del punto). $H_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ e $H_n(\text{pt}) = 0$ per ogni $n \neq 0$. In questo caso, per ogni $p \geq 0$ esiste un unico p -simplesso singolare, quello costante $c: \Delta^p \rightarrow \{\text{pt}\}$. Dalla formula del differenziale

$$d: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X), \quad dc = \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \right) c = \begin{cases} c & \text{se } p \text{ pari} \\ 0 & \text{se } p \text{ dispari} \end{cases}$$

segue tutto facilmente.

Lo studio del gruppo $H_0(X)$ risulta abbastanza facile per ogni X . Infatti, $S_0(X) = Z_0(S_*(X))$ e quindi esiste un omomorfismo surgettivo $\pi_X: S_0(X) \rightarrow H_0(X)$ il cui nucleo $\ker \pi_X = B_0(X)$ è il sottogruppo generato dai bordi degli 1-simplessi singolari, ossia dagli elementi $p - q \in S_0(X)$ al variare di $p, q \in X$ nella stessa componente connessa per archi.

Più in generale, dato un qualunque sottoinsieme $C \subseteq X$ si ha $S_0(C) \subseteq S_0(X)$ e denotiamo con $\pi_C: S_0(C) \rightarrow H_0(X)$ la restrizione di π_X .

PROPOSIZIONE 1.3.7. *Nelle notazioni precedenti, π_C è un isomorfismo di gruppi se e solo se C interseca ogni componente connessa per archi di X in esattamente un punto. Dunque $H_0(X)$ è isomorfo al gruppo abeliano libero generato dall'insieme delle componenti connesse per archi di X .*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con \sim la relazione di equivalenza su X data dall'appartenenza alla stessa componente connessa per archi e con $r: X \rightarrow X/\sim$ la proiezione al quoziente; dobbiamo dimostrare che π_C è un isomorfismo se e solo se $r|_C: C \rightarrow X/\sim$ è bigettiva.

Sia $r: S_0(X) \rightarrow S_0(X/\sim)$ l'estensione lineare della proiezione al quoziente e dimostriamo che il suo nucleo $\ker r$ è uguale a $\ker \pi_X = B_0(X)$, che ricordiamo generato dagli elementi $p - q \in S_0(X)$ con $p \sim q$. Se $p \sim q$ allora $r(p - q) = 0$ e questo implica $B_0(X) \subseteq \ker r$. Scegliamo un sottoinsieme $C \subseteq X$ che interseca ogni componente connessa per archi di X in un solo punto e sia $s: X \rightarrow C$ l'unica applicazione tale che $s(x) \sim x$ per ogni $x \in X$. Dunque $x = s(x) + (x - s(x))$ per ogni $x \in X$ e questo prova che $B_0(X) + S_0(C) = S_0(X)$. D'altra parte la restrizione di r a $S_0(C)$ è un isomorfismo e questo implica $B_0(X) = \ker r$, $S_0(X) = B_0(X) \oplus S_0(C)$ e di conseguenza $H_0(X) \cong S_0(X/\sim) \cong S_0(C)$.

Per concludere, supponiamo che π_C sia un isomorfismo e proviamo che allora $r|_C: C \rightarrow X/\sim$ è bigettiva. Se $p, q \in C$ e $p \sim q$ allora $\pi_C(p) = \pi_C(q)$ e dunque $p = q$; questo prova che $r|_C$ è iniettiva e possiamo trovare un insieme $C \subseteq D \subseteq X$ tale che $r|_D: D \rightarrow X/\sim$ sia bigettiva. Per il punto precedente l'applicazione $\pi_D: S_0(D) \rightarrow H_0(X)$ è un isomorfismo. La composizione di π_D con il morfismo $S_0(C) \rightarrow S_0(D)$ indotto dall'inclusione $C \subseteq D$ è π_C che è un isomorfismo per ipotesi; ma questo è possibile solamente se $C = D$. \square

LEMMA 1.3.8. *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme stellato rispetto ad un punto $x_0 \in X$, allora $H_n(X) = 0$ per ogni $n > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \geq 0$ e $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ definiamo $T(\phi): \Delta^{p+1} \rightarrow X$ ponendo

$$\begin{cases} T(\phi)(1, 0, \dots, 0) = x_0 \\ T(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) = t_0 x_0 + (1 - t_0) \phi \left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} \right), \quad t_0 < 1. \end{cases}$$

Se ϕ è continua, allora la sua immagine è compatta, quindi limitata, e da questo segue facilmente che anche $T(\phi)$ è continua.

Dunque T definisce un'applicazione $T: \Delta(X)_p \rightarrow \Delta(X)_{p+1}$ che si estende per linearità ad un omomorfismo $T: S_p(X) \rightarrow S_{p+1}(X)$. Per ogni $p > 0$ si hanno le relazioni

$$\delta_0^* T = \text{Id}, \quad \delta_i^* T = T \delta_{i-1}^*, \quad i > 0.$$

Infatti, per ogni simpleso $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si ha

$$\delta_0^* T(\phi)(t_0, \dots, t_p) = T(\phi)(0, t_0, \dots, t_p) = \phi(t_0, \dots, t_p),$$

$$\delta_i^* T(\phi)(t_0, \dots, t_p) = T(\phi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_p) = T(\phi \circ \delta_{i-1}).$$

Siano dunque $p > 0$ e $a \in Z_p(X)$, allora

$$dT a = \delta_0^* T a + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \delta_i^* T a = a - \sum_{i=0}^p (-1)^i T \delta_i^* a = a - T d a = a,$$

che prova $a \in B_p(X)$. □

Esercizi.

ESERCIZIO 1.7. Nelle notazioni della dimostrazione del Lemma 1.3.8, provare che se ϕ è un'applicazione affine allora anche $T(\phi)$ è affine.

ESERCIZIO 1.8. Imitare la dimostrazione del Lemma 1.3.8 per dimostrare che se X ha la topologia banale, quella in cui gli unici aperti sono \emptyset e X , allora $H_n(X) = 0$ per ogni $n > 0$.

1.4. Omologia ed applicazioni continue

DEFINIZIONE 1.4.1. Un **pre-morfismo** $f: (C_*, d) \rightarrow (D_*, \delta)$ di complessi di catene è una successione di omomorfismi di gruppi $\{f_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Un **morfismo** $f: (C_*, d) \rightarrow (D_*, \delta)$ di complessi di catene è un pre-morfismo che commuta con i differenziali, ossia una successione di omomorfismi di gruppi $\{f_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tali che $f_{n-1} \circ d = \delta \circ f_n$ per ogni intero n , così da rendere commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{\delta} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diremo inoltre che un morfismo di complessi $f: C_* \rightarrow D_*$ è un isomorfismo (risp.: iniettivo, surgettivo) se $f_n: C_n \rightarrow D_n$ è un isomorfismo (risp.: iniettivo, surgettivo) per ogni n .

Se $f, g: C_* \rightarrow D_*$ sono due morfismi di complessi, allora anche $f \pm g$ sono morfismi di complessi, dove $(f \pm g)_n = f_n \pm g_n$.

Una verifica diretta mostra che un morfismo di complessi $f: C_* \rightarrow D_*$ porta cicli in cicli e bordi in bordi, di conseguenza risultano ben definiti a livello di omologia gli omomorfismi $f: H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$.

DEFINIZIONE 1.4.2. Un morfismo di complessi $f: C_* \rightarrow D_*$ è detto un **quasi-isomorfismo** se $f: H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$ è un isomorfismo per ogni n .

Ogni isomorfismo di complessi è anche un quasi-isomorfismo, mentre il viceversa è generalmente falso.

DEFINIZIONE 1.4.3. Sia $C_* = \{\cdots C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \cdots\}$ un complesso. Un **sottocomplesso** $D_* \subseteq C_*$ è il dato di una successione di sottogruppi $D_n \subseteq C_n$ tali che $d(D_n) \subseteq D_{n-1}$ per ogni n .

Se $D_* \subseteq C_*$ è un sottocomplesso, l'inclusione $D_* \rightarrow C_*$ è un morfismo iniettivo di complessi. Bisogna fare *attenzione* al fatto che in generale i morfismi indotti in omologia $H_n(D_*) \rightarrow H_n(C_*)$ *non sono* iniettivi in generale. Similmente se $D_* \rightarrow E_*$ è un morfismo surgettivo di complessi, allora non è detto che i morfismi $H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*)$ siano surgettivi.

Sia $f: Y \rightarrow X$ un'applicazione continua, allora la composizione a sinistra con f definisce delle applicazioni tra gli insiemi di semplici singolari

$$f_*: \Delta(Y)_p \rightarrow \Delta(X)_p, \quad f_*(\phi) = f \circ \phi, \quad p \geq 0,$$

che si estendono per linearità ad omomorfismi di gruppi $f_*: S_p(Y) \rightarrow S_p(X)$.

L'associatività di \circ implica immediatamente che f_* commuta con le composizioni a destra, ossia che per ogni $h: \Delta^q \rightarrow \Delta^p$ continua si ha $f_*h_* = h_*f_*: \Delta(Y)_p \rightarrow \Delta(X)_q$. Questo vale in particolare se h è un'applicazione faccia e dunque $f_*\delta_i^* = \delta_i^*f_*$.

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Per ogni applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ gli omomorfismi $f_*: S_p(Y) \rightarrow S_p(X)$ commutano con i differenziali e quindi $f_*: S_*(Y) \rightarrow S_*(X)$ è un morfismo di complessi, che induce pertanto omomorfismi in omologia $f_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$, per ogni n .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che $f_*\delta_i^* = \delta_i^*f_*$ per ogni applicazione faccia δ_i , da cui segue

$$df_* = \sum_i (-1)^i \delta_i^* f_* = \sum_i (-1)^i f_* \delta_i^* = f_* d.$$

□

Chiosa notazionale. Con la scrittura $f_*: H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ si intende la collezione di tutti gli omomorfismi $f_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$. In particolare, scriveremo $f_* = g_*: H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ per indicare che $f_* = g_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$ per ogni n . Similmente diremo che $f_*: H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ è iniettiva (risp.: surgettiva, bigettiva, nulla) se lo stesso accade ad ogni $f_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$.

Dall'associatività del prodotto di composizione segue che se $f: Y \rightarrow X$ e $g: W \rightarrow Y$ sono applicazioni continue, allora

$$(fg)_* = f_*g_*: S_*(W) \rightarrow S_*(X)$$

ed a maggior ragione

$$(fg)_* = f_*g_*: H_*(W) \rightarrow H_*(X).$$

In particolare, ogni omeomorfismo induce un isomorfismo in omologia.

ESEMPIO 1.4.5. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi non vuoti e connessi per archi. Allora $f_*: H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ è un isomorfismo. Infatti, scelto un punto $c \in X$ abbiamo dimostrato nella Proposizione 1.3.7, che $H_0(X) = \mathbb{Z}c$, $H_0(Y) = \mathbb{Z}f(c)$ e quindi $f_*: H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ è un isomorfismo.

ESEMPIO 1.4.6. Siano A, B sottospazi connessi per archi di uno spazio topologico X e denotiamo con

$$i: A \cap B \rightarrow A, \quad j: A \cap B \rightarrow B,$$

i morfismi di inclusione. Allora $A \cap B$ è connesso per archi se e solo se l'omomorfismo

$$H_0(A \cap B) \xrightarrow{i_*+j_*} H_0(A) \oplus H_0(B)$$

è iniettivo.

Se $A \cap B = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare; se $A \cap B \neq \emptyset$ è connesso per archi, per l'esempio precedente l'applicazione $H_0 * (A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_0(A)$ è un isomorfismo e, a maggior ragione, $i_* + j_*$ è iniettiva.

Viceversa, se esistono $p, q \in A \cap B$ in diverse componenti connesse per archi, sempre per la Proposizione 1.3.7 lo zero ciclo $p - q$ non è nullo in $H_0(A \cap B)$, mentre si annullano entrambi i cicli $i_*(p - q) \in H_0(A)$ e $j_*(p - q) \in H_0(B)$.

COROLLARIO 1.4.7. *Sia Y un retratto di X , allora il morfismo di inclusione $i: Y \rightarrow X$ è iniettivo in omologia.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r: X \rightarrow Y$ una retrazione, ossia un'applicazione continua tale che $ri = \text{Id}_Y$. Allora $r_*i_* = \text{Id}: H_*(Y) \rightarrow H_*(Y)$ da cui segue che $i_*: H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ è iniettivo e $r_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ è surgettivo. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 1.9. Siano C_* un complesso e $D_* \subseteq C_*$ un sottocomplesso. Fissato n , sia $i: H_n(D_*) \rightarrow H_n(C_*)$ il morfismo indotto in omologia dall'inclusione di D_* in C_* . Dimostrare:

- (1) i è iniettivo se e solo se $Z_n(D_*) \cap B_n(C_*) \subseteq B_n(D_*)$;
- (2) i è surgettivo se e solo se $Z_n(C_*) = Z_n(D_*) + B_n(C_*)$.

Esplicitare un esempio in cui i non è né iniettiva né surgettiva.

1.5. Il numero di spire (winding number)

In questa sezione useremo alcune nozioni base della teoria dei rivestimenti per determinare un isomorfismo $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Ridimostreremo questo fatto in modo indipendente più avanti usando la successione esatta di Mayer–Vietoris. Per evitare possibili incomprensioni, chiariamo subito che $0 \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Più in generale, per quanto riguarda i gruppi $H_1(X)$ è utile tenere a mente le seguenti osservazioni.

1) Ogni 1-simplesso costante $\phi: \Delta^1 \rightarrow X$ è un bordo. Infatti se $\phi(t) = x$ per ogni t si ha $\phi = d\psi$, dove $\psi: \Delta^2 \rightarrow X$ è il simplesso costante $\psi(t) = x$.

2) Dato un 1-simplesso $\phi: \Delta^1 \rightarrow X$ definiamo $\bar{\phi}: \Delta^1 \rightarrow X$ come $\bar{\phi}(t_0, t_1) = \phi(t_1, t_0)$. Allora vale $\phi + \bar{\phi} \in B_1(X)$; infatti, considerando il 2-simplesso $\psi(t_0, t_1, t_2) = \phi(t_0 + t_2, t_1)$ si ha

$$d\psi(t_0, t_1) = \psi(0, t_0, t_1) - \psi(t_0, 0, t_1) + \psi(t_0, t_1, 0) = \phi(t_1, t_2) - \phi(1, 0) + \phi(t_0, t_1)$$

e per l'osservazione precedente $\phi(1, 0)$ è un bordo.

Diremo che una ciclo $a \in Z_1(X)$ è una collana di lunghezza n se si può scrivere

$$a = \phi_1 + \dots + \phi_n, \quad \phi_i: \Delta^1 \rightarrow X,$$

con $\phi_i(0, 1) = \phi_{i+1}(1, 0)$ per ogni $i = 1, \dots, n$, dove si intende $\phi_{n+1} = \phi_1$. Diremo che due cicli sono omologhi se la loro differenza è in bordo.

3) Ogni ciclo è omologo ad una somma finita di collane. Infatti, tenendo presente l'osservazione (2), ogni ciclo è omologo ad una somma di 1-simplessi $\phi_1 + \dots + \phi_n$. Per induzione su n basta dimostrare che esiste un'applicazione iniettiva $\alpha: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ con $k > 0$ e tale che $\phi_{\alpha(1)} + \dots + \phi_{\alpha(k)}$ sia una collana.

Dal fatto che $\phi_1 + \dots + \phi_n$ è un ciclo segue che per ogni i esiste j tale che $\phi_i(0, 1) = \phi_j(1, 0)$. Esiste quindi un'applicazione $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tale che $\alpha(0) = 1$ e $\phi_{\alpha(i)}(0, 1) = \phi_{\alpha(i+1)}(1, 0)$ per ogni i . Siccome α non è iniettiva esistono $a, b \in \mathbb{N}$, tali che $a < b$, $\alpha(a) = \alpha(b)$ e $\alpha: \{a, a+1, \dots, b-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ iniettiva. Ma allora $\phi_{\alpha(a)} + \phi_{\alpha(a+1)} + \dots + \phi_{\alpha(b-1)}$ è una collana.

4) Ogni collana è omologa ad una collana di lunghezza 1, ossia ad un simplesso $\phi: \Delta^1 \rightarrow X$ tale che $\phi(0, 1) = \phi(1, 0)$. Per induzione sulla lunghezza basta dimostrare che se $\phi_1, \phi_2: \Delta^1 \rightarrow X$ soddisfano la condizione $\phi_1(0, 1) = \phi_2(1, 0)$, allora esiste $\phi_3: \Delta^1 \rightarrow X$ tale che $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 \in B_1(X)$, $\phi_3(1, 0) = \phi_1(1, 0)$ e $\phi_3(0, 1) = \phi_2(0, 1)$. Considerando il 2-simplesso

$$\psi: \Delta^2 \rightarrow X, \quad \psi(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} \phi_1(t_0 - t_2, t_1 + 2t_2) & \text{se } t_0 \geq t_2, \\ \phi_2(t_1 + 2t_0, t_2 - t_0) & \text{se } t_0 \leq t_2, \end{cases}$$

per ogni $(t_0, t_1) \in \Delta^1$ si ha

$$\psi(0, t_0, t_1) = \phi_2(t_0, t_1), \quad \psi(t_0, t_1, 0) = \phi_1(t_0, t_1)$$

e quindi si può prendere

$$\phi_3(t_0, t_1) = \psi(t_0, 0, t_1) = \begin{cases} \phi_1(t_0 - t_1, 2t_1) & \text{se } t_0 \geq t_1, \\ \phi_2(2t_0, t_1 - t_0) & \text{se } t_0 \leq t_1. \end{cases}$$

5) Se X è connesso per archi allora ogni 1-ciclo è omologo ad una collana di lunghezza 1. Sia $a \in Z_1(X)$, per i punti precedenti a è omologo ad una somma di semplici $\phi_1 + \dots + \phi_n$ tali che $\phi_i(1, 0) = \phi_i(0, 1)$ per ogni i . Scegliamo un punto $x_0 \in X$ ed n semplici $\eta_i: \Delta^1 \rightarrow X$ tali che

$$\eta_i(1, 0) = x_0, \quad \eta_i(0, 1) = \phi_i(1, 0) = \phi_i(0, 1).$$

Allora

$$\eta_1 + \phi_1 + \overline{\eta_1} + \eta_2 + \phi_2 + \dots + \phi_n + \overline{\eta_n}$$

è una collana omologa ad a e si riapplica il precedente punto (4).

OSSERVAZIONE 1.5.1. Spingendosi oltre non è difficile dimostrare che se X è connesso per archi e $x_0 \in X$, l'applicazione che ad ogni $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ associa lo 1-simplesso $\gamma': \Delta^1 \rightarrow X$, $\gamma'(t_0, t_1) = \gamma(t_0)$ induce un omomorfismo surgettivo di gruppi $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ il cui nucleo è il sottogruppo generato dai commutatori $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Per maggiori dettagli e dimostrazioni complete rimandiamo a [11, 13, 33].

Consideriamo adesso la circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ assieme all'applicazione continua

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Tutto quello che ci serve dalla teoria dei rivestimenti è il seguente

LEMMA 1.5.2 (di sollevamento). *Per ogni semplice $\phi: \Delta^n \rightarrow S^1$, con $n = 1, 2$, esiste un'applicazione continua $\tilde{\phi}: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $p\tilde{\phi} = \phi$. Inoltre $\tilde{\phi}$ è unica a meno di traslazioni in \mathbb{R} per numeri interi. In particolare, per ogni coppia di vertici $e_i, e_j \in \Delta^n$, la differenza $\tilde{\phi}(e_i) - \tilde{\phi}(e_j)$ è indipendente dal sollevamento e dipende solo da ϕ .*

DIMOSTRAZIONE. Vedi ad esempio [38]. □

Il lemma di sollevamento permette di definire un omomorfismo di gruppi $\gamma: S_1(S^1) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ nel modo seguente. Data una catena $\sum_i a_i \phi_i$, con $\phi_i: \Delta^1 \rightarrow S^1$, prendiamo dei sollevamenti $\tilde{\phi}_i: \Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}$ e poniamo

$$\gamma\left(\sum_i a_i \phi_i\right) = \sum_i a_i (\tilde{\phi}_i(1, 0) - \tilde{\phi}_i(0, 1)).$$

Il fatto che ciascun $\tilde{\phi}_i$ sia definito a meno di traslazioni ci dice che γ è ben definito. Chiameremo $\gamma(a)$ il **numero di spire** della catena a .

TEOREMA 1.5.3. *Consideriamo l'omomorfismo di gruppi $\gamma: S_1(S^1) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ che ad ogni catena associa il suo numero di spire. Allora $\gamma(Z_1(S^1)) \subseteq \mathbb{Z}$, $\gamma(B_1(S^1)) = 0$ e la fattorizzazione al quoziente*

$$\gamma: H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Come primo passo dimostriamo che $B_1(S^1) \subseteq \ker \gamma$, ossia che $\gamma(d\psi) = 0$ per ogni $\psi: \Delta^2 \rightarrow S^1$. Preso un qualunque sollevamento $\tilde{\psi}: \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che $\delta_i^* \tilde{\psi}$ è un sollevamento di $\delta_i^* \psi$ per ogni $i = 0, 1, 2$ e quindi

$$\gamma\left(\sum_i (-1)^i \delta_i^* \psi\right) = \sum_i (-1)^i (\delta_i^* \tilde{\psi}(1, 0) - \delta_i^* \tilde{\psi}(0, 1)) = 0.$$

Proviamo adesso che se $a \in Z_1(S^1)$, allora $\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ e che se $\gamma(a) = 0$ allora $a \in B_1(S^1)$. Siccome abbiamo già provato che $B_1(S^1) \subseteq \ker \gamma$ non è restrittivo supporre $a = \phi$ per un semplice $\phi: \Delta^1 \rightarrow S^1$ tale che $\phi(0, 1) = \phi(1, 0)$. Ma allora per un qualunque sollevamento $\tilde{\phi}$ si ha $p(\tilde{\phi}(1, 0)) = p(\tilde{\phi}(0, 1))$ e questo è possibile solo se $\tilde{\phi}(1, 0) - \tilde{\phi}(0, 1) \in \mathbb{Z}$. Se $\gamma(\phi) = 0$ vuol dire che $\tilde{\phi}$ è un ciclo in \mathbb{R} , dunque è anche un bordo e componendo con p ne segue che anche ϕ è un cobordo.

In conclusione, abbiamo dimostrato che la restrizione di γ ai cicli induce un omomorfismo iniettivo $\gamma: H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$. Rimane da dimostrare che è anche surgettivo, ma questo è immediato

dato che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\gamma(p \circ \eta) = n$ dove $\eta: \Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}$ è un qualunque simpleso tale che $\eta(0, 1) = 0$ e $\eta(1, 0) = n$, ad esempio $\eta(t_0, t_1) = nt_0$. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 1.10. Sia n un intero fissato e consideriamo l'applicazione continua

$$f: S^1 \rightarrow S^1, \quad f(\cos(t), \sin(t)) = (\cos(nt), \sin(nt)).$$

Provare che l'applicazione indotta in omologia $f_*: H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1)$ è uguale alla moltiplicazione per n .

1.6. Invarianza omotopica

DEFINIZIONE 1.6.1. Una **omotopia** $T: C_* \rightarrow D_*[1]$, tra i complessi di catene C_*, D_* , è una successione $T = \{T_n\}$ di omomorfismi di gruppi

$$T_n: C_n \rightarrow D_{n+1}.$$

Come per i pre-morfismi, nella definizione di omotopia non si richiede alcuna regola di commutazione con i differenziali; il simbolo $[1]$ alla destra di D_* ha, per il momento, funzione puramente decorativa² e ci ricorda che gli omomorfismi dell'omotopia aumentano gli indici di 1.

DEFINIZIONE 1.6.2. Due morfismi di complessi $f, g: (C_*, d) \rightarrow (D_*, \delta)$ si dicono **omotopi** se esiste un'omotopia $T: C_* \rightarrow D_*[1]$ tale che

$$f - g = \delta T + Td, \text{ ossia } f_n - g_n = \delta T_n + T_{n-1}d \quad \forall n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f-g & & \downarrow f-g & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & D_n & \xrightarrow{\delta} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(Dotted arrows in the original image represent the mapping T from C_n to D_{n+1} and C_{n-1} to D_n , and the boundary maps δ and d .)

Per indicare che f, g sono omotopi scriveremo $f \sim g$; verifichiamo che si tratta di una relazione di equivalenza. Prendendo l'omotopia nulla si ottiene $f \sim f$; se $f - g = \delta T + Td$ allora ponendo $S_n = -T_n$ per ogni n si ha $g - f = \delta S + Sd$; se $f - g = \delta T + Td$ e $g - l = \delta S + Sd$, allora $f - l = \delta(S + T) + (S + T)d$.

Inoltre la relazione di omotopia commuta con il prodotto di composizione, nel senso che se $f, g: (C_*, d) \rightarrow (D_*, \delta)$ sono omotopi e $r, s: (D_*, \delta) \rightarrow (E_*, \rho)$ sono omotopi, allora rf è omotopo a sg .

LEMMA 1.6.3. *Due morfismi di complessi $f, g: C_* \rightarrow D_*$ omotopi inducono gli stessi morfismi in omologia $f_* = g_*: H_*(C_*) \rightarrow H_*(D_*)$.*

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che se $f \sim g$ e $x \in Z_n(C_*)$, allora $f(x) - g(x) \in B_n(D_*)$. Sia $T: C_* \rightarrow D_*[1]$ una omotopia tra f e g , siccome $dx = 0$ si ha

$$f(x) - g(x) = \delta T(x) + Td(x) = \delta T(x) \in \delta(D_{n+1}) = B_n(D_*).$$

\square

DEFINIZIONE 1.6.4. Un morfismo di complessi $f: C_* \rightarrow D_*$ si dice un'**equivalenza omotopica** se esiste un morfismo di complessi $g: D_* \rightarrow C_*$ tale che la composizione $gf: C_* \rightarrow C_*$ è omotopa all'identità su C_* e $fg: D_* \rightarrow D_*$ è omotopa all'identità su D_* .

LEMMA 1.6.5. *Le equivalenze omotopiche sono quasi-isomorfismi.*

²In realtà ci sono motivazioni più profonde, che risultano però estranee al contesto di queste note.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: C_* \rightarrow D_*$ un'equivalenza omotopica. Per definizione esiste un morfismo di complessi $g: D_* \rightarrow C_*$ tale che $gf \sim \text{Id}$ e $fg \sim \text{Id}$. Per ogni n abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_*) & \xrightarrow{f} & H_n(D_*) \\ gf \downarrow & \swarrow g & \downarrow fg \\ H_n(C_*) & \xrightarrow{f} & H_n(D_*) \end{array}$$

e per il lemma precedente le due frecce verticali sono le identità. Dunque, in omologia, f e g sono isomorfismi ed uno l'inverso dell'altro. \square

Avvisiamo il lettore che il viceversa del lemma precedente non vale, ossia che non tutti i quasi-isomorfismi sono equivalenze omotopiche; per possibili controesempi vedi Esercizio 1.11.

Dimostriamo adesso, seguendo nella sostanza [5], che applicazioni continue omotope inducono morfismi omotopi tra i corrispondenti complessi di catene singolari.

DEFINIZIONE 1.6.6. Sia C uno spazio topologico fissato. Data una successione di catene singolari

$$f = (f_0, f_1, \dots) \in \prod_{p=0}^{\infty} S_p(C \times \Delta^p), \quad f_p \in S_p(C \times \Delta^p),$$

possiamo associare, per ogni spazio topologico X , il pre-morfismo di complessi

$$f_X: S_*(X) \rightarrow S_*(C \times X)$$

che nel semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ vale

$$f_X(\phi) = (\text{Id}_C \times \phi)_*(f_p).$$

La costruzione nella Definizione 1.6.6 è funtoriale in X ; con questo si intende che per ogni $f \in \prod_p S_p(C \times \Delta^p)$ e per ogni applicazione continua $h: X \rightarrow Y$ si ha $f_Y h_* = (\text{Id}_C \times h)_* f_X$. Infatti, per ogni semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si ha

$$f_Y h_*(\phi) = f_Y(h\phi) = (\text{Id}_C \times h\phi)_*(f_p) = (\text{Id}_C \times h)_*(\text{Id}_C \times \phi)_*(f_p) = (\text{Id}_C \times h)_* f_X(\phi).$$

Nella Definizione 1.2.4, per ogni spazio topologico C abbiamo definito gli omomorfismi di gruppi

$$\delta_C = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\text{Id}_C \times \delta_i)_*: S_p(C \times \Delta^{q-1}) \rightarrow S_p(C \times \Delta^q), \quad p, q \geq 0,$$

scritti semplicemente δ quando C è formato da un solo punto. Per la Proposizione 1.4.4 ciascun

$$(\text{Id}_C \times \delta_i)_*: S_*(C \times \Delta^{q-1}) \rightarrow S_*(C \times \Delta^q)$$

è un morfismo di complessi; ne segue che anche ogni $\delta_C: S_*(C \times \Delta^{q-1}) \rightarrow S_*(C \times \Delta^q)$ è un morfismo di complessi e quindi $d\delta_C = \delta_C d$.

DEFINIZIONE 1.6.7. Definiamo il gruppo dei **cicli naturali**

$$\mathcal{N} \subseteq \prod_{p=0}^{\infty} S_p(\Delta^p)$$

come il sottogruppo formato da tutte le successioni $a = (a_0, a_1, \dots)$ tali che

$$\delta a_{p-1} = da_p \in S_{p-1}(\Delta^p), \quad \text{per ogni } p > 0,$$

vedi Figura 1.1; da ricordare che la condizione $da_0 = 0$ è sempre soddisfatta. Ad esempio, se $\iota_p: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ è l'identità, allora $\delta_i \iota_{p-1} = \iota_p \delta_i$ per ogni $p > 0$, $i = 0, \dots, p$ e quindi $(\iota_0, \iota_1, \dots) \in \mathcal{N}$.

Più in generale, per ogni spazio topologico non vuoto C , definiamo

$$\mathcal{N}(C) \subseteq \prod_{p=0}^{\infty} S_p(C \times \Delta^p)$$

come il sottogruppo formato da tutte le successioni $a = (a_0, a_1, \dots)$ tali che

$$\delta_C a_{p-1} = da_p \in S_{p-1}(C \times \Delta^p)$$

per ogni $p > 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 \in S_0(\Delta^0) & \xrightarrow{\delta} & S_0(\Delta^1) & & \\
& & \uparrow d & & \\
& & a_1 \in S_1(\Delta^1) & \xrightarrow{\delta} & S_1(\Delta^2) \\
& & & & \uparrow d \\
& & & & a_2 \in S_2(\Delta^2) & \xrightarrow{\delta} & S_2(\Delta^3) \\
& & & & & & \uparrow \text{ecc.}
\end{array}$$

FIGURA 1.1. Diagramma dei cicli naturali

Quando $C = \{pt\}$ è formato da un solo punto, identificheremo $C \times X$ con X nella maniera ovvia $(pt, x) = x$; di conseguenza $\mathcal{N}(pt) = \mathcal{N}$. I prossimi due esempi descrivono due procedure standard per la costruzione di cicli naturali.

ESEMPIO 1.6.8. Esiste una inclusione insiemistica naturale $C \subseteq \mathcal{N}(C)$ ottenuta identificando ogni punto $c \in C$ con la successione di semplici singolari

$$c = (c_0, c_1, \dots), \quad c_p: \Delta^p \rightarrow C \times \Delta^p, \quad c_p(t) = (c, t).$$

Fissato $c \in C$, per ogni spazio topologico X , il pre-morfismo di complessi $c_X: S_*(X) \rightarrow S_*(C \times X)$ coincide con il morfismo indotto dall'applicazione continua

$$X \rightarrow C \times X, \quad x \mapsto (c, x).$$

ESEMPIO 1.6.9. Ad ogni successione

$$T = (T_0, T_1, \dots) \in \prod_{p=0}^{\infty} S_{p+1}(C \times \Delta^p), \quad T_p \in S_{p+1}(C \times \Delta^p),$$

possiamo associare il ciclo naturale

$$(dT_0, dT_1 + \delta_C T_0, \dots, dT_n + \delta_C T_{n-1}, \dots) \in \mathcal{N}(C).$$

Infatti, siccome $d^2 = 0$, $\delta_C^2 = 0$ e $d\delta_C = \delta_C d$, per ogni $p > 0$ si ha

$$d(dT_p + \delta_C T_{p-1}) = d\delta_C T_{p-1} = \delta_C dT_{p-1} = \delta_C (dT_{p-1} + \delta_C T_{p-2}).$$

LEMMA 1.6.10. Nelle notazioni precedenti, se $f \in \mathcal{N}(C)$, allora

$$f_X: S_*(X) \rightarrow S_*(C \times X)$$

è un morfismo di complessi.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si ha

$$\begin{aligned}
f_X(d\phi) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i f_X(\phi \delta_i) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\text{Id}_C \times \phi)_* (\text{Id}_C \times \delta_i)_* (a_{p-1}) \\
&= (\text{Id}_C \times \phi)_* \delta_C (a_{p-1}) = (\text{Id}_C \times \phi)_* (da_p) = df_X(\phi),
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che $(\text{Id}_C \times \phi)_*$ è un morfismo di complessi. \square

Osserviamo che ogni $f \in \mathcal{N}(C)$ è univocamente determinato dai morfismi f_X : infatti, se ι_p è l'identità su Δ^p , allora $f_p = f_{\Delta^p}(\iota_p)$. Come abbiamo visto nei commenti alla Definizione 1.6.6, per ogni applicazione continua $g: X \rightarrow Y$ si ha $f_Y g_* = (\text{Id}_C \times g)_* f_X$.

Dimostriamo adesso un risultato che si colloca, come caso molto particolare, all'interno del cosiddetto *metodo dei modelli aciclici* di Eilenberg–MacLane.

TEOREMA 1.6.11 (dei modelli aciclici, versione baby). *Siano C uno spazio topologico tale che $H_p(C \times \Delta^p) = 0$ per ogni $p > 0$ e $f, g \in \mathcal{N}(C)$ tali che $[f_0] = [g_0] \in H_0(C \times \Delta^0)$. Allora per ogni spazio topologico X i due morfismi di complessi f_X, g_X sono omotopi.*

Inoltre, se denotiamo con $\pi: C \times X \rightarrow X$ la proiezione sul secondo fattore, è possibile scegliere un'omotopia $T_X: S_*(X) \rightarrow S_*(C \times X)[1]$ tra f_X e g_X tale che per ogni semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si abbia

$$T_X(\phi) = \sum_i a_i \phi_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad \phi_i: \Delta^{p+1} \rightarrow C \times X,$$

con l'immagine di ciascun semplice $\pi\phi_i$ contenuta nell'immagine di ϕ .

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo ricorsivamente una successione $T_p \in S_{p+1}(C \times \Delta^p)$, $p \geq 0$, tale che

$$(1.5) \quad dT_0 = f_0, \quad dT_n + \delta_C T_{n-1} = f_n, \quad n > 0.$$

Siccome $f_0 - g_0$ è un bordo scegliamo $T_0 \in S_1(C \times \Delta^0)$ tale che $dT_0 = f_0 - g_0$. Supponiamo adesso $p > 0$, di aver definito T_0, \dots, T_{p-1} che soddisfano (1.5) per ogni $0 \leq n < p$, e verifichiamo che $f_p - g_p - \delta_C T_{p-1} \in S_p(C \times \Delta^p)$ è un ciclo. Ricordando che $d\delta_C = \delta_C d$ e $\delta_C \delta_C = 0$ si ha

$$\begin{aligned} d(f_p - g_p - \delta_C T_{p-1}) &= df_p - dg_p - \delta_C dT_{p-1} \\ &= \delta_C f_{p-1} - \delta_C f_{p-1} - \delta_C (f_{p-1} - g_{p-1} - \delta_C T_{p-2}) = \delta_C^2 T_{p-2} = 0. \end{aligned}$$

Per ipotesi $H_p(C \times \Delta^p) = 0$ e possiamo scegliere $T_p \in S_{p+1}(C \times \Delta^p)$ tale che $dT_p = f_p - g_p - \delta_C T_{p-1}$.

Usiamo la successione $T = (T_0, T_1, \dots)$ per definire, come nella Definizione 1.6.6, l'omotopia $T_X: S_*(X) \rightarrow S_*(C \times X)[1]$, per ogni spazio topologico X , ossia definendo

$$T_X(\phi) = (\text{Id}_C \times \phi_*)(T_p), \quad \text{per ogni semplice } \phi: \Delta^p \rightarrow X,$$

ed estendendo per linearità. Per ogni $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si ha

$$\begin{aligned} dT_X(\phi) &= d(\text{Id}_C \times \phi)_*(T_p) = (\text{Id}_C \times \phi)_*(dT_p) = (\text{Id}_C \times \phi)_*(f_p - \delta_C T_{p-1}) \\ &= f_X(\phi) - (\text{Id} \times \phi)_* \delta_C T_{p-1}, \end{aligned}$$

$$T_X(d\phi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\text{Id} \times \phi \delta_i)_*(T_{p-1}) = (\text{Id}_C \times \phi)_* \delta_C (T_{p-1})$$

e quindi $f_X = dT_X + T_X d$.

Se $T_p = \sum_i a_i \psi_i$, con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\psi_i: \Delta^{p+1} \rightarrow C \times X$, allora per ogni semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ si ha

$$T_X(\phi) = \sum_i a_i (\text{Id}_C \times \phi) \psi_i = \sum_i a_i \phi_i, \quad \phi_i = (\text{Id}_C \times \phi) \psi_i,$$

ed è evidente che l'immagine di ogni semplice $\pi\phi_i = \pi(\text{Id}_C \times \phi)\psi_i$ è contenuta nell'immagine di ϕ . \square

Le stesse considerazioni fatte per i pre-morfismi f_X ci dicono che le omotopie T_X costruite nel Teorema 1.6.11 sono functoriali in X , ossia che per ogni applicazione continua $h: X \rightarrow Y$ vale la relazione $T_Y h_* = (\text{Id}_C \times h)_* T_X$.

COROLLARIO 1.6.12 (invarianza omotopica). *Siano $f, g: X \rightarrow Y$ applicazioni continue omotopiche. Allora i due morfismi di complessi $f_*, g_*: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ sono omotopi e quindi $f_* = g_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ una omotopia tra f e g , ossia $f = F \circ i_0$ e $g = F \circ i_1$, dove $i_0(x) = (0, x)$ e $i_1(x) = (1, x)$. Dato che $[0, 1] \times \Delta^p$ è un convesso di \mathbb{R}^{p+2} si ha $H_p([0, 1] \times \Delta^p) = 0$ per ogni $p > 0$. Per l'Esempio 1.6.8 ed il Teorema 1.6.11 i due morfismi di complessi $(i_0)_*, (i_1)_*$ sono omotopi. Dato che l'omotopia è preservata per composizione, anche i morfismi di complessi $f_* = F_*(i_0)_*$ e $g_* = F_*(i_1)_*$ sono omotopi. \square

Ricordiamo che un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ si dice una **equivalenza omotopica** se esiste un'applicazione continua $g: Y \rightarrow X$ tale che entrambe le composizioni gf e fg sono omotope alle identità, su X ed Y rispettivamente.

COROLLARIO 1.6.13. *Se $f: X \rightarrow Y$ è una equivalenza omotopica allora $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $g: Y \rightarrow X$ tale che entrambe le composizioni gf e fg siano omotope alle identità. Ma allora entrambe le composizioni $g_* f_*$ e $f_* g_*$ sono uguali alle identità, su $H_*(X)$ ed $H_*(Y)$ rispettivamente, e cioè f_* è bigettiva con inversa g_* . \square

COROLLARIO 1.6.14. *Sia X uno spazio contraibile, ossia tale che l'applicazione $X \rightarrow \{pt\}$ è una equivalenza omotopica, allora*

$$H_n(X) = H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } n = 0, \\ 0 & \text{per } n \neq 0. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.6.15. Un sottospazio Y di uno spazio topologico X si dice un **retrato per deformazione** se esiste un'applicazione continua $R: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che:

- (1) $R(x, 0) = x$ e $R(x, 1) \in Y$ per ogni $x \in X$;
- (2) $R(y, t) = y$ per ogni $y \in Y$ e $t \in [0, 1]$.

Ad esempio, la sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$; basta ad esempio considerare l'applicazione

$$R(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \in [0, 1].$$

COROLLARIO 1.6.16. *Se $Y \subseteq X$ è un retratto per deformazione, l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica e quindi un isomorfismo in omologia.*

Esercizi.

ESERCIZIO 1.11. Mostrare che il complesso

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

è quasi-isomorfo ma non omotopicamente equivalente al complesso nullo (con tutti i gruppi uguali a 0). Provare che lo stesso vale per il complesso di catene C_* in cui $C_n = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ ed i differenziali $C_n \rightarrow C_{n-1}$ sono tutti uguali alla moltiplicazione per 2 modulo 4.

1.7. Suddivisioni baricentriche e catene piccole

Siano X uno spazio topologico, denotiamo con $\mathcal{P}(X)$ la collezione dei suoi sottoinsiemi (insieme delle parti) e prendiamo una qualunque sottofamiglia $\mathcal{U} = \{X_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Possiamo allora definire il sottocomplesso $S_*(\mathcal{U}) \subseteq S_*(X)$ come quello generato da tutti i semplici singolari la cui immagine è interamente contenuta in un sottoinsieme X_i , per almeno un indice i . Che si tratti di un sottocomplesso, ossia che $dS_p(\mathcal{U}) \subseteq S_{p-1}(\mathcal{U})$ è chiaro; infatti per ogni semplice $\phi: D^p \rightarrow X$, il suo differenziale $d\phi$ è una combinazione lineare dei semplici $\phi\delta_i$, ciascuno dei quali ha immagine contenuta nell'immagine di ϕ .

Obiettivo di questa sezione è confrontare l'omologia del sottocomplesso $S_*(\mathcal{U})$ con l'omologia di X quando \mathcal{U} è un ricoprimento aperto di X . Per fare questo dobbiamo introdurre il cosiddetto operatore di suddivisione baricentrica.

Un po' di notazioni: per ogni intero $p \geq 0$ denotiamo con $[p]$ l'insieme $\{0, \dots, p\}$ e con $\mathbb{S}[p]$ il gruppo delle sue permutazioni.

Per ogni $\eta \in \mathbb{S}[p]$ denotiamo con $D_\eta: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ l'applicazione affine che sui vertici di Δ^p , ossia sulla base canonica e_0, \dots, e_p di \mathbb{R}^{p+1} , vale

$$D_\eta(e_i) = \frac{1}{p-i+1} \sum_{j \geq i} e_{\eta(j)} = \frac{e_{\eta(i)} + e_{\eta(i+1)} + \dots + e_{\eta(p)}}{p-i+1}.$$

Geometricamente, $D_\eta(e_0)$ è il baricentro di Δ^p (non dipende da η), mentre $D_\eta(e_i)$ è il baricentro del semplice di vertici $e_{\eta(i)}, \dots, e_{\eta(p)}$.

Ogni punto di Δ^p appartiene all'immagine di D_η per qualche $\eta \in \mathbb{S}[p]$. Infatti, se $u = (t_0, \dots, t_p) \in \Delta^p$ possiamo trovare una permutazione η tale che

$$t_{\eta(0)} \leq t_{\eta(1)} \leq \dots \leq t_{\eta(p)},$$

ed è chiaro che tale permutazione è unica se e solo se $t_i \neq t_j$ per ogni $i \neq j$. Ma allora

$$u = \sum_{i=0}^p t_{\eta(i)} e_{\eta(i)} = t_{\eta(0)} \sum_{j \geq 0} e_{\eta(j)} + \sum_{i=1}^p (t_{\eta(i)} - t_{\eta(i-1)}) \sum_{j \geq i} e_{\eta(j)} \in D_\eta(\Delta^p).$$

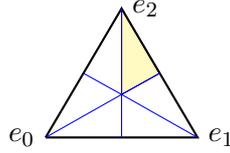


FIGURA 1.2. Suddivisione baricentrica di Δ^2 nelle sue $6 = (2 + 1)!$ camere; in giallo sbiadito quella corrispondente alla permutazione identica.

Talvolta, la rappresentazione del semplice standard come unione delle immagini delle applicazioni D_η viene detta “decomposizione in camere”.

Se il lettore desidera sapere (ma non è essenziale) come si scrive D_η nelle coordinate t_0, \dots, t_p , può provare per esercizio che

$$D_\eta(t_0, \dots, t_p) = (u_0, \dots, u_p), \quad \text{dove} \quad u_i = \sum_{j=0}^{\eta^{-1}(i)} \frac{t_j}{p-j+1}.$$

Nel seguito, a seconda delle circostanze e delle convenienze, penseremo D_η sia come la restrizione a Δ^p di un’applicazione affine $\mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$, sia come un semplice singolare $D_\eta \in \Delta(\Delta^p)_p$.

DEFINIZIONE 1.7.1. Per ogni spazio topologico X , denotiamo con $b_X: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ il pre-morfismo di complessi, detto **suddivisione baricentrica**, che sul p -simpleso singolare $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ vale

$$b_X(\phi) = \sum_{\eta \in \mathbb{S}[p]} (-1)^\eta \phi \circ D_\eta,$$

e poi esteso per linearità.

Se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$, le stesse considerazioni che ci hanno portato a dire che $S_*(\mathcal{U})$ è un sottocomplesso ci dicono anche che $b_X(S_*(\mathcal{U})) \subseteq S_*(\mathcal{U})$.

È chiaro che b_X è l’identità su gruppo delle 0-catene $S_0(X)$, mentre dalle osservazioni sugli 1-cicli fatte nella Sezione 1.5 segue facilmente che per ogni semplice $\phi: \Delta^1 \rightarrow X$, la differenza $\phi - b_X(\phi)$ è un bordo, e più precisamente una combinazione lineare di tre differenziali di 2-simplessi; a maggior ragione $a - b_X(a) \in B_1(X)$ per ogni $a \in Z_1(X)$. Siamo quindi già in grado di poter affermare che b_X è l’identità sia in $H_0(X)$ che in $H_1(X)$.

TEOREMA 1.7.2. Per ogni spazio X , la suddivisione baricentrica $b_X: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ è un morfismo di complessi omotopo all’identità tramite un’omotopia $T_X: S_*(X) \rightarrow S_*(X)[1]$ tale che $T_X(S_*(\mathcal{U})) \subseteq S_*(\mathcal{U})[1]$ per ogni $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. L’applicazione b_X è un pre-morfismo di complessi ottenuto come nella Definizione 1.6.6 partendo dalla successione

$$b = (b_0, b_1, \dots) \in \prod_{p=0}^{\infty} S_p(\Delta^p), \quad b_p = \sum_{\eta \in \mathbb{S}[p]} (-1)^\eta D_\eta.$$

Siccome $b_0 = \text{Id}$, per il Teorema 1.6.11 ci basta dimostrare che b è un ciclo naturale. Fissiamo dunque un intero positivo p e proviamo l’uguaglianza $\delta b_{p-1} = db_p$.

Come primo passo dimostriamo che per ogni $h = 1, \dots, p$ si ha $\delta_h^* b_p = 0$, e quindi $db_p = \delta_0^* b_p$. Denotiamo con $\tau \in \mathbb{S}[p]$ la trasposizione che scambia h con $h-1$. Siccome $b_p = \sum_{\eta} (D_\eta - D_{\eta\tau})$, con la sommatoria fatta sull’insieme delle permutazioni pari, per dimostrare che $\delta_h^* b_p = 0$ ci basta provare che per ogni $\eta \in \mathbb{S}[p]$ si ha

$$D_\eta \circ \delta_h = D_{\eta\tau} \circ \delta_h.$$

Guardiamo cosa succede nei vertici di Δ^p : poiché

$$e_{\eta(h-1)} + e_{\eta(h)} = e_{\eta\tau(h-1)} + e_{\eta\tau(h)}, \quad e_{\eta(i)} = e_{\eta\tau(i)}, \quad i \neq h, h-1,$$

per $i < h$ abbiamo

$$D_\eta \circ \delta_h(e_i) = D_\eta(e_i) = \frac{1}{p-i+1} \sum_{j \geq i} e_{\eta(j)} = \frac{1}{p-i+1} \sum_{j \geq i} e_{\eta\tau(j)} = D_{\eta\tau} \circ \delta_h(e_i),$$

mentre per $i \geq h$

$$D_\eta \circ \delta_h(e_i) = D_\eta(e_{i+1}) = \frac{1}{p-i} \sum_{j \geq i+1} e_{\eta(j)} = \frac{1}{p-i} \sum_{j \geq i+1} e_{\eta\tau(j)} = D_{\eta\tau} \circ \delta_h(e_i).$$

Come secondo passo dimostriamo l'uguaglianza $\delta_0^* b_p = \delta b_{p-1}$. Denotiamo con \mathcal{I} l'insieme di tutte le applicazioni iniettive $f: [p-1] \rightarrow [p]$ e $\mathcal{D} = \{\partial_0, \dots, \partial_p\} \subseteq \mathcal{I}$, dove

$$\partial_h(i) = \begin{cases} i & \text{se } i < h \\ i+1 & \text{se } i \geq h. \end{cases}$$

È utile generalizzare la costruzione delle applicazioni D_η nel modo seguente: per ogni applicazione $f: [q] \rightarrow [p]$ definiamo $R_f, D_f: \Delta^q \rightarrow \Delta^p$ come le applicazioni affini che sui vertici del semplice Δ^q valgono

$$R_f(e_i) = e_{f(i)}, \quad D_f(e_i) = \frac{1}{q-i+1} \sum_{j=i}^q e_{f(j)}, \quad i = 0, \dots, q.$$

In particolare, ritroviamo le applicazioni faccia come $\delta_i = R_{\partial_i}$. Date $f: [p] \rightarrow [q]$ e $g: [q] \rightarrow [r]$ iniettive si ha $D_{gf} = R_g D_f$. Dunque, per ogni $\mu \in \mathbb{S}[p-1]$ si ha

$$\delta D_\mu = \sum_{i=0}^p (-1)^i R_{\partial_i} D_\mu = \sum_{i=0}^p (-1)^i D_{\partial_i \mu}.$$

Consideriamo le due applicazioni bigettive

$$\mathcal{D} \times \mathbb{S}[p-1] \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{S}[p],$$

con la prima data dal prodotto di composizione $(\partial_h, \mu) \mapsto \partial_h \mu$ e $\alpha(f)$ uguale all'unica permutazione tale che $\alpha(f)(i+1) = f(i)$ per ogni $i = 0, \dots, p-1$. Per ogni $\tau \in \mathbb{S}[p-1]$ ed ogni $h = 0, \dots, p$ si ha

$$\alpha(\partial_h \tau)(0) = h, \quad (-1)^{\alpha(\partial_h \tau)} = (-1)^h (-1)^\tau.$$

Sia $\eta \in \mathbb{S}[p]$ e guardiamo come si comporta l'applicazione affine $\delta_0^*(D_\eta) = D_\eta R_{\partial_0}: \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$ nei vertici del semplice.

$$D_\eta R_{\partial_0}(e_i) = D_\eta(e_{i+1}) = \frac{1}{p-i} \sum_{j \geq i+1} e_{\eta(j)}, \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Quindi $\delta_0^*(D_\eta) = D_f$, dove

$$f: [p-1] \rightarrow [p], \quad f(i) = \eta(i+1) \iff \eta = \alpha(f).$$

Possiamo quindi scrivere

$$db_p = \delta_0^* b_p = \sum_{f \in \mathcal{I}} (-1)^{\alpha(f)} \delta_0^*(D_{\alpha(f)}) = \sum_{\mu \in \mathbb{S}[p-1]} (-1)^\mu \sum_{h=0}^p (-1)^h D_{\partial_h \mu} = \delta b_{p-1}.$$

□

Ricordiamo che il diametro di un sottospazio compatto C di uno spazio metrico (X, d) è, per definizione, il massimo della funzione continua $C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$. Il secondo obiettivo di questa sezione è dimostrare che il diametro dell'immagine dell'applicazione composta $D_{\eta_1} \cdots D_{\eta_n}: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ tende a 0 per n che tende all'infinito. Più precisamente, dimostreremo il seguente risultato.

TEOREMA 1.7.3. *Per ogni $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{S}[p]$, il diametro dell'immagine dell'applicazione composta $D_{\eta_1} \cdots D_{\eta_n}: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ è, nella distanza euclidea, minore o uguale a $\sqrt{2} \left(\frac{p}{p+1} \right)^n$.*

Premettiamo alla dimostrazione alcuni lemmi, nei quali tutti i diametri sono calcolati rispetto alla distanza indotta dalla norma euclidea $\|\cdot\|$.

LEMMA 1.7.4. *Per ogni $x_0, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ il diametro dell'involuppo convesso di x_0, \dots, x_p è uguale a*

$$\text{Diam}(\text{Conv}(x_0, \dots, x_p)) = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta provare la disuguaglianza \leq , ossia che per ogni $z = \sum s_i x_i$, $y = \sum t_i x_i \in \text{Conv}(x_0, \dots, x_p)$ si ha $\|z - y\| \leq \max_{i,j} \|x_i - x_j\|$. Per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|z - y\| = \left\| \sum t_i (z - x_i) \right\| \leq \sum t_i \|z - x_i\| \leq \max_i \|z - x_i\|.$$

Prendiamo adesso un indice i tale che $\|z - y\| \leq \|z - x_i\|$, allora

$$\|z - y\| \leq \|z - x_i\| = \left\| \sum s_j (x_j - x_i) \right\| \leq \sum s_j \|x_j - x_i\| \leq \max_j \|x_j - x_i\|.$$

□

LEMMA 1.7.5. *Dati $p + 1$ vettori $y_1, \dots, y_{p+1} \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\max_{i,j} \left\| \frac{1}{i} \sum_{h=1}^i y_h - \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j y_k \right\| \leq \frac{p}{p+1} \max_{i,j} \|y_i - y_j\|,$$

dove in entrambi i massimi gli indici i, j variano nell'insieme $\{1, \dots, p+1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo due indici $1 \leq i \leq j \leq p+1$ e proviamo la disuguaglianza

$$\left\| \frac{1}{i} \sum_{h=1}^i y_h - \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j y_k \right\| \leq \frac{p}{p+1} \max_{h,k} \|y_h - y_k\|.$$

Scriviamo

$$\frac{1}{i} \sum_{h=1}^i y_h - \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j y_k = \frac{1}{ij} \sum_{h=1}^i \sum_{k=1}^j (y_h - y_k)$$

e osserviamo che si annullano gli i addendi in cui $h = k$. Per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{i} \sum_{h=1}^i y_h - \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j y_k \right\| &\leq \frac{ij - i}{ij} \max_{h,k} \|y_h - y_k\| \\ &\leq \frac{j-1}{j} \max_{h,k} \|y_h - y_k\| \leq \frac{p}{p+1} \max_{h,k} \|y_h - y_k\|. \end{aligned}$$

Notiamo che vale l'uguaglianza quando $y_h = y_k$ per ogni $h, k > 1$. □

LEMMA 1.7.6. *Siano $f: \Delta^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione affine e $\eta \in \mathbb{S}[p]$. Allora*

$$\text{Diam}(fD_\eta(\Delta^p)) \leq \frac{p}{p+1} \text{Diam}(f(\Delta^p)).$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $fD_\eta(\Delta^p)$ è l'involuppo convesso di $fD_\eta(e_0), \dots, fD_\eta(e_p)$, per il Lemma 1.7.4 si ha

$$\text{Diam}(fD_\eta(\Delta^p)) = \max_{i,j} \|fD_\eta(e_i) - fD_\eta(e_j)\|$$

e basta quindi dimostrare che per ogni $i > j$ vale

$$\|fD_\eta(e_i) - fD_\eta(e_j)\| \leq \frac{p}{p+1} \max_{h,k} \|f(e_h) - f(e_k)\|.$$

Siccome f è affine si ha

$$fD_\eta(e_i) = \frac{1}{p-i+1} \sum_{h=i}^p f(e_{\eta(h)}),$$

idem per $fD_\eta(e_j)$, e si applica il Lemma 1.7.5 alla successione di punti $y_h = f(e_{\eta(p-h+1)})$, $h = 1, \dots, p+1$. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.7.3. Ragioniamo per induzione su n , con il caso $n = 0$ vero in quanto $\text{Diam}(\Delta^p) = \max_{i,j} \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$.

Se $n > 0$, possiamo scrivere $D_{\eta_1} \cdots D_{\eta_n} = fD_{\eta_n}$, dove f è l'applicazione affine $D_{\eta_1} \cdots D_{\eta_{n-1}}$. Per l'ipotesi induttiva $\text{Diam}(f(\Delta^p)) \leq \sqrt{2}(p/(p+1))^{n-1}$ e basta applicare il Lemma 1.7.6. □

LEMMA 1.7.7. *Sia $\mathcal{U} = \{X_i\}$ una famiglia di sottoinsiemi di X e sia assuma che le parti interne $U_i := X_i^\circ$ siano un ricoprimento aperto di X . Allora per ogni $a \in S_p(X)$ esiste un intero $n \geq 0$, dipendente da a , tale che $b_X^n(a) \in S_*(\mathcal{U})$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo prima il caso in cui $a = \phi: \Delta^p \rightarrow X$ è un simpleso singolare. Le controimmagini $V_i := \phi^{-1}(U_i)$ formano un ricoprimento aperto dello spazio metrico compatto Δ^p . Per il teorema del numero di Lebesgue esiste $\epsilon > 0$ tale che ogni chiuso in Δ^p di diametro $< \epsilon$ è contenuto in qualche V_i . Per ogni intero n tale che $\left(\frac{p}{p+1}\right)^n \sqrt{2} < \epsilon$, per il Teorema 1.7.3 l'immagine di ogni applicazione $D_{\eta_1} D_{\eta_2} \cdots D_{\eta_n}: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ è contenuta in qualche V_i , che equivale a dire che l'immagine di $\phi D_{\eta_1} D_{\eta_2} \cdots D_{\eta_n}$ è contenuta in qualche U_i . Dato che la catena $b_X^n(\phi)$ è una combinazione lineare finita di semplici del tipo $\phi D_{\eta_1} D_{\eta_2} \cdots D_{\eta_n}$ si ha $b_X^n(\phi) \in S_*(\mathcal{U})$.

In generale, se $a = \sum_{i=1}^r a_i \phi_i$, abbiamo visto che per n sufficientemente grande $b_X^n(\phi_i) \in S_*(\mathcal{U})$ per ogni i e quindi $b_X^n(a) \in S_*(\mathcal{U})$. \square

Quando la famiglia $\mathcal{U} = \{X_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ soddisfa le condizioni del Lemma 1.7.7, ossia $X = \cup_i X_i^\circ$, chiameremo $S_*(\mathcal{U})$ sottocomplesso delle **catene piccole** (relativamente ad \mathcal{U} : non esistono catene piccole in senso assoluto!).

TEOREMA 1.7.8 (delle catene piccole). *Sia \mathcal{U} una famiglia di sottoinsiemi di X le cui parti interne formano un ricoprimento aperto di X . Allora l'inclusione di complessi $i: S_*(\mathcal{U}) \hookrightarrow S_*(X)$ è un quasi-isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $p \geq 0$, dobbiamo dimostrare che il morfismo indotto in omologia $i: H_p(S_*(\mathcal{U})) \rightarrow H_p(X)$ è iniettivo e surgettivo.

Abbiamo dimostrato che l'operatore di suddivisione baricentrica $b_X: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ è un morfismo di complessi omotopo all'identità, e quindi che induce l'identità in omologia. Abbiamo anche visto che esiste un'omotopia T_X tra b_X e l'identità tale che $T_X(S_*(\mathcal{U})) \subseteq S_*(\mathcal{U})[1]$. Ne consegue che anche $b_X: S_*(\mathcal{U}) \rightarrow S_*(\mathcal{U})$ induce l'identità in omologia.

Surgettività. Sia $[a] \in H_p(X)$ rappresentata da un ciclo $a \in Z_p(S_*(X))$; prendendo una opportuna potenza $f = b_X^n$ del morfismo di suddivisione baricentrica, abbiamo un morfismo di complessi $f: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ che induce l'identità in omologia, ossia $[a] = [f(a)]$ e tale che $f(a) \in S_*(\mathcal{U})$.

Iniettività. Sia $a \in Z_p(S_*(\mathcal{U})) \cap B_p(S_*(X))$ e scegliamo $b \in S_{p+1}(X)$ tale che $db = a$. Come sopra, esiste un morfismo di complessi $f: S_*(X) \rightarrow S_*(X)$, una potenza di b_X , che induce l'identità in omologia e tale che $f(b) \in S_*(\mathcal{U})$. Ma allora $f(a) = f(db) = df(b)$ ossia la classe di omologia di $f(a)$ in $H_p(S_*(\mathcal{U}))$ è banale.

Però anche $f: S_*(\mathcal{U}) \rightarrow S_*(\mathcal{U})$ induce l'identità in omologia e quindi $[a] = [f(a)] = 0$ in $H_p(S_*(\mathcal{U}))$. \square

1.8. Successioni esatte, lunghe e corte

Per definizione, una **successione esatta** di gruppi abeliani è un complesso in cui l'immagine di un omomorfismo è uguale al nucleo del morfismo successivo.

Dunque, un complesso di catene è una successione esatta se e solo se i gruppi di omologia sono tutti nulli.

ESEMPIO 1.8.1. Sia $f: H \rightarrow G$ un omomorfismo di gruppi. Allora:

- (1) f iniettivo se e solo se $0 \rightarrow H \xrightarrow{f} G$ è esatta;
- (2) f surgettivo se e solo se $H \xrightarrow{f} G \rightarrow 0$ è esatta;
- (3) f isomorfismo se e solo se $0 \rightarrow H \xrightarrow{f} G \rightarrow 0$ è esatta.

ESEMPIO 1.8.2. Supponiamo che

$$G_3 \xrightarrow{f_3} G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} G_0$$

sia una successione esatta di gruppi abeliani. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) f_3 è surgettiva;
- (2) $f_2 = 0$;
- (3) f_1 è iniettiva.

Infatti, per l'esattezza in G_1 il nucleo di f_1 è uguale all'immagine di f_2 ; in particolare f_2 è nulla se e solo se $\ker f_1 = 0$, ossia se e solo se f_1 è iniettiva. Similmente, per l'esattezza in G_2 il nucleo di f_2 è uguale all'immagine di f_3 ed in particolare $f_2 = 0$ se e solo se f_3 è surgettiva.

ESEMPIO 1.8.3. Supponiamo che

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} G_4$$

sia una successione esatta. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) f_0 è surgettiva e f_3 è iniettiva;
- (2) $f_1 = f_2 = 0$;
- (3) $G_2 = 0$.

I ragionamenti da fare sono analoghi a quelli dell'esempio precedente e lasciati per esercizio al lettore.

ESEMPIO 1.8.4. Ogni omomorfismo di gruppi abeliani $A \xrightarrow{f} B$ si estende in modo canonico ad una successione esatta

$$0 \rightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} \operatorname{coker}(f) \rightarrow 0,$$

dove i è l'inclusione, $\operatorname{coker}(f)$, detto **conucleo** di f , è uguale per definizione al gruppo quoziente $\operatorname{coker}(f) = B/f(A)$ e p è la proiezione al quoziente.

Viceversa, data una successione esatta

$$0 \rightarrow H \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} Q \rightarrow 0,$$

l'omomorfismo h induce per corestrizione un isomorfismo $h: H \rightarrow \ker f$. Inoltre, dato che $f(A) \subseteq \ker q$ possiamo scrivere $q = \bar{q}p$ per un opportuno omomorfismo $\bar{q}: \operatorname{coker} f = B/f(A) \rightarrow Q$; dato che q è surgettivo, anche \bar{q} è surgettivo; dato che $f(A) = \ker p = \ker q$, l'omomorfismo \bar{q} è iniettivo e quindi definisce un isomorfismo tra Q ed il conucleo di f .

Supponiamo di avere un quadrato commutativo di gruppi abeliani, ossia un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

Se $x \in \ker \beta$, allora $\delta\alpha(x) = \gamma\beta(x) = 0$ e quindi $\alpha(x) \in \ker \delta$. Dunque il quadrato commutativo definisce per restrizione un omomorfismo $\alpha: \ker(\beta) \rightarrow \ker(\delta)$.

Si consideri adesso la proiezione sul conucleo $\pi: D \rightarrow \operatorname{coker}(\delta)$. Allora $\pi\delta = 0$ ed a maggior ragione $\pi\gamma\beta = \pi\delta\alpha = 0$, ossia $\pi\gamma$ si annulla sull'immagine di β . Per la proprietà universale dei quozienti, l'omomorfismo $\pi\gamma$ si fattorizza ad un omomorfismo tra i conuclei $\bar{\gamma}: \operatorname{coker}(\alpha) \rightarrow \operatorname{coker}(\gamma)$. Alla fine abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\beta) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\beta} & B & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\beta) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \bar{\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\delta) & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\delta} & D & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{coker}(\delta) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con entrambe le righe successioni esatte.

TEOREMA 1.8.5 (Lemma dei 5). *Sia dato il seguente diagramma commutativo di gruppi abeliani:*

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{d_1} & E_2 & \xrightarrow{d_2} & E_3 & \xrightarrow{d_3} & E_4 & \xrightarrow{d_4} & E_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & H_2 & \xrightarrow{h_2} & H_3 & \xrightarrow{h_3} & H_4 & \xrightarrow{h_4} & H_5 \end{array}$$

con entrambe le righe esatte.

- (1) se α_1 è surgettiva e α_2, α_4 sono iniettive, allora β è iniettiva;
- (2) se α_5 è iniettiva e α_2, α_4 sono surgettive, allora β è surgettiva;
- (3) se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono bigettive, allora β è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo il primo punto; la dimostrazione del secondo è del tutto simile ed è lasciata per esercizio. Il terzo punto segue banalmente dai primi due.

Sia $x \in E_3$ tale che $\beta(x) = 0$, allora $\alpha_4 d_3(x) = h_3 \beta(x) = 0$ ed essendo per ipotesi α_4 iniettiva si ha $d_3(x) = 0$. La prima riga è esatta e quindi esiste $y \in E_2$ tale che $x = d_2(y)$; siccome $h_2 \alpha_2(y) = \beta d_2(y) = \beta(x) = 0$ e la riga inferiore è esatta, esiste $z \in H_1$ tale che $h_1(z) = \alpha_2(y)$. Adesso usiamo la surgettività di α_1 per trovare $w \in E_1$ tale che $\alpha_1(w) = z$, quindi $\alpha_2 d_1(w) = h_1 \alpha_1(w) = h_1(z) = \alpha_2(y)$. Per l'iniettività di α_2 si ha $y = d_1(w)$ e quindi $x = d_2(y) = d_2 d_1(w) = 0$. \square

DEFINIZIONE 1.8.6. Una **successione esatta corta** è una successione esatta del tipo

$$(1.6) \quad 0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0.$$

Importante: la (1.6) è una successione esatta corta se e solo se f è iniettiva, g è surgettiva e $\ker g = f(U)$.

Dato un complesso di catene $\dots \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} \dots$, risulta spesso utile ‘spacchettarlo’ in tante successioni esatte corte, e più precisamente

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n(C_*) \rightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1}(C_*) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow B_n(C_*) \rightarrow Z_n(C_*) \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad \forall n.$$

Viceversa, le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0,$$

possono essere ‘impacchettate’ in un unico complesso di catene $\dots C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & H_n & & 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & H_{n-1} & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

La nozione di successione esatta si trasporta, nella maniera più ovvia possibile, dai gruppi abeliani ai complessi. Ad esempio, una successione esatta corta di complessi di catene è una successione

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \rightarrow 0$$

di morfismi di complessi tale che, per ogni intero n la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$$

è esatta.

Ogni successione esatta corta di complessi di catene come sopra, induce per ogni n tre complessi

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n(A_*) \xrightarrow{f_n} Z_n(B_*) \xrightarrow{g_n} Z_n(C_*) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow B_n(A_*) \xrightarrow{f_n} B_n(B_*) \xrightarrow{g_n} B_n(C_*) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{f_n} H_n(B_*) \xrightarrow{g_n} H_n(C_*) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

che però non sono successioni esatte in generale. Si consideri ad esempio il caso in cui $A_0 = B_0 = B_1 = C_1 = \mathbb{Z}$ e $A_i, B_i, C_i = 0$ altrimenti, e dove i tre morfismi $d: B_1 \rightarrow B_0$, $f_0: A_0 \rightarrow B_0$, $g_1: B_1 \rightarrow C_1$ sono tutti uguali all'identità.

A parziale consolazione abbiamo il seguente risultato.

TEOREMA 1.8.7 (successione esatta lunga di omologia). *Sia*

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di complessi di catene. Allora è canonicamente definita una successione di omomorfismi di gruppi

$$\delta_n: H_n(C_*) \rightarrow H_{n-1}(A_*), \quad n \in \mathbb{Z},$$

che induce una successione esatta (lunga) di gruppi di omologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A_*) \xrightarrow{f} H_n(B_*) \xrightarrow{g} H_n(C_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{f} \cdots$$

DIMOSTRAZIONE. Sia n un intero fissato e definiamo δ_n . Sia $[x] \in H_n(C_*)$ la classe di omologia di un ciclo $x \in Z_n(C_*)$; siccome $g_n: B_n \rightarrow C_n$ è surgettivo, possiamo scegliere $b \in B_n$ tale che $g(b) = x$. Siccome $g(db) = dg(b) = 0$ si ha $db \in \ker g$.

Per esattezza vi è un unico elemento $a \in A_{n-1}$ tale che $f(a) = db$. Si vede subito che a è un ciclo, infatti $f(da) = df(a) = d^2b = 0$ e dato che f è iniettivo deve essere $a \in Z_{n-1}(A_*)$. Poniamo dunque

$$\delta_n([x]) = [a] = \text{classe di omologia di } a$$

e mostriamo che non dipende dalla scelta di x e di b .

Sia $\tilde{b} \in B_n$ tale che $g(\tilde{b}) - g(b) \in B_n(C_*)$, e scegliamo $c \in C_{n+1}$ tale che $dc = g(b - \tilde{b})$. Poiché g è suriettiva, esiste $h \in B_{n+1}$ tale che $g(h) = c$, allora

$$g(b - \tilde{b} - dh) = g(b - \tilde{b}) - g(dh) = g(b - \tilde{b}) - dg(h) = 0$$

e per esattezza esiste $k \in A_n$ tale che $f(k) = b - \tilde{b} - dh$. Dunque

$$f(a - dk) = db - f(dk) = db - df(k) = db - (db - d\tilde{b} - d^2h) = d\tilde{b}$$

e siccome $a, a - dk$ sono cicli che inducono la stessa classe di omologia abbiamo provato che $\delta_n([x])$ è ben definito.

La dimostrazione dell'esattezza della successione lunga di omologia è cosa tanto semplice quanto noiosa ed è lasciata per esercizio; dimostrazioni complete si possono trovare in [20, 45]. \square

È importante osservare che la definizione dei morfismi δ_n è universale e non dipende dalle caratteristiche dei complessi in gioco. Questo implica ad esempio che, dato un diagramma commutativo di morfismi di complessi,

$$(1.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \longrightarrow & B_* & \longrightarrow & C_* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_* & \longrightarrow & M_* & \longrightarrow & L_* \longrightarrow 0 \end{array}$$

con entrambe le righe successioni esatte corte, per ogni n vi è un diagramma commutativo di gruppi di omologia

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_*) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(A_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(L_*) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(N_*) \end{array}$$

Esercizi.

ESERCIZIO 1.12. Usare il lemma dei 5 per dimostrare che, dato un diagramma di complessi come in (1.7), con entrambe le righe esatte, se due morfismi verticali sono quasi-isomorfismi, allora lo è anche il terzo.

ESERCIZIO 1.13. Questo è quello che si chiama un esercizio di “caccia al diagramma”. Si consideri il diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & P_1 \\
 & & N_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & N_3 & \xrightarrow{f} & M_3 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

in cui tutte le righe e tutte le colonne sono successioni esatte. Provare che l'omomorfismo f è iniettivo.

ESERCIZIO 1.14 (Lemma del serpente). Sia dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f} & M_1 & \xrightarrow{g} & P_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & N_0 & \xrightarrow{h} & M_0 & \xrightarrow{k} & P_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

con entrambe le righe esatte. Allora esiste un morfismo (di bordo) $\delta: \ker(\gamma) \rightarrow \text{coker}(\alpha)$ tale che la successione

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker(\alpha) & \xrightarrow{f} & \ker(\beta) & \xrightarrow{g} & \ker(\gamma) \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & \text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{h}} \text{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{k}} \text{coker}(\gamma) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

è esatta. (Suggerimento: pensare le tre frecce verticali come complessi, ponendo $N_i = M_i = P_i = 0$ per ogni $i \neq 0, 1$.)

ESERCIZIO 1.15. La successione dei morfismi δ_n introdotti nel Teorema 1.8.7 non è l'unica ad avere le medesime proprietà; infatti, per ogni scelta di segni $a_n = \pm 1$ la successione $a_n \delta_n$ va ancora bene, purché, beninteso, la scelta del segno a_n dipenda solo da n . Dimostrare che queste sono le uniche possibilità; (riconosco di essere un po' vago ed impreciso, ma senza il linguaggio dei funtori e delle trasformazioni naturali non riesco a fare di meglio). Suggerimento: considerare morfismi di successioni esatte corte di complessi come in (1.7) nei quali $H_n(C_*) = \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(A_*) = \mathbb{Z}$ e $H_p(B_*) = 0$ per ogni p .

1.9. Successione esatta di Mayer–Vietoris ed applicazioni

In questa sezione ci occupiamo della prima applicazione non banale dei Teoremi 1.7.8 e 1.8.7, con la quale saremo già in grado di calcolare i gruppi di omologia di molti spazi topologici interessanti.

Premettiamo una piccola considerazione algebrica. Dati due complessi di gruppi abeliani

$$\begin{array}{l}
 C_*: \quad \cdots \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} C_{n-2} \xrightarrow{d} \cdots \\
 D_*: \quad \cdots \xrightarrow{\delta} D_n \xrightarrow{\delta} D_{n-1} \xrightarrow{\delta} D_{n-2} \xrightarrow{\delta} \cdots
 \end{array}$$

si definisce la loro somma diretta come il complesso

$$C_* \oplus D_*: \quad \cdots \xrightarrow{(d,\delta)} C_n \oplus D_n \xrightarrow{(d,\delta)} C_{n-1} \oplus D_{n-1} \xrightarrow{(d,\delta)} C_{n-2} \oplus D_{n-2} \xrightarrow{(d,\delta)} \cdots$$

dove

$$(d, \delta)(x, y) = (dx, \delta y), \quad x \in C_n, y \in D_n.$$

Segue immediatamente dalla definizione che $(x, y) \in Z_n(C_* \oplus D_*)$ se e solo se $x \in Z_n(C_*)$ e $y \in Z_n(D_*)$, ossia vale $Z_n(C_* \oplus D_*) = Z_n(C_*) \oplus Z_n(D_*)$. Similmente vale $B_n(C_* \oplus D_*) = B_n(C_*) \oplus B_n(D_*)$ e pertanto abbiamo degli isomorfismi naturali $H_n(C_* \oplus D_*) = H_n(C_*) \oplus H_n(D_*)$.

Esiste una naturale identificazione di C_* con il sottocomplesso di $C_* \oplus D_*$ formato dagli elementi del tipo $(x, 0)$, con $x \in C_*$, ed esiste una proiezione naturale $C_* \oplus D_* \rightarrow C_*$, $(x, y) \mapsto x$.

Dato un qualunque morfismo di complessi $f: A_* \rightarrow C_*$, useremo lo stesso simbolo $f: A_* \rightarrow C_* \oplus D_*$ per denotare la composizione di f con l'inclusione naturale $C_* \subseteq C_* \oplus D_*$. Similmente, per ogni morfismo di complessi $g: C_* \rightarrow E_*$, useremo lo stesso simbolo $g: C_* \oplus D_* \rightarrow E_*$ per denotare la sua composizione con la proiezione naturale, ossia $g(x, y) = g(x)$.

Siano U, V due aperti in uno spazio topologico X e denotiamo i morfismi di inclusione tra i quattro aperti $U, V, U \cap V, U \cup V$ con le lettere indicate nel diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i} & U \\ \downarrow j & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{k} & U \cup V \end{array}$$

È immediato osservare che il corrispondente diagramma commutativo di complessi

$$\begin{array}{ccc} S_*(U \cap V) & \xrightarrow{i_*} & S_*(U) \\ \downarrow j_* & & \downarrow h_* \\ S_*(V) & \xrightarrow{k_*} & S_*(U \cup V) \end{array}$$

determina una successione esatta

$$0 \rightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{i_*+j_*} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{h_*-k_*} S_*(U \cup V).$$

L'immagine del morfismo $h_* - k_*$ è il sottocomplesso formato dalle catene che si possono scrivere nella forma $h_*(x) - k_*(y)$ al variare di $x \in S_*(U), y \in S_*(V)$ e coincide pertanto con il sottocomplesso $S_*(\mathcal{U}) = S_*(U) \oplus S_*(V) \subseteq S_*(U \cup V)$, dove \mathcal{U} denota il ricoprimento aperto $\{U, V\}$.

Per i Teoremi 1.7.8 e 1.8.7 si hanno dunque un isomorfismo $H_*(U \cup V) = H_*(S_*(\mathcal{U}))$, indotto dall'inclusione $S_*(\mathcal{U}) \subseteq S_*(U \cup V)$, ed una successione esatta lunga

$$H_n(S_*(U \cap V)) \xrightarrow{i_*+j_*} H_n(S_*(U)) \oplus H_n(S_*(V)) \xrightarrow{h_*-k_*} H_n(S_*(\mathcal{U})) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(S_*(U \cap V)) \cdots$$

Mettendo assieme i pezzi abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA 1.9.1 (Successione esatta di Mayer-Vietoris). *Per ogni coppia di aperti U, V in uno spazio topologico X si ha una successione esatta lunga*

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{i_*+j_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*-k_*} H_n(U \cup V) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_*+j_*} \cdots$$

OSSERVAZIONE 1.9.2. L'ipotesi che i sottoinsiemi U, V siano aperti è sostanzialmente di comodo ed è più che sufficiente per i nostri scopi. Per la validità della successione di Mayer-Vietoris basta infatti che ogni componente connessa per archi $Y \subseteq X$ sia uguale all'unione delle parti interne di $U \cap Y$ e $V \cap Y$ nella topologia di Y (esercizio: perché?).

Vediamo subito all'opera la successione esatta di Mayer-Vietoris nel calcolo dell'omologia delle sfere $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

Ricordiamo che il complementare di ogni punto $p \in S^n$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n mediante proiezione stereografica. Fissato un sistema di coordinate ortogonali x_0, \dots, x_n su \mathbb{R}^{n+1} tale che $p = (1, 0, \dots, 0)$, le due proiezioni stereografiche

$$f: S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \dots, x_n)$$

$$g: S^n - \{-p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{1+x_0}(x_1, \dots, x_n)$$

sono omeomorfi con inversi

$$f^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{\sum_i y_i^2 - 1}{1 + \sum_i y_i^2}, \frac{2y_1}{1 + \sum_i y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_i y_i^2} \right),$$

$$g^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1 - \sum_i y_i^2}{1 + \sum_i y_i^2}, \frac{2y_1}{1 + \sum_i y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_i y_i^2} \right).$$

Se chiamiamo i due punti $p, -p$ Polo Nord e Polo Sud, allora ‘l’equatore’

$$E = \{x \in S^n \mid x_0 = 0\} \cong S^{n-1}$$

è un retratto per deformazione di $S^n - \{p, -p\}$. Infatti, tramite l’omeomorfismo f l’aperto $S^n - \{p, -p\}$ diventa $\mathbb{R}^n - \{0\}$, mentre $f(E) = S^{n-1}$.

In conclusione, considerando gli aperti $U = S^n - \{p\}$ e $V = S^n - \{-p\}$ si ha $U \cup V = S^n$ (e quindi si può applicare Mayer–Vietoris), U, V sono contraibili e l’inclusione $E \subseteq U \cap V$ è un isomorfismo in omologia. Usando queste informazioni ed induzione su n è facile arrivare al seguente risultato

TEOREMA 1.9.3. *Per ogni $n > 0$ si ha $H_i(S^n) = \mathbb{Z}$ per $i = 0, n$ e $H_i(S^n) = 0$ per ogni $i \neq 0, n$.*

DIMOSTRAZIONE. Con i due aperti U, V appena descritti, dato che $H_i(U) = H_i(V) = 0$ per ogni $i > 0$ e $H_i(U \cap V) = H_i(S^{n-1})$, la successione esatta di Mayer–Vietoris si spezza nelle successioni esatte

$$0 \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{i_*+j_*} H_0(U) \oplus H_0(V),$$

$$0 \rightarrow H_i(S^n) \rightarrow H_{i-1}(U \cap V) = H_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0, \quad i > 1.$$

Dalla seconda segue $H_i(S^n) = H_{i-1}(S^{n-1})$ per $i > 1$ e quindi, per induzione su n basta calcolare i gruppi $H_1(S^n)$. Per ogni componente connessa per archi Y di $U \cap V$, le due inclusioni $i: Y \rightarrow U$ e $j: Y \rightarrow V$ inducono isomorfismi $i_*: H_0(Y) \rightarrow H_0(U)$ e $j_*: H_0(Y) \rightarrow H_0(V)$. Ne segue che l’applicazione $(i_*, j_*): H_0(Y) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ è iniettiva e l’immagine è formata dalle coppie (a, b) tali che $\eta(a) = \eta(b)$. In particolare, dato che per $n > 1$ l’intersezione $U \cap V$ è connessa per archi (ha il tipo di omotopia di S^{n-1}), ne segue che $H_1(S^n) = 0$. Invece, per $n = 1$, l’insieme $U \cap V$ ha esattamente due componenti connesse per archi

$$Y_1 = \{(x_0, x_1) \in S^1 \mid x_1 > 0\}, \quad Y_2 = \{(x_0, x_1) \in S^1 \mid x_1 < 0\}.$$

Fissati due punti $c_1 \in Y_1$ e $c_2 \in Y_2$, si ha $H_0(Y_1) = \mathbb{Z}[c_1]$, $H_0(Y_2) = \mathbb{Z}[c_2]$, $[c_1] = [c_2] \in H_0(U)$ e $[c_1] = [c_2] \in H_0(V)$.

Dunque, nella base $[c_1], [c_2]$ l’omomorfismo $(i_*, j_*): H_0(Y_1) \oplus H_0(Y_2) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ diventa

$$\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad (a, b) \mapsto (a + b, a + b),$$

il cui nucleo $\{(n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è isomorfo a \mathbb{Z} . □

COROLLARIO 1.9.4 (Invarianza della dimensione). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ due aperti omeomorfi e non vuoti, allora $n = m$.*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato è ovvio se $\min(n, m) = 0$, possiamo quindi considerare solo il caso $n, m > 0$. Sia $f: A \rightarrow B$ un omeomorfismo e supponiamo per assurdo $n > m$ (se $n < m$ basta scambiare A con B) e quindi $n > 1$; non è restrittivo supporre $0 \in A$ e $f(0) = 0 \in B$. Per ogni $r > 0$ denotiamo

$$U_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| < r\}, \quad V_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 < \|x\| < r\};$$

allora per ogni r l’aperto U_r ha il tipo di omotopia di S^{n-1} (risp. S^{m-1} e per ogni $r < R$ l’inclusione $U_r \subset U_R$ è un isomorfismo in omologia. Infatti, se $0 < s < r$ la sfera $\{x \mid \|x\| = s\}$ è un retratto per deformazione sia di U_r che di U_R . Similmente ogni V_t ha il tipo di omotopia di S^{m-1} . Sia $R > 0$ tale che $U_R \subset A$, dato che f è aperta e continua esistono $t, r > 0$ tali che $f(U_r) \subset V_t \subset f(U_R)$. Ma allora l’applicazione continua

$$U_r \xrightarrow{f} V_t \xrightarrow{f^{-1}} U_R$$

è esattamente l'inclusione e quindi induce un isomorfismo

$$\mathbb{Z} \simeq H_{n-1}(U_r) \rightarrow H_{n-1}(U_R) \simeq \mathbb{Z},$$

in contraddizione con il fatto che $H_{n-1}(V_t) = 0$. \square

Il teorema di invarianza della dimensione può essere visto come corollario del prossimo teorema, per la cui dimostrazione (molto più lunga e complicata) rimandiamo a [54].

TEOREMA 1.9.5 (invarianza dei domini). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme. Se A è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n , allora A è aperto.*

Rimandiamo ai testi [5, 13, 54] per altre applicazioni della successione esatta di Mayer-Vietoris.

Esercizi.

ESERCIZIO 1.16. Dimostrare che $H_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \cong \mathbb{Z}$ e che il morfismo $H_1(S^1) \rightarrow H_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ indotto dalla proiezione naturale $S^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ è uguale alla moltiplicazione per ± 2 , con il segno \pm dipendente dalla scelta delle basi, vedi Esercizio 1.10.

ESERCIZIO 1.17. Siano x_0, x_1, x_2 coordinate omogenee su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e si considerino i tre sottospazi

$$A = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x_0 \neq 0\}, \quad B = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0)\},$$

$$C = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x_0^2 = x_1^2 + x_2^2\} \subseteq A \cap B.$$

Dimostrare che:

- (1) A è un aperto contraibile;
- (2) l'inclusione $C \hookrightarrow A \cap B$ e la proiezione $\pi: B \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, $\pi([x_0, x_1, x_2]) = [x_1, x_2]$, sono equivalenze omotopiche;
- (3) l'inclusione $A \cap B \subseteq B$ induce in omologia un omomorfismo $H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(B)$ con nucleo banale e conucleo di ordine 2.

Usare i tre punti precedenti e la successione esatta di Mayer-Vietoris per calcolare tutti i gruppi di omologia di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Omologia e coomologia delle varietà compatte

Questo capitolo ha un duplice obiettivo: introdurre la coomologia singolare e dimostrare che le varietà compatte hanno tutti i gruppi di omologia e coomologia finitamente generati.

2.1. Gruppi abeliani finitamente generati

Un gruppo abeliano M si dice **finitamente generato** se è generato da un numero finito di elementi. È utile osservare che M è finitamente generato se e solo se esiste un omomorfismo surgettivo $\mathbb{Z}^n \rightarrow M$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Infatti, se $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ è surgettivo ed e_1, \dots, e_n è la base canonica di \mathbb{Z}^n , allora $f(e_1), \dots, f(e_n)$ generano M ; viceversa, se $m_1, \dots, m_n \in M$ sono generatori, allora l'omomorfismo $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ tale che $f(e_i) = m_i$ risulta surgettivo.

LEMMA 2.1.1.

- (1) *Sottogruppi e quozienti di gruppi abeliani finitamente generati sono finitamente generati.*
- (2) *Se $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ è una successione esatta di gruppi abeliani, con M, P finitamente generati, allora anche N è finitamente generato.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Siano $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ un omomorfismo surgettivo e $N \subseteq M$ un sottogruppo. La composizione di p con la proiezione al quoziente M/N è surgettiva e quindi anche M/N è finitamente generato. Il sottogruppo $p^{-1}(N) \subseteq \mathbb{Z}^n$ è isomorfo a \mathbb{Z}^m per qualche $m \leq n$ ed il morfismo $p: p^{-1}(N) \rightarrow N$ è surgettivo.

2) A meno di sostituire P con il suo sottogruppo $g(N)$, che è ancora finitamente generato, non è restrittivo supporre g surgettiva. Siano $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ e $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow P$ omomorfismi surgettivi. Scegliamo un omomorfismo $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow N$ tale che $gh = q$, allora l'omomorfismo

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m \rightarrow N, \quad (x, y) \mapsto fp(x) + h(y),$$

è surgettivo. □

Dall'unione del Lemma 2.1.1 con la successione esatta di Mayer–Vietoris segue il seguente risultato.

TEOREMA 2.1.2. *Sia $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ un ricoprimento aperto finito di uno spazio topologico. Si assuma che per ogni $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ i gruppi di omologia di $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ siano finitamente generati. Allora anche i gruppi di omologia di X sono finitamente generati.*

DIMOSTRAZIONE. Induzione su n , con il caso $n = 1$ vero per ipotesi. Supponiamo $n > 1$ e poniamo $Y = U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$. Per l'ipotesi induttiva, sia i gruppi di omologia di Y che quelli di $Y \cap U_n = (U_1 \cap U_n) \cup \dots \cup (U_{n-1} \cap U_n)$ sono finitamente generati.

Sia $p \geq 0$ fissato, per Mayer–Vietoris esiste una successione esatta

$$H_p(Y) \oplus H_p(U_n) \xrightarrow{p} H_p(X) \xrightarrow{q} H_{p-1}(Y \cap U_n).$$

Per l'ipotesi induttiva i due gruppi ai lati sono finitamente generati e la conclusione segue dal Lemma 2.1.1. □

COROLLARIO 2.1.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e represso di un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora i gruppi di omologia di X sono finitamente generati.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r: V \rightarrow X$ una retrazione, ossia $r(x) = x$ per ogni $x \in X$. Per la compattezza di X esiste un numero finito di aperti convessi $B_1, \dots, B_n \subseteq V$ tali che $X \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_n$; chiaramente ogni intersezione $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}$ è ancora un aperto convesso, possibilmente vuoto. Se $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$, per il Teorema 2.1.2 i gruppi di omologia di B sono finitamente generati, e dato che $r: B \rightarrow X$ è ancora una retrazione, tutti i morfismi $r_*: H_n(B) \rightarrow H_n(X)$ sono surgettivi. □

Uno spazio topologico X si dice **localmente euclideo** se ogni punto di X possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n , per qualche $n \geq 0$. Più precisamente, X è localmente euclideo se per ogni $p \in X$ esistono: un aperto $U \subseteq X$ tale che $p \in U$, un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ed un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$.

In uno spazio localmente euclideo ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni aperti contraibili; ad esempio, nelle notazioni precedenti basta considerare gli intorni di p dati da $\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r))$ per ogni $r > 0$ tale che $B(\varphi(p), r) \subseteq V$. In particolare, le componenti connesse sono aperte e coincidono con le componenti connesse per archi.

Siano X localmente euclideo e $p \in X$; se U_1, U_2 sono intorni aperti di p omeomorfi rispettivamente ad un aperto di \mathbb{R}^n ed un aperto di \mathbb{R}^m , allora $U_1 \cap U_2$ è omeomorfo sia ad un aperto di \mathbb{R}^n che ad un aperto di \mathbb{R}^m e, per il teorema di invarianza della dimensione, questo è possibile solo se $n = m$. La seguente definizione è quindi ben posta.

DEFINIZIONE 2.1.4. Sia X uno spazio localmente euclideo. La dimensione di X in un punto $p \in X$ è uguale all'unico intero n tale che p possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 2.1.5. Una **varietà topologica compatta** è uno spazio localmente euclideo, compatto e di Hausdorff.

TEOREMA 2.1.6. *I gruppi di omologia di una varietà topologica compatta sono finitamente generati.*

Il Teorema 2.1.6 segue immediatamente dal Corollario 2.1.3 e dal seguente fatto non banale, per la cui dimostrazione rimandiamo all'Appendice II di [54].

TEOREMA 2.1.7. *Ogni varietà topologica compatta è omeomorfa ad un sottospazio di \mathbb{R}^N , per qualche $N > 0$. Se un sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto e localmente euclideo, allora X è retratto di un aperto che lo contiene.*

Con un diverso ragionamento, nella prossima sezione daremo una dimostrazione completa del Teorema 2.1.6 aggiungendo un'ipotesi che in pratica, ossia nei casi che ci interessano, risulta sempre verificata.

Esiste anche una nozione generale di varietà topologica in cui la condizione di compattezza viene indebolita nel modo seguente.

DEFINIZIONE 2.1.8. Una **varietà topologica** è uno spazio localmente euclideo di Hausdorff in cui ogni componente connessa possiede una base numerabile di aperti.

Con questa definizione, ogni sottospazio aperto di una varietà topologica è ancora una varietà topologica. Unione disgiunta di varietà topologiche è ancora una varietà topologica. Per il teorema (non banale) di Poincaré–Volterra (vedi [38]) ogni rivestimento di una varietà topologica è ancora una varietà topologica.

Esercizi.

ESERCIZIO 2.1. Siano G il gruppo delle successioni $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $I \subseteq G$ il sottogruppo e delle successioni definitivamente nulle. Dimostrare che I non è finitamente generato.

ESERCIZIO 2.2. Un gruppo abeliano G si dice **senza torsione** se non possiede elementi non nulli di ordine finito; equivalentemente, G è senza torsione se per ogni $n > 0$ l'omomorfismo

$$n: G \rightarrow G, \quad x \mapsto nx,$$

è iniettivo.

Dimostrare che un gruppo abeliano finitamente generato è libero se e solo se è senza torsione. (Suggerimento: sia $\{a_1, \dots, a_n\} \subset G$ un insieme finito di generatori e sia $I \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ un sottoinsieme massimale di elementi linearmente indipendenti su \mathbb{Z} . Se $H \subseteq G$ è il sottogruppo generato da I , provare che H è libero e che esiste $n > 0$ tale che $na_i \in H$ per ogni i . Per concludere, mostrare che la moltiplicazione per n definisce un isomorfismo tra G ed un sottogruppo di H .)

ESERCIZIO 2.3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ il complementare di una unione finita di sottospazi affini. Dimostrare che i gruppi di omologia di X sono tutti finitamente generati.

2.2. Ricoprimenti semplici

Iniziamo con una precisazione sul concetto di ricoprimento; dato uno spazio topologico X , con insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ si definisce:

- Un **ricoprimento proprio** come una sottofamiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ la cui unione è tutto X , ossia $X = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.
- Un **ricoprimento indicizzato** come un elemento $(A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X)$ tale che $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

In un ricoprimento indicizzato $(A_i)_{i \in I}$ non si richiede che l'applicazione $i \mapsto A_i$ sia iniettiva e pertanto lo stesso sottoinsieme di X può comparire con molteplicità qualunque nel ricoprimento. Ogni ricoprimento proprio $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è tautologicamente indicizzato da se stesso, ossia corrisponde all'elemento di $\prod_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(X)$ che nella coordinata $A \in \mathcal{F}$ vale A . Viceversa, ad ogni ricoprimento indicizzato $(A_i)_{i \in I}$ è associato in maniera naturale il ricoprimento proprio $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Per la stragrande maggioranza delle questioni che si incontrano in topologia generale, ad esempio per tutto ciò che riguarda la compattezza, la teoria è indipendente dalla definizione di ricoprimento adottata. Invece, in (co)omologia la differenza tra le due nozioni si inizia a sentire.

Da ora in poi, salvo avviso contrario, *intenderemo i ricoprimenti di uno spazio topologico X sempre in senso indicizzato*. Dunque, per noi, un ricoprimento $(A_i)_{i \in I}$ dello spazio X è il dato di un insieme I , che chiameremo insieme degli indici, e di un'applicazione $I \ni i \mapsto A_i \subseteq X$ tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Sia X uno spazio topologico localmente euclideo. Un **atlante** su X è una collezione di terne $(U_i, A_i, \varphi_i)_{i \in I}$, indicizzata da un insieme I , dove:

- (1) $(U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X ;
- (2) ogni A_i è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , per qualche $n \geq 0$;
- (3) ogni $\varphi_i: U_i \rightarrow A_i$ è un omeomorfismo.

Gli aperti U_i sono detti **carte locali** dell'atlante. Segue immediatamente dalle definizioni che ogni spazio localmente euclideo possiede atlanti.

Ad ogni atlante $(U_i, A_i, \varphi_i)_{i \in I}$ si associa una collezione di applicazioni $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$ definita nel modo seguente: per ogni coppia di indici $(i, j) \in I \times I$ denotiamo $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $A_{ij} = \varphi_i(U_{ij}) \subseteq A_i$. Dato che U_{ij} è aperto in U_i e φ_i è un omeomorfismo, si ha che A_{ij} è aperto in A_i ed è quindi un aperto di \mathbb{R}^n per qualche n . Attenzione che, mentre $U_{ij} = U_{ji}$, in generale $A_{ij} \neq A_{ji}$.

Definiamo

$$\varphi_{ij}: A_{ij} \rightarrow A_{ji}, \quad \varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)),$$

di modo che si abbiano i seguenti diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} & U_{ij} & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ A_{ij} & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & A_{ji} \end{array}$$

nei quali ogni applicazione è un omeomorfismo; si noti che $A_{ii} = A_i$, $\varphi_{ii} = \text{Id}_{A_i}$ e $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ per ogni i, j .

DEFINIZIONE 2.2.1. Un atlante $(U_i, A_i, \varphi_i)_{i \in I}$ si dice di **classe C^k** se tutte le applicazioni φ_{ij} sono di classe C^k , o equivalentemente, se ogni φ_{ij} è un diffeomorfismo di classe C^k .

RIPASSO 2.2.2. Dati due aperti $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$, un'applicazione $f: U \rightarrow V$ si dice di **classe C^k** , con $k \geq 0$, se ogni sua componente $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $i = 1, \dots, m$, è una funzione di classe C^k , e cioè con tutte le derivate parziali fino all'ordine k definite e continue. Ricordiamo anche che una funzione si dice di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni $k > 0$; in tal caso tutte le sue derivate parziali, di ogni ordine, esistono e sono funzioni di classe C^∞ .

Diremo che $f: U \rightarrow V$ è un **diffeomorfismo di classe C^k** se è invertibile e se la sua inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ è ancora di classe C^k .

In questa sezione dimostreremo, seguendo [53], che se una varietà topologica compatta X possiede un atlante di classe C^2 , allora possiede anche un ricoprimento aperto finito $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ tale che l'intersezione $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ è omeomorfa ad un convesso (possibilmente vuoto)

per ogni sottosuccessione $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$; segue quindi dal Teorema 2.1.2 che ogni gruppo $H_i(X)$ è finitamente generato.

Nei seguenti risultati denoteremo con $\|\cdot\|$ la norma euclidea in \mathbb{R}^n e con $B(p, r)$ le corrispondenti palle aperte, ossia

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < r\}.$$

Nelle seguenti considerazioni avremo bisogno dell'uguaglianza

$$(2.1) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

e sarà pertanto necessario utilizzare la norma euclidea.

LEMMA 2.2.3. *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $D \subseteq U$ un compatto e $r > 0$ tali che $x + h \in U$ per ogni $x \in D$ ed ogni $h \in \Delta(r) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \leq r\}$. Allora per ogni funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 esistono due costanti $K_1, K_2 \geq 0$ tali che*

$$|f(x + h) - f(x)| \leq K_1 \|h\|, \quad \left| f(x + h) - f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \right| \leq K_2 \|h\|^2,$$

per ogni $x \in D$, ed ogni $h = (h_1, \dots, h_n) \in \Delta(r)$.

Nel corso della dimostrazione, il lettore riconoscerà senza alcun dubbio che alcune ipotesi sono decisamente ridondanti e sono assunte al solo fine di economizzare e compattare la nostra trattazione, così come la stima molto grezza delle costanti K_1, K_2 .

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in D$ fissato, per la formula di Taylor, vedi ad esempio [1], per ogni $h \in \Delta(r)$ esiste $t \in [0, 1]$ tale che

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + th) h_i h_j.$$

Siccome $th \in \Delta(r)$, se c_{ij} è il massimo della funzione continua

$$g_{ij}: D \times \Delta(r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + y) \right|,$$

e $c = \max_{i,j} c_{ij}$ si ha

$$\left| f(x + h) - f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \right| \leq c \sum_{i,j} |h_i| |h_j|.$$

Per dimostrare l'esistenza della costante K_2 basta osservare che $2|h_i||h_j| \leq h_i^2 + h_j^2$ e quindi $\sum_{i,j} |h_i||h_j| \leq n\|h\|^2$. Se denotiamo con A il massimo su D della norma del gradiente di f , per Cauchy-Schwarz si ha

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \right| \leq A \|h\|,$$

da cui $|f(x + h) - f(x)| \leq A\|h\| + K_2\|h\|^2$ e basta prendere $K_1 = A + rK_2$. \square

TEOREMA 2.2.4. *Siano $f: U \rightarrow V$ un diffeomorfismo di classe C^2 tra aperti di \mathbb{R}^n e $p \in U$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $B(p, \epsilon) \subseteq U$ e $f(B(p, s))$ è un aperto convesso per ogni $0 < s \leq \epsilon$.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di traslazioni, possiamo $p = 0$ e $f(p) = 0$. Sia $\delta > 0$ tale che $\overline{B(0, 3\delta)} \subseteq V$; per il Lemma 2.2.3 applicato a f^{-1} , con $D = \overline{B(0, \delta)}$ e $r = 2\delta$, esistono un'applicazione $S: B(0, \delta) \times B(0, 2\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una costante $L > 0$ tale che

$$f^{-1}(z + k) = f^{-1}(z) + S(z, k), \quad \|S(z, k)\| \leq L\|k\|$$

per ogni $z \in B(0, \delta)$, $k \in B(0, 2\delta)$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{B(0, 2r)} \subseteq U$ e $f(B(0, r)) \subseteq B(0, \delta)$. Di nuovo per il Lemma 2.2.3 esiste un'applicazione $R: B(0, r) \times B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una costante $K > 0$ tale che

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + R(x, h), \quad \|R(x, h)\| \leq K\|h\|^2$$

per ogni $x, h \in B(0, r)$. Definiamo

$$\epsilon = \min \left(r, \frac{1}{3KL} \right) > 0$$

e proviamo che tesi del teorema è verificata.

Fissiamo un $0 < s \leq \epsilon$, è allora ovvio che $B(0, s) \subseteq U$; grazie al Lemma 1.2.2, per dimostrare la convessità dell'aperto $f(B(0, s))$ basta provare che $(a + b)/2 \in f(B(0, s))$ per ogni $a, b \in f(B(0, s))$; siccome V contiene l'involuppo convesso di $f(B(0, s))$ e $f: U \rightarrow V$ è bigettiva, ci basta dimostrare che

$$(2.2) \quad f^{-1} \left(\frac{f(u) + f(v)}{2} \right) \in B(0, s)$$

per ogni $u, v \in B(0, s)$. Siano dunque $u, v \in B(0, s)$, ponendo $x = (u + v)/2$ e $h = (u - v)/2$ si ha

$$x, h \in B(0, s), \quad u = x + h, \quad v = x - h,$$

e quindi

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} = \frac{f(x + h) + f(x - h)}{2} = f(x) + \hat{R}(x, h),$$

dove $\hat{R}(x, h) = (R(x, h) + R(x, -h))/2$ e pertanto $\|\hat{R}(x, h)\| \leq K\|h\|^2$. Inoltre, siccome $f(u), f(v), f(x)$ hanno norma $< \delta$ si ha $\|\hat{R}(x, h)\| < 2\delta$. Dunque

$$f^{-1}((f(u) + f(v))/2) = f^{-1}(f(x) + \hat{R}(x, h)) = x + S(f(x), \hat{R}(x, h))$$

con

$$\|x\| \leq s, \quad \|S(f(x), \hat{R}(x, h))\| \leq L\|\hat{R}(x, h)\| \leq KL\|h\|^2.$$

Ponendo $t = S(f(x), \hat{R}(x, h))$ si ha

$$\|f^{-1}((f(u) + f(v))/2)\|^2 = \|x + t\|^2 \leq (\|x\| + \|t\|)^2 \leq \|x\|^2 + 2s\|t\| + \|t\|^2.$$

Tenendo presente che, per (2.1), si ha la disuguaglianza

$$\|x\|^2 + \|h\|^2 = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2} \leq s^2,$$

per verificare (2.2) ci basta mostrare che $2s\|t\| + \|t\|^2 \leq \|h\|^2$, e questo segue da

$$2s\|t\| + \|t\|^2 \leq 2sKL\|h\|^2 + K^2L^2\|h\|^4 \leq \|h\|^2(2/3 + K^2L^2s^2) \leq \|h\|^2(2/3 + 1/9) \leq \|h\|^2.$$

□

Si noti che nella dimostrazione del Teorema 2.2.4 è fondamentale che le palle $B(0, s)$ siano prese nella distanza euclidea e non in altre.

LEMMA 2.2.5. *Sia $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ un ricoprimento aperto finito di uno spazio topologico compatto di Hausdorff. Esistono allora aperti $W_1, \dots, W_n \subseteq X$ tali che:*

- (1) $\overline{W_i} \subseteq U_i$ per ogni i ,
- (2) $X = W_1 \cup \dots \cup W_n$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo per induzione su $k = 1, \dots, n$ la seguente affermazione: esistono aperti W_1, \dots, W_k tali che $\overline{W_i} \subseteq U_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e $X = W_1 \cup \dots \cup W_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_n$.

Per $k = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $X = W_1 \cup \dots \cup W_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_n$ consideriamo i due sottospazi chiusi e disgiunti $A = X - (W_1 \cup \dots \cup W_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_n)$, $B = X - U_{k+1}$. Dato che A, B sono compatti ed il prodotto $A \times B$ non interseca la diagonale $\Delta \subseteq X \times X$, per il teorema di Wallace [38] esistono due aperti $W_{k+1}, V \subseteq X$ tali che $A \subseteq W_{k+1}$, $B \subseteq V$ e $W_{k+1} \times V \cap \Delta = \emptyset$, ossia tali che $W_{k+1} \cap V = \emptyset$. Quindi con $\overline{W_{k+1}} \subseteq X - V \subset X - B = U_{k+1}$. □

Il Lemma 2.2.5 è un caso particolare del *teorema di restringimento*, che tratteremo più avanti nel contesto più generale degli spazi paracompatti di Hausdorff.

TEOREMA 2.2.6. *Sia X una varietà topologica compatta di dimensione n che possiede un atlante di classe C^2 . Esiste allora un ricoprimento aperto finito \mathcal{V} di X tale che ogni intersezione di elementi di \mathcal{V} è vuota oppure omeomorfa ad un aperto convesso di \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi X possiede un atlante finito $(U_i, A_i, \varphi_i)_{i=1, \dots, n}$ di classe C^2 (basta prendere un qualsiasi atlante di classe C^2 e restringersi ad un sottoinsieme finito di carte locali che ricoprono il compatto X). Per il lemma di restringimento esiste un ricoprimento aperto $X = \cup_{i=1}^n W_i$ tale che per ogni indice i si ha $\overline{W_i} \subset U_i$.

Adesso, per ogni $x \in X$ scegliamo un suo intorno aperto $x \in V_x \subseteq X$. Dato che gli aperti U_i, W_i ed i chiusi $\overline{W_i}$ sono in numero finito, restringendo V_x quanto basta, possiamo supporre:

- (1) se $x \in U_i$ allora $V_x \subseteq U_i$,
- (2) se $x \in W_i$ allora $V_x \subseteq W_i$
- (3) se $x \notin \overline{W_i}$, allora $V_x \cap \overline{W_i} = \emptyset$.

Adesso, per ogni $x \in X$ scegliamo un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in W_{i(x)}$. Per il Teorema 2.2.6, a meno di restringere ulteriormente ciascun V_x possiamo inoltre supporre che

- (1) $\varphi_{i(x)}(V_x)$ è una palla aperta in $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$,
- (2) se $x \in \overline{W_j}$, e quindi $V_x \subseteq U_j \cap U_{i(x)}$, allora $\varphi_j(V_x) = \varphi_{ij}(\varphi_{i(x)}(V_x))$ è un aperto convesso di A_j .

Siano $y, x_1, \dots, x_m \in X$ tali che $V_y \cap V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m} \neq \emptyset$. Siccome $V_y \subseteq W_{i(y)}$ si ha $V_{x_j} \cap W_{i(y)} \neq \emptyset$ e quindi $x_j \in \overline{W_{i(y)}}$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Dunque ogni $\varphi_{i(y)}(V_{x_j})$ è un aperto convesso e di conseguenza $\varphi_{i(y)}(V_y \cap V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m})$ è intersezione di aperti convessi di \mathbb{R}^n .

Per concludere basta scegliere come \mathcal{V} un qualunque sottoricoprimento finito del ricoprimento aperto $(V_x)_{x \in X}$. □

COROLLARIO 2.2.7. *Sia X una varietà topologica compatta che ammette un atlante di classe C^2 . Allora i gruppi di omologia singolare di X sono finitamente generati.*

DIMOSTRAZIONE. Basta prendere un ricoprimento \mathcal{V} come nel Teorema 2.2.6 ed applicare il Teorema 2.1.2. □

Per spiegare il titolo di questa sezione, riportiamo due definizioni che si trovano spesso in letteratura.

DEFINIZIONE 2.2.8. Un ricoprimento aperto di uno spazio topologico si dice **omotopicamente semplice** se ogni intersezione finita di aperti del ricoprimento è vuota oppure contraibile.

Ricordiamo che contraibile significa avere lo stesso tipo di omotopia del punto.

DEFINIZIONE 2.2.9. Un ricoprimento aperto di uno spazio topologico si dice **omologicamente semplice** se ogni intersezione finita di aperti del ricoprimento è vuota oppure ha gli stessi gruppi di omologia del punto.

Esercizi.

ESERCIZIO 2.4. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, $U \subseteq X$ un aperto e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ un omeomorfismo. Provare che per ogni $r > 0$ si ha

$$\overline{f(B(0, r))} = \overline{f(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\})} = f(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}),$$

dove l'overline indica la chiusura in X . Dire inoltre se tale fatto continua ad essere vero senza l'ipotesi di Hausdorff.

ESERCIZIO 2.5. Sia $1 < a < 2$ e si consideri il diffeomorfismo di classe C^1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, y + |x|^a).$$

Provare che per ogni $s > 0$ l'aperto $f(B(0, s))$ non è convesso.

ESERCIZIO 2.6. Sia X uno spazio di Hausdorff che possiede un atlante di classe C^2 . Si assuma inoltre che esista un'applicazione propria $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ per qualche $n \geq 0$ (propria vuol dire che la controimmagine di un compatto è compatta). Dimostrare che X possiede ricoprimenti semplici. L'esempio $X = \mathbb{Z}$ mostra però che l'omologia può non essere finitamente generata.

2.3. Il funtore Hom

Dati due gruppi abeliani G, M , l'insieme $\text{Hom}(G, M)$ degli omomorfismi da G in M è ancora un gruppo abeliano, con l'operazione di somma definita nel modo naturale $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Se \mathbb{K} è un campo, allora il gruppo abeliano $\text{Hom}(G, \mathbb{K})$ possiede una naturale struttura di spazio vettoriale su \mathbb{K} , con il prodotto per scalare definito dalla formula $(af)(x) = af(x)$ per $a \in \mathbb{K}$ ed $f \in \text{Hom}(G, \mathbb{K})$.

La struttura di gruppo su $\text{Hom}(G, M)$ è preservata dalle composizioni con omomorfismi; più precisamente, per ogni omomorfismo $f: G \rightarrow H$ di gruppi abeliani, e per ogni gruppo abeliano M le due applicazioni

$$\text{Hom}(M, G) \rightarrow \text{Hom}(M, H), \quad \alpha \mapsto f \circ \alpha,$$

$$\text{Hom}(H, M) \rightarrow \text{Hom}(G, M), \quad \beta \mapsto f^\vee(\beta) := \beta \circ f,$$

sono ancora omomorfismi di gruppi.

In analogia con l'algebra lineare, chiameremo f^\vee il trasposto di f . La trasposizione si comporta con le composizioni nel modo che uno si aspetta, e cioè $(fg)^\vee = g^\vee f^\vee$; vediamo adesso alcuni risultati su come si comporta con le successioni esatte.

LEMMA 2.3.1. *Sia M un gruppo abeliano. Allora per ogni successione esatta di gruppi abeliani $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, la successione*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^\vee} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^\vee} \text{Hom}(A, M)$$

è ancora esatta.

DIMOSTRAZIONE. Per considerazioni puramente insiemistiche, g surgettivo implica g^\vee iniettivo. Inoltre $f^\vee g^\vee = (gf)^\vee = 0$. Rimane da dimostrare che $\ker f^\vee \subseteq \text{Im}(g^\vee)$. Sia $\alpha: B \rightarrow M$ tale che $f^\vee(\alpha) = 0$; allora f si annulla sul nucleo di α e quindi si fattorizza come $\alpha = \bar{\alpha}p$, dove $p: B \rightarrow B/f(A)$ è la proiezione al quoziente e $\bar{\alpha}: B/f(A) \rightarrow M$. D'altra parte g si fattorizza come $g = \bar{g}p$ per un opportuno isomorfismo $\bar{g}: B/f(A) \rightarrow C$ e basta osservare che $\alpha = g^\vee(\bar{\alpha}\bar{g}^{-1})$. \square

A differenza di quanto accade con gli spazi vettoriali e le applicazioni lineari, se g è iniettivo non è detto che g^\vee sia surgettivo. Più in generale, se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ è esatta, in generale la successione

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^\vee} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^\vee} \text{Hom}(A, M) \rightarrow 0$$

non è esatta. Ad esempio, se partiamo dalla successione esatta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$, dove $f(x) = 2x$, l'omomorfismo $f^\vee: \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ non è surgettivo (esercizio: perché?).

LEMMA 2.3.2. *Per una successione esatta corta di gruppi abeliani $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) *esiste un omomorfismo $p: B \rightarrow A$ tale che $pf = \text{Id}_A$;*
- (2) *esiste un omomorfismo $s: C \rightarrow B$ tale che $gs = \text{Id}_C$;*
- (3) *esiste un isomorfismo $\phi: A \oplus C \rightarrow B$ tale che $\phi(a, 0) = f(a)$ e $g\phi(a, c) = c$ per ogni $a \in A$ e $c \in C$;*
- (4) *per ogni gruppo abeliano M , la successione*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^\vee} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^\vee} \text{Hom}(A, M) \rightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2). Dato $c \in C$ definiamo $s(c) = b - fp(b)$, dove $b \in B$ è un qualunque elemento tale che $g(b) = c$. Bisogna verificare che s è ben definito: se $c = g(b) = g(b')$ allora esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b - b'$. Ma allora

$$(b - fp(b)) - (b' - fp(b')) = f(a) - fpa = f(a) - f(a) = 0.$$

Siccome $gf = 0$ si ha $gs(c) = c$ per ogni $c \in C$.

(2) \Rightarrow (3). Definiamo $\phi(a, c) = f(a) + s(c)$; è allora immediato osservare che $\phi(a, 0) = f(a)$ e $g\phi(a, c) = g(f(a)) + g(s(c)) = 0 + c = c$. Per mostrare che l'omomorfismo ϕ è bigettivo usiamo

il lemma dei 5 (Teorema 1.8.5) applicato al diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} & A \oplus C & \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(3) \Rightarrow (4). Per il Lemma 2.3.1 basta dimostrare che f^\vee è surgettiva. Dato un omomorfismo $\alpha: A \rightarrow M$ basta estenderlo ad un omomorfismo $\alpha': A \oplus C \rightarrow M$, ad esempio $\alpha'(a, c) = \alpha(a)$, prendere $\beta = \alpha' \circ \phi^{-1}$ e osservare che per ogni $a \in A$ vale $\beta(f(a)) = \beta(\phi(a, 0)) = \alpha'(a, 0) = \alpha(a)$.

(4) \Rightarrow (1). Prendiamo $M = A$ e $p \in \text{Hom}(B, A)$ tale che $f^\vee(p) = \text{Id}_A$.

□

DEFINIZIONE 2.3.3. Una successione esatta di gruppi abeliani che soddisfa le quattro condizioni equivalenti del Lemma 2.3.2 si dice **contraibile**, o **che spacca**, o **split**.

ESEMPIO 2.3.4. Ogni successione esatta corta $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ in cui C è un gruppo libero è split. Per verificare la condizione (2) del Lemma 2.3.2 prendiamo una base $(c_i)_{i \in I}$ di C , scegliamo $b_i \in B$ tale che $g(b_i) = c_i$ per ogni i e definiamo $s: C \rightarrow B$ ponendo $s(c_i) = b_i$.

COROLLARIO 2.3.5. Per ogni successione esatta corta $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ di gruppi abeliani liberi ed ogni gruppo abeliano M , la successione

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{\beta^\vee} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{\alpha^\vee} \text{Hom}(A, M) \rightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Dato che C è libero, la successione è split e si applica il Lemma 2.3.2 □

DEFINIZIONE 2.3.6. Un gruppo abeliano G si dice:

- (1) **divisibile** se per ogni $x \in G$ ed ogni intero positivo n esiste $y \in G$ tale che $ny = x$;
- (2) **ridotto** se non possiede sottogruppi divisibili non banali;

Ad esempio, ogni spazio vettoriale su \mathbb{Q} è un gruppo abeliano divisibile, così come i gruppi quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \{\text{radici complesse dell'unità}\}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ e $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$. Segue dalla definizioni che un gruppo divisibile non possiede elementi primitivi. Somme e prodotti diretti di gruppi divisibili sono ancora divisibili; idem per gruppi ridotti; idem per gruppi senza torsione.

LEMMA 2.3.7. Siano B, G due gruppi abeliani, $A \subseteq B$ un sottogruppo e $f: A \rightarrow G$ un omomorfismo. Se:

- (1) il quoziente B/A è libero, oppure
- (2) G è divisibile,

allora f si estende ad un omomorfismo $B \rightarrow G$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Se B/A libero, per l'Esempio 2.3.4 la successione esatta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$ è split e per il Lemma 2.3.3 l'omomorfismo di restrizione $\text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$ è surgettivo.

(2) Supponiamo G divisibile e consideriamo prima il caso particolare in cui esiste un omomorfismo surgettivo $p: \mathbb{Z} \rightarrow B/A$. Scegliamo un sollevamento di p ad un omomorfismo $q: \mathbb{Z} \rightarrow B$, allora $B = A + q(\mathbb{Z})$. Sia $n \geq 0$ il generatore di $q^{-1}(A)$, ossia $q(m) \in A$ se e solo se n divide m . Sia $y \in G$ tale che $ny = fq(n)$ e definiamo

$$g: B \rightarrow G, \quad g(a + f(s)) = f(a) - sy.$$

Bisogna verificare che g è ben definito, e cioè che se $a_1 + q(s_1) = a_2 + q(s_2)$ con $a_1, a_2 \in A$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, allora $f(a_1) - s_1y = f(a_2) - s_2y$. Siccome $q(s_2 - s_1) = a_1 - a_2 \in A$ esiste $r \in \mathbb{Z}$ tale che $s_2 - s_1 = nr$, da cui segue $s_2y - s_1y = nry$ e $a_1 - a_2 = rq(n)$, $f(a_2) - f(a_1) = rny$.

Passiamo adesso al caso generale. Denotiamo con \mathcal{A} la collezione di tutte le coppie (H, h) con $A \subseteq H \subseteq B$ sottogruppo e $h: H \rightarrow G$ che estende f . Tale collezione è non vuota (contiene (A, f)), è ordinata per estensione e soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Sia $(L, l) \in \mathcal{A}$ massimale e dimostriamo che $L = B$. Se così non fosse, scegliamo $x \in B - L$ e consideriamo il sottogruppo $M = L + \mathbb{Z}x$. Dato che l'omomorfismo $q: \mathbb{Z} \rightarrow M/L$ tale che $q(1) = x$ è surgettivo, per il caso particolare l'omomorfismo l si estende ad M , in contraddizione con la massimalità. □

OSSERVAZIONE 2.3.8. Lo stesso argomento del lemma di Zorn usato nella dimostrazione del Lemma 2.3.7 si può applicare in algebra lineare per dimostrare che se U è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $V \subseteq U$ un sottospazio, allora ogni applicazione lineare $V \rightarrow \mathbb{K}$ si estende ad una applicazione lineare $U \rightarrow \mathbb{K}$, ossia che l'applicazione di restrizione $U^\vee \rightarrow V^\vee$ tra i rispettivi spazi duali è surgettiva. Rispetto al caso dei gruppi la situazione è ancora più semplice dato che se $x \in U - V$ allora $V + \mathbb{K}x = V \oplus \mathbb{K}x$ (dettagli per esercizio).

PROPOSIZIONE 2.3.9. *Siano G, M gruppi abeliani finitamente generati e \mathbb{K} un campo. Allora:*

- (1) *il gruppo abeliano $\text{Hom}(G, M)$ è finitamente generato;*
- (2) *lo spazio vettoriale $\text{Hom}(G, \mathbb{K})$ ha dimensione finita su \mathbb{K} .*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste un omomorfismo surgettivo di gruppi $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ e da questo segue che l'applicazione trasposta

$$p^\vee: \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M), \quad p^\vee(f) = f \circ p,$$

è un omomorfismo iniettivo di gruppi. D'altra parte ogni omomorfismo $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ è univocamente determinato dai valori che assume f nella base canonica di \mathbb{Z}^n e quindi si ha un isomorfismo naturale $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M) = \bigoplus_{i=1}^n M$.

Dunque, se M è finitamente generato, anche $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M)$ è finitamente generato e, per il Lemma 2.1.1 anche il suo sottogruppo $p^\vee \text{Hom}(G, M) \cong \text{Hom}(G, M)$ è finitamente generato.

Se $M = \mathbb{K}$ è un campo, allora $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M) \cong \mathbb{K}^n$ ha dimensione finita e p^\vee è un'applicazione \mathbb{K} -lineare iniettiva. \square

COROLLARIO 2.3.10. \mathbb{K} un campo di caratteristica 0, G un gruppo abeliano finitamente generato e $a_1, \dots, a_m \in G$ una successione massimale di elementi linearmente indipendenti su \mathbb{Z} . Allora $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(G, \mathbb{K}) = m$. In particolare:

- (1) *valgono le uguaglianze*

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(G, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{Hom}(G, \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}(G, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(G, \mathbb{C});$$

- (2) *tutte le successioni massimali di elementi linearmente indipendenti hanno la stessa lunghezza.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che $a_1, \dots, a_m \in G$ sono linearmente indipendenti su \mathbb{Z} , il sottogruppo $H \subseteq G$ generato da a_1, \dots, a_m è isomorfo a \mathbb{Z}^m . Dato che \mathbb{K} contiene \mathbb{Q} , come gruppo abeliano \mathbb{K} risulta divisibile e quindi il morfismo di restrizione $r: \text{Hom}(G, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^m$ è surgettivo per il Lemma 2.3.7. Rimane da dimostrare che $\ker r = 0$.

Sia $f \in \ker r$, dalla massimalità della successione a_1, \dots, a_m segue che per ogni $a \in G$ esiste una relazione del tipo $n_0 a = \sum_{i=1}^m n_i a_i$, con gli interi n_j non tutti nulli. Dato che a_1, \dots, a_m sono linearmente indipendenti su \mathbb{Z} deve essere $n_0 \neq 0$ e quindi $n_0 f(a) = 0$ da cui segue $f(a) = 0$. \square

DEFINIZIONE 2.3.11. Il **rango** di un gruppo abeliano finitamente generato G è il massimo numero di elementi di G che sono linearmente indipendenti su \mathbb{Z} .

Il teorema di scambio ci garantisce che il rango è ben definito ed è un numero naturale; il Corollario 2.3.10 ci dice che ogni successione massimale di elementi linearmente indipendenti ha lunghezza uguale al rango.

Esercizi.

ESERCIZIO 2.7. Dati tre gruppi abeliani A, B, G descrivere concretamente un isomorfismo

$$\text{Hom}(A \oplus B, G) \cong \text{Hom}(A, G) \oplus \text{Hom}(B, G)$$

tale che:

- (1) per ogni coppia di omomorfismi $f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$ si abbia $(f + g)^\vee = f^\vee + g^\vee$;
- (2) per ogni coppia di omomorfismi $h: A \rightarrow C, k: B \rightarrow C$ si abbia $(h + k)^\vee = h^\vee + k^\vee$.

ESERCIZIO 2.8 (Additività del rango). Sia $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani finitamente generati. Dimostrare che il rango di B è uguale alla somma dei ranghi di A e C .

ESERCIZIO 2.9 (Teorema di struttura dei gruppi abeliani finitamente generati). Sia G un gruppo abeliano finitamente generato di rango r e denotiamo con $T(G) \subseteq G$ il sottoinsieme degli elementi di ordine finito. Dimostrare:

- (1) $T(G)$ è un sottogruppo finito di G ;
- (2) il gruppo quoziente $G/T(G)$ è abeliano libero di rango r ;
- (3) esiste un isomorfismo (non canonico) $G \cong T(G) \oplus \mathbb{Z}^r$;
- (4) il gruppo $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ ha rango r .

(Sugg.: vedere gli Esercizi 2.2, 2.8 e la dimostrazione del Lemma 2.3.7.)

ESERCIZIO 2.10. Sia G un gruppo abeliano fissato. Dimostrare che per ogni successione esatta di gruppi $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, la successione

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}(G, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}(G, C)$$

è ancora esatta.

ESERCIZIO 2.11. Siano G un gruppo abeliano finitamente generato di rango r e \mathbb{K} un campo. Dimostrare che $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(G, \mathbb{K})$ dipende solo dalla caratteristica di \mathbb{K} e $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(G, \mathbb{K}) \geq r$. (Suggerimento: prendere una successione esatta del tipo $0 \rightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$ ed interpretare M come una matrice $n \times m$ a coefficienti interi.)

ESERCIZIO 2.12. Sia G un gruppo divisibile. Dimostrare che ogni successione esatta corta del tipo $0 \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ è split.

ESERCIZIO 2.13. Un gruppo abeliano G si dice **ridotto** se non possiede sottogruppi divisibili non banali. Provare che somme e prodotti diretti di gruppi, rispettivamente, divisibili, ridotti, senza torsione) sono ancora, rispettivamente, divisibili, ridotti, senza torsione.

ESERCIZIO 2.14. Dimostrare che ogni gruppo abeliano è isomorfo alla somma diretta di un gruppo ridotto ed un gruppo divisibile.

ESERCIZIO 2.15. Nelle notazioni del Lemma 2.3.7, si assuma che esista un intero $n > 0$ tale che $nx = 0$ per ogni $x \in B/A$. Dimostrare che per ogni omomorfismo $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$, il suo multiplo nf si estende ad un omomorfismo $B \rightarrow \mathbb{Z}$. (Suggerimento: sia $g: B \rightarrow \mathbb{Q}$ che estende la composizione di f con l'inclusione usuale $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ e provare che l'immagine di ng è contenuta in \mathbb{Z} .)

ESERCIZIO 2.16. Nelle notazioni del Lemma 2.3.7, si assuma che il gruppo B/A sia finitamente generato. Dimostrare che esiste un intero positivo $n > 0$ tale che, per ogni omomorfismo $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$, il suo multiplo nf si estende ad un omomorfismo $B \rightarrow \mathbb{Z}$. (Suggerimento: sia $H \subseteq B/A$ il sottogruppo generato da una successione massimale linearmente indipendente, $K \subseteq B$ la sua controimmagine e considerare separatamente le estensioni di f prima a K e poi a B .)

ESERCIZIO 2.17. Sia G un gruppo abeliano. Provare che per ogni $0 \neq a \in G$ esiste un omomorfismo $f: G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tale che $f(a) \neq 0$. Dedurre che G è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo divisibile $\prod_{a \in G} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

2.4. Coomologia singolare

Sia G un gruppo abeliano fissato. Per ogni spazio topologico X ed ogni $p \geq 0$ definiamo il gruppo delle **p -cocatene singolari** a coefficienti in G come

$$S^p(X, G) = \text{Hom}(S_p(X), G).$$

Dato che $S_p(X)$ è per definizione il gruppo libero generato dall'insieme $\Delta(X)_p$ dei p -simplessi singolari di X , ogni omomorfismo $S_p(X) \rightarrow G$ è univocamente determinato dai valori che assume su $\Delta(X)_p$ e pertanto possiamo scrivere

$$S^p(X, G) = \{f: \Delta(X)_p \rightarrow G\}.$$

Il trasposto del differenziale $d: S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)$ determina un omomorfismo

$$d^\vee: S^p(X, G) \rightarrow S^{p+1}(X, G), \quad d^\vee(f) = f \circ d, \quad f \in \text{Hom}(S_p(X), G).$$

Siccome $d^\vee \circ d^\vee = (d \circ d)^\vee = 0$, se consegue che

$$S^*(X, G): \quad 0 \rightarrow S^0(X, G) \xrightarrow{d^\vee} S^1(X, G) \xrightarrow{d^\vee} S^2(X, G) \xrightarrow{d^\vee} \dots$$

è un complesso di cocatene e quindi ha senso considerare cocicli, cobordi e gruppi di coomologia, denotati rispettivamente

$$Z^n(X, G) = \{f \in S^n(X, G) \mid d^\vee(f) = fd = 0\},$$

$$B^n(X, G) = \{d^\vee(f) = fd \mid f \in S^{n-1}(X, G)\},$$

$$H^n(X, G) = Z^n(X, G)/B^n(X, G).$$

Da ora in poi, per semplicità notazionale, useremo il simbolo d anche per indicare il differenziale in $S^*(X, G)$, al posto del formalmente più corretto d^\vee . Va inoltre ricordato che se $G = \mathbb{K}$ è un campo, allora $S^*(X, \mathbb{K})$ è un complesso di spazi vettoriali e che i gruppi abeliani $S^n(X, \mathbb{Z})$ sono ridotti e senza torsione, ma non liberi in generale.

ESEMPIO 2.4.1. Le coomologie del vuoto e del punto si calcolano molto facilmente. Dato che $S_n(\emptyset) = 0$ per ogni n , si ha $S^n(\emptyset, G) = 0$ ed a maggior ragione $H^n(\emptyset, G) = 0$ per ogni n . Invece, dualizzando il complesso delle catene singolari del punto (Esempio 1.3.6) si ottiene il complesso $S^*(\text{pt}, G)$, con $S^n(\text{pt}, G) = G$ per ogni $n \geq 0$ e $d: S^n(\text{pt}, G) \rightarrow S^{n+1}(\text{pt}, G)$ nullo per n pari e bigettivo per n dispari. Abbiamo quindi $H^0(\text{pt}, G) = G$ e $H^n(\text{pt}, G) = 0$ per ogni $n > 0$.

Possiamo identificare (esercizio: perché?) $S^0(X, G)$ con il gruppo delle applicazioni insiemistiche $X \rightarrow G$ e si dimostra facilmente (esercizio) che $H^0(X, G) = Z^0(X, G)$ è il gruppo delle applicazioni $X \rightarrow G$ che sono costanti su ciascuna componente connessa per archi.

Abbiamo detto che ogni risultato algebrico di natura generale sui complessi di catene ha un suo corrispondente immediato sui complessi di cocatene, ottenuto semplicemente cambiando il segno degli indici.

Dato un qualunque complesso di gruppi abeliani, in notazione coomologica,

$$C^*: \quad \dots \xrightarrow{d} C^n \xrightarrow{d} C^{n+1} \xrightarrow{d} \dots,$$

possiamo definire, per ogni n :

- (1) il gruppo degli n -**cocicli**

$$Z^n(C^*) = \{x \in C^n \mid dx = 0\};$$

- (2) il gruppo degli n -**cobordi**

$$B^n(C^*) = \{dx \in C^n \mid x \in C^{n-1}\};$$

- (3) l' n -esimo gruppo di **coomologia**

$$H^n(C^*) = \frac{Z^n(C^*)}{B^n(C^*)}.$$

Un complesso di cocatene si dice **aciclico** se i suoi gruppi di coomologia sono tutti nulli, ossia se il complesso è anche una successione esatta.

Le nozioni di morfismo di complessi e omotopia hanno un loro equivalente immediato nella notazione coomologica. Un morfismo $f: C^* \rightarrow D^*$ di complessi di cocatene è una successione di omomorfismi di gruppi $f_n: C^n \rightarrow D^n$ che commutano con i differenziali, ossia $df_n = f_{n+1}d$ per ogni n .

Una omotopia $T: C^* \rightarrow D^*[-1]$ tra due morfismi $f, g: C^* \rightarrow D^*$ è una successione di omomorfismi di gruppi $T_n: C^n \rightarrow D^{n-1}$ tali che $dT + Td = f - g$.

Ogni morfismo preserva cocicli, cobordi e quindi induce un morfismo in coomologia. Le versioni coomologiche del Lemma 1.6.3 del Teorema 1.8.7 diventano.

LEMMA 2.4.2. *Due morfismi di complessi $f, g: C^* \rightarrow D^*$ omotopi inducono gli stessi morfismi in coomologia $f = g: H^*(C^*) \rightarrow H^*(D^*)$.*

TEOREMA 2.4.3 (successione esatta lunga di coomologia). *Sia*

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di complessi di cocatene. Allora è ben definita una successione di omomorfismi di gruppi

$$\delta: H^n(C^*) \rightarrow H^{n+1}(A^*), \quad n \in \mathbb{Z},$$

che induce una successione esatta (lunga) di coomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A^*) \xrightarrow{f} H^n(B^*) \xrightarrow{g} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{f} \cdots$$

Ovviamente per dimostrare i precedenti risultati basta cambiare segno ai gradi e ricondursi al caso omologico.

Se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua, il trasposto del morfismo di complessi $f_*: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ definisce un morfismo di complessi

$$f^* := f_*^\vee: S^*(Y, G) \rightarrow S^*(X, G).$$

Concretamente, per ogni simplelso singolare $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ ed ogni $\alpha: S_p(Y) \rightarrow G$ si ha $f^*(\alpha)(\phi) = \alpha(f \circ \phi)$. Per verificare che f^* è effettivamente un morfismo, e non un semplice pre-morfismo, di complessi basta dualizzare le uguaglianze $f_*d = df_*$ ottenendo $d^\vee f^* = f^*d^\vee$.

Si ha dunque un morfismo tra i gruppi di coomologia $f^*: H^*(Y, G) \rightarrow H^*(X, G)$; da notare la controvarianza, ossia $(fg)^* = g^*f^*$. Da osservare anche che se $G = \mathbb{K}$ è un campo, allora l'applicazione f^* è \mathbb{K} -lineare.

ESEMPIO 2.4.4. Sia $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ la proiezione canonica. Usiamo la teoria dei rivestimenti per dimostrare che il morfismo indotto in coomologia reale $\pi^*: H^*(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(S^n, \mathbb{R})$ è iniettivo.

Sia $\phi: \Delta^p \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ un qualsiasi simplelso singolare; dato che Δ^p è un convesso, segue dai teoremi di esistenza ed unicità dei sollevamenti che esistono esattamente due simplelso singolari $\phi_+, \phi_-: \Delta^p \rightarrow S^n$ tali che $\pi(\phi_{\pm}) = \phi$, e vale $\phi_- = \sigma \circ \phi_+$, dove $\sigma: S^n \rightarrow S^n$ denota l'applicazione antipodo.

Da ciò segue che, per ogni gruppo abeliano G , l'applicazione $\pi^*: S^p(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, G) \rightarrow S^p(S^n, G)$ è iniettiva ed ha come immagine il sottogruppo delle cocatene $\alpha: \Delta(S^n)_p \rightarrow G$ tali che $\alpha = \sigma^*\alpha$. Possiamo adesso scrivere $S^*(S^n, \mathbb{R})$ come somma diretta dei due sottocomplessi $A = \{\alpha \mid \alpha = \sigma^*\alpha\}$ e $B = \{\alpha \mid \alpha = -\sigma^*\alpha\}$ e quindi

$$\pi^*: H^*(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^*(A), \quad H^*(S^n, \mathbb{R}) = H^*(A) \oplus H^*(B).$$

È chiaro che lo stesso argomento funziona se al posto di \mathbb{R} viene messo un qualsiasi gruppo abeliano G in cui la moltiplicazione per 2 è invertibile.

PROPOSIZIONE 2.4.5. *Siano $f, g: X \rightarrow Y$ applicazioni omotope. Allora i due morfismi di complessi $f^*, g^*: S^*(Y, G) \rightarrow S^*(X, G)$ sono omotopi e quindi $f^* = g^*: H^*(Y, G) \rightarrow H^*(X, G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che esiste un'omotopia $T: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)[1]$ tra f_* e g_* . Basta allora considerare gli omomorfismi trasposti $K_n = T_{n-1}^\vee: S^n(Y, G) \rightarrow S^{n-1}(X, G)$, $K_n(f) = f \circ T_{n-1}$, per ottenere un'omotopia tra f^* e g^* (dettagli per esercizio). \square

La stessa dimostrazione del caso omologico dimostra che se $f: X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica allora f^* è un isomorfismo in coomologia.

2.5. Il teorema dei coefficienti universali, versione 'lazy'

Occupiamoci adesso del *teorema dei coefficienti universali*, del quale non faremo una trattazione completa (richiederebbe un energico studio dei funtori Tor ed Ext), ma solamente di alcuni suoi aspetti particolari.

Sia M un gruppo abeliano fissato. Per ogni complesso di catene

$$C_*: \quad \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

in cui ogni C_i è un gruppo abeliano libero, applicando $\text{Hom}(\cdot, M)$ si ottiene un complesso di cocatene

$$\text{Hom}(C_*, M): \quad \cdots \rightarrow \text{Hom}(C_{n-1}, M) \xrightarrow{d^\vee} \text{Hom}(C_n, M) \xrightarrow{d^\vee} \text{Hom}(C_{n+1}, M) \rightarrow \cdots$$

dove d^\vee denota il trasposto di d , ossia $d^\vee(f) = f \circ d$.

TEOREMA 2.5.1 (Coefficienti universali, per matematici pigri). *Sia*

$$C_*: \quad \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \rightarrow \cdots, \quad n \in \mathbb{Z}$$

un complesso omologico di gruppi abeliani liberi. Allora, per ogni intero n ed ogni gruppo abeliano M esiste un omomorfismo naturale surgettivo

$$\epsilon: H^n(\text{Hom}(C_*, M)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_*), M).$$

Inoltre:

- (1) esiste un isomorfismo non canonico $H^n(\text{Hom}(C_*, M)) \cong \text{Hom}(H_n(C_*), M) \oplus \ker \epsilon$;
- (2) se $H_{n-1}(C_*)$ è un gruppo abeliano libero oppure se M è divisibile, allora ϵ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dati $f \in Z^n(\text{Hom}(C_*, M))$ e $x \in Z_n(C_*)$ proviamo che l'elemento $f(x) \in M$ dipende solo dalle classi $[f] \in H^n(\text{Hom}(C_*, M))$ e $[x] \in H_n(C_*)$. Siccome $dx = 0$ e $f \circ d = 0$, per ogni $y \in C_{n+1}$ ed ogni $h: C_{n-1} \rightarrow M$ si ha

$$(f + h \circ d)(x + dy) = f(x) + (f \circ d)(x) + h(dx) + h(d^2y) = f(x).$$

Possiamo quindi definire

$$\epsilon([f]): H_n(C_*) \rightarrow M, \quad \epsilon([f])[x] = f(x).$$

Dimostriamo adesso la surgettività di ϵ ; a tal fine dimostriamo che esiste un omomorfismo $s: \text{Hom}(H_n(C_*), M) \rightarrow H^n(\text{Hom}(C_*, M))$ tale che $\epsilon \circ s = \text{Id}$.

Si consideri l'omomorfismo surgettivo $d: C_n \rightarrow B_{n-1}(C_*)$; siccome $B_{n-1}(C_*)$ è un sottogruppo del gruppo libero C_{n-1} , anche $B_{n-1}(C_*)$ è libero ed esiste quindi un omomorfismo $\beta: B_{n-1}(C_*) \rightarrow C_n$ tale che $d\beta = \text{Id}$ (vedi Esempio 2.3.4). Se $\pi: Z_n(C_*) \rightarrow H_n(C_*)$ denota la proiezione al quoziente, per ogni omomorfismo $g: H_n(X) \rightarrow M$, l'omomorfismo

$$\tilde{g}: C_n \rightarrow M, \quad \tilde{g}(x) = g\pi(x - \beta dx),$$

è ben definito e appartiene a $Z^n(\text{Hom}(C_*, M))$; infatti $d(x - \beta dx) = dx - d\beta dx = dx - dx = 0$, dunque $x - \beta dx \in Z_n(C_*)$ e pertanto \tilde{g} risulta ben definito. Inoltre, $\tilde{g}(dy) = g\pi(dy - \beta d^2y) = g\pi dy = 0$ poiché $\pi d = 0$. Definiamo $s(g)$ come la classe di coomologia di \tilde{g} . Per verificare che $\epsilon s(g) = g$, dato che \tilde{g} è un cociclo che rappresenta $s(g)$, basta provare che $\tilde{g}(x) = g\pi(x)$ per ogni $x \in Z_n(C_*)$, e questo è ovvio poiché se $x \in Z_n(C_*)$ allora $\beta dx = 0$.

È doveroso notare che, mentre ϵ è canonico, s non lo è, dato che dipende dalla scelta soggettiva dell'omomorfismo β . Il ragionamento usato nella dimostrazione del Lemma 2.3.3 mostra che

$$\text{Hom}(H_n(C_*), M) \oplus \ker \epsilon \rightarrow H^n(\text{Hom}(C_*, M)), \quad (g, h) \mapsto s(g) + h,$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Supponiamo adesso che $H_{n-1}(C_*)$ sia libero oppure che M sia divisibile; sia $f \in Z^n(\text{Hom}(C_*, M))$ tale che $\epsilon([f]) = 0$, ossia $f(x) = 0$ per ogni $x \in Z_n(C_*)$; vogliamo dimostrare che $f \in B^n(\text{Hom}(C_*, M))$, e cioè che esiste $h: C_{n-1} \rightarrow M$ tale che $f = h \circ d$.

Dato che $d: C_n \rightarrow B_{n-1}(C_*)$ è un omomorfismo surgettivo con nucleo $\ker d = Z_n(C_*) \subseteq \ker f$, l'omomorfismo f induce per passaggio al quoziente un omomorfismo $\bar{f}: B_{n-1}(C_*) \rightarrow M$ tale che $\bar{f} \circ d = f$; se $H_{n-1}(C_*) = Z_{n-1}(C_*)/B_{n-1}(C_*)$ è libero oppure M divisibile, per il Lemma 2.3.7 \bar{f} si estende ad un omomorfismo $Z_{n-1}(C_*) \rightarrow G$, che per l'argomento precedente si estende ad un omomorfismo $h: C_{n-1} \rightarrow G$ che è quello cercato dato che $h(y) = \bar{f}(y)$ per ogni $y \in B_{n-1}(C_*)$ e quindi $h(dx) = f(x)$ per ogni $x \in C_n$. \square

COROLLARIO 2.5.2. Sia

$$C_*: \quad \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

un complesso aciclico, ossia con omologia nulla, in cui ogni C_i è un gruppo abeliano libero. Allora, per ogni gruppo abeliano M , il complesso di cocatene

$$\text{Hom}(C_*, M): \quad \cdots \rightarrow \text{Hom}(C_{n-1}, M) \xrightarrow{d^\vee} \text{Hom}(C_n, M) \xrightarrow{d^\vee} \text{Hom}(C_{n+1}, M) \rightarrow \cdots$$

è aciclico.

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza del Teorema 2.5.1. \square

Per evitare possibili errori non va dimenticato che se $F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano libero, allora $\text{Hom}(F, M) = \prod_{i \in I} M$; in particolare, $\text{Hom}(F, \mathbb{Z})$ è un gruppo abeliano libero se e solo se I è un insieme finito.

TEOREMA 2.5.3. *Siano $n \in \mathbb{Z}$ e (C_*, d) un complesso di catene di gruppi abeliani liberi tale che $H_n(C_*)$ e $H_{n-1}(C_*)$ siano finitamente generati. Allora:*

- (1) *per ogni gruppo abeliano M finitamente generato, il gruppo $H^n(\text{Hom}(C_*, M))$ è finitamente generato;*
- (2) *per ogni campo \mathbb{K} , lo spazio vettoriale $H^n(\text{Hom}(C_*, \mathbb{K}))$ ha dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla finita generazione di $H_{n-1}(C_*)$ segue che esiste un omomorfismo di gruppi $p: \mathbb{Z}^m \rightarrow Z_{n-1}(C_*)$ tale che la composizione di p con la proiezione al quoziente $Z_{n-1}(C_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*)$ sia surgettiva. Adesso pensiamo C_* come un sottocomplesso del complesso D_* definito nel modo seguente: $D_i = C_i$ per ogni $i \neq n$ e $D_n = C_n \oplus \mathbb{Z}^m$; il differenziale $d: D_i \rightarrow D_{i-1}$ coincide con quello di C_* per ogni $i \neq n$ e

$$d: D_n = C_n \oplus \mathbb{Z}^m \rightarrow D_{n-1} = C_{n-1}, \quad d(x, y) = d(x) + p(y).$$

Si ha allora una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$$

con $E_i = 0$ per ogni $i \neq n$ e $E_n = \mathbb{Z}^m$. Dalla successione esatta lunga di omologia segue che $H_n(D_*)$ è finitamente generato, e per come abbiamo definito il differenziale $d: D_n \rightarrow D_{n-1}$, che $H_{n-1}(D_*) = 0$.

Sia M un gruppo abeliano, allora per il Teorema 2.5.1 $H^n(\text{Hom}(D_*, M)) \cong \text{Hom}(H_n(D_*), M)$. D'altra parte, si ha una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \text{Hom}(E_*, M) \rightarrow \text{Hom}(D_*, M) \rightarrow \text{Hom}(C_*, M) \rightarrow 0,$$

che, per la successione esatta lunga di coomologia ci dà una successione esatta

$$\text{Hom}(H_n(D_*), M) = H^n(\text{Hom}(D_*, M)) \rightarrow H^n(\text{Hom}(C_*, M)) \rightarrow H^{n+1}(\text{Hom}(E_*, M)) = 0.$$

Adesso assumiamo che M sia finitamente generato oppure un campo e concludiamo grazie alla Proposizione 2.3.9 ed al Lemma 2.1.1. \square

Vediamo adesso alcune applicazioni del teorema dei coefficienti universali alla coomologia singolare. Sia X uno spazio topologico, allora per ogni $n \geq 0$ esiste un omomorfismo surgettivo $H^n(X, G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G)$, che diventa bigettivo quando $H_{n-1}(X)$ è libero oppure G divisibile. Dato che $H_{-1}(X) = 0$ e $H_0(X)$ è il gruppo libero generato dalle componenti connesse per archi, si hanno gli isomorfismi

$$H^0(X, G) \cong \text{Hom}(H_0(X), G), \quad H^1(X, G) \cong \text{Hom}(H_1(X), G).$$

(Attenzione: in generale $H^n(X, G) \neq \text{Hom}(H_n(X), G)$ per $n \geq 2$.)

Se \mathbb{K} è un campo di caratteristica 0, allora contiene \mathbb{Q} ed è un gruppo divisibile; quindi $H^n(X, \mathbb{K}) = \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{K})$ per ogni n .

COROLLARIO 2.5.4. *Se tutti i gruppi di omologia di uno spazio topologico X sono finitamente generati, allora i gruppi $H^n(X, \mathbb{Z})$ sono finitamente generati e, per ogni campo \mathbb{K} , gli spazi vettoriali $H^n(X, \mathbb{K})$ hanno dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. È un caso particolare del Teorema 2.5.3. \square

COROLLARIO 2.5.5. *Sia X una varietà topologica compatta. Allora i gruppi di coomologia singolare a coefficienti interi di X sono finitamente generati. Gli spazi di coomologia singolare di X a coefficienti in un campo sono spazi vettoriali di dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 2.1.6 e dal Corollario 2.5.4. \square

Una possibilità che abbiamo a disposizione per calcolare i gruppi di coomologia singolare è quello di calcolare i gruppi di omologia e poi applicare il Teorema 2.5.1 dei coefficienti universali. Utilizziamo questo metodo per calcolare i gruppi di coomologia delle sfere.

ESEMPIO 2.5.6. Siano $S^p \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ la sfera di dimensione $p > 0$ e G un gruppo abeliano. Allora $H^n(S^p, G) = G$ se $n = 0, p$ e $H^n(S^p, G) = 0$ se $n \neq 0, p$. Pure qui il gruppo $H_{n-1}(S^p)$ è abeliano libero per ogni n e quindi $H^n(X, G) \cong \text{Hom}(H_n(X), G)$.

Esercizi.

ESERCIZIO 2.18. Nella situazione del Teorema 2.5.1 provare che:

1) in generale ϵ non è iniettivo, utilizzando come controesempio $C_0 = C_1 = \mathbb{Z}$, $C_n = 0$ per $n > 1$, il differenziale d è la moltiplicazione per 2 e $G = \mathbb{Z}/2$;

2) se togliamo l'ipotesi che i gruppi C_i siano liberi, allora ϵ continua ad essere ben definito ma non più surgettivo in generale. Studiare il caso in cui $C_0 = C_1 = \mathbb{Z}/4$, $C_n = 0$ per $n \neq 0, 1$, il differenziale d è la moltiplicazione per 2 e $G = \mathbb{Z}/2$.

ESERCIZIO 2.19. Mostrare che il risultato del Corollario 2.3.5 è falso ogni volta che il gruppo C non è libero. Più precisamente, dimostrare che un gruppo abeliano C è libero se e solo se per ogni successione esatta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ l'applicazione $\text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(A, A)$ è surgettiva.

ESERCIZIO 2.20. Nelle notazioni del Teorema 2.5.1 dimostrare che il nucleo di ϵ è isomorfo al conucleo del morfismo di restrizione $\text{Hom}(Z_{n-1}(C_*), M) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}(C_*), M)$. Più in generale, se $A \subseteq Z_{n-1}(C_*)$ è un qualsiasi sottogruppo tale che $A + B_{n-1}(C_*) = Z_{n-1}(C_*)$, provare che il nucleo di ϵ è isomorfo al conucleo della restrizione $\text{Hom}(A, M) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}(C_*) \cap A, M)$ e usare questo fatto per una dimostrazione alternativa del Teorema 2.5.3.

ESERCIZIO 2.21. Siano $n \in \mathbb{Z}$ e (C_*, d) un complesso di catene di gruppi abeliani liberi tale che $H_n(C_*)$ e $H_{n-1}(C_*)$ siano finitamente generati. Dimostrare che il nucleo di $\epsilon: H^n(\text{Hom}(C_*, \mathbb{Z})) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z})$ è un gruppo finito e dedurre che i due gruppi $H_n(C_*)$ e $H^n(\text{Hom}(C_*, \mathbb{Z}))$ hanno lo stesso rango. (Suggerimento: usando il Teorema 2.5.3 ed alcuni esercizi precedenti, dimostrare nell'ordine: $\text{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z})$ e $\ker \epsilon$ sono finitamente generati, $\text{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z})$ e $H_n(C)$ hanno lo stesso rango, ogni elemento di $\ker \epsilon$ ha ordine finito e quindi $\ker \epsilon$ ha rango zero.)

ESERCIZIO 2.22. Sia X una varietà compatta, dimostrare che il rango di $H_p(X)$, detto **p -esimo numero di Betti** di X , e denotato usualmente $b_p(X)$ (talvolta $B_p(X)$) è uguale al rango di $H^p(X, \mathbb{Z})$ ed anche alla dimensione su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dello spazio vettoriale $H^p(X, \mathbb{K})$.

2.6. Mayer-Vietoris e cocatene piccole

Sia X uno spazio topologico, per ogni aperto aperto $U \subseteq X$ ed ogni $\alpha \in S^p(X, G)$ denotiamo con $\rho_{XU}(\alpha) \in S^p(U, G)$ la restrizione di $\alpha: \Delta(X)_p \rightarrow G$ al sottoinsieme $\Delta(U)_p$ dei p -simplessi singolari con immagine contenuta in U . Equivalentemente, $\rho_{XU}(\alpha) = i^*(\alpha)$ dove $i: U \rightarrow X$ denota il morfismo di inclusione.

Più in generale, se $V \subseteq U$ sono aperti di X , denotiamo con

$$\rho_{UV}: S^p(U, G) \rightarrow S^p(V, G)$$

l'applicazione che ad ogni cocatena $\alpha: \Delta(U)_p$ associa la sua restrizione a $\Delta(V)_p$. Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

- (1) ogni ρ_{UV} è un omomorfismo di gruppi;
- (2) $\rho_{UU} = \text{Id}$ per ogni aperto U ;
- (3) $\rho_{VW}\rho_{UV} = \rho_{UW}$ per ogni terna di aperti $W \subseteq V \subseteq U$.

Un piccolo abuso di notazione. Per semplicità di scrittura, dati $U \subseteq X$ aperto e $\alpha \in S^p(X, G)$, scriveremo $\alpha|_U = \rho_{XU}(\alpha) \in S^p(U, G)$ e chiameremo $\alpha|_U$ la restrizione di α ad U . Questa notazione semplificata risulta molto utile a condizione di tenere a mente che α non è una funzione definita su U ma su un qualcosa che dipende, in maniera naturale, da U . Ad esempio non dobbiamo cadere nel riflesso condizionato per cui, se $X = U \cup V$, $\alpha|_U = 0$ e $\alpha|_V = 0$, allora $\alpha = 0$: infatti nulla vieta che $\alpha(\phi) \neq 0$ per qualche semplice $\phi: \Delta^p \rightarrow X$ la cui immagine non è contenuta né in U né in V .

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ricoprimento aperto proprio dello spazio topologico X e denotiamo con $j: S_*(\mathcal{U}) \rightarrow S_*(X)$ il morfismo di inclusione, che per il teorema delle catene piccole è un quasi-isomorfismo di complessi. Fissato un gruppo abeliano G possiamo applicare $\text{Hom}(\cdot, G)$ ricavando il morfismo trasposto

$$j^\vee: S^*(X, G) = \text{Hom}(S_*(X), G) \rightarrow \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), G).$$

Più concretamente, j^\vee associa ad ogni catena $\alpha: \Delta(X)_p \rightarrow G$ la sua restrizione al sottoinsieme dei simplessi singolare con immagine contenuta in qualche aperto del ricoprimento.

TEOREMA 2.6.1 (delle cocatene piccole, I). *Nelle notazioni precedenti, il morfismo*

$$j^\vee: S^*(X, G) \rightarrow \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), G)$$

è un quasi-isomorfismo surgettivo di complessi.

DIMOSTRAZIONE. Dato che in generale il rasposto di un quasi-isomorfismo iniettivo non è un quasi-isomorfismo surgettivo, la dimostrazione richiede qualche considerazione aggiuntiva.

Denotando con $S_*(X, \mathcal{U})$ il conucleo di j , otteniamo una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani liberi

$$0 \rightarrow S_*(\mathcal{U}) \xrightarrow{j} S_*(X) \rightarrow S_*(X, \mathcal{U}) \rightarrow 0.$$

Segue infatti dalle definizioni che

$$S_*(X, \mathcal{U}) : \cdots \rightarrow S_2(X, \mathcal{U}) \rightarrow S_1(X, \mathcal{U}) \rightarrow S_0(X, \mathcal{U}) \rightarrow 0,$$

e $S_p(X, \mathcal{U}) = S_p(X)/S_p(\mathcal{U})$ è canonicamente isomorfo al gruppo abeliano libero generato dai p -simplessi singolari la cui immagine non è contenuta in alcun U_i .

Per il teorema delle catene piccole l'inclusione j è un quasi-isomorfismo e quindi, per la successione esatta lunga di omologia, il complesso $S_*(X, \mathcal{U})$ è aciclico. Per il Corollario 2.5.2 anche il complesso di cocatene $\text{Hom}(S_*(X, \mathcal{U}), G)$ è aciclico.

Applicando $\text{Hom}(\cdot, G)$, per il Corollario 2.3.5 si ottiene una successione esatta corta di complessi di cocatene

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(S_*(X, \mathcal{U}), G) \rightarrow S^*(X, G) \xrightarrow{j^\vee} \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), G) \rightarrow 0,$$

con $\ker j^\vee \cong \text{Hom}(S_*(X, \mathcal{U}), G)$ sottocomplesso aciclico di $S^*(X, G)$ e quindi con j^\vee quasi-isomorfismo. \square

Dal teorema delle cocatene piccole, gli stessi ragionamenti fatti per l'omologia ci conducono alla successione esatta di Mayer–Vietoris in coomologia.

TEOREMA 2.6.2 (Mayer–Vietoris in coomologia). *Sia $X = A \cup B$ con le parti interne di A e B che ricoprono X . Allora per ogni gruppo abeliano G si ha una successione esatta lunga di coomologia*

$$\cdots \rightarrow H^n(X, G) \rightarrow H^n(A, G) \oplus H^n(B, G) \rightarrow H^n(A \cap B, G) \rightarrow H^{n+1}(X, G) \rightarrow \cdots$$

DIMOSTRAZIONE. Nella dimostrazione di Mayer–Vietoris in omologia abbiamo considerato il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{A, B\}$ ed il diagramma di morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A \cap B) & \longrightarrow & S_*(A) \oplus S_*(B) & \longrightarrow & S_*(\mathcal{U}) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow j \\ & & & & & & S_*(X) \end{array}$$

con la riga superiore successione esatta corta e j quasi-isomorfismo. Applicando $\text{Hom}(\cdot, G)$, si ottiene il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} & & S^*(X, G) & & & & \\ & & \downarrow j^\vee & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), G) & \longrightarrow & S^*(A, G) \oplus S^*(B, G) & \longrightarrow & S^*(A \cap B, G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

con la riga inferiore esatta per il Corollario 2.3.5 e j^\vee quasi-isomorfismo.

Per concludere basta applicare la successione esatta lunga di coomologia. \square

Segnaliamo, a livello terminologico, che quando $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, la coomologia a coefficienti in G viene anche detta coomologia intera, razionale, reale e complessa, rispettivamente.

ESEMPIO 2.6.3 (Coomologia intera degli spazi proiettivi complessi). Come applicazione della successione esatta di Mayer–Vietoris in coomologia calcoliamo i gruppi di coomologia a coefficienti interi degli spazi proiettivi complessi $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$.

LEMMA 2.6.4. *Nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n > 0$, con coordinate omogenee z_0, \dots, z_n si considerino i due aperti*

$$U = \{z_0 \neq 0\}, \quad V = \mathbb{P}^n - \{[1, 0, \dots, 0]\}.$$

Allora $U \cup V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ e:

- (1) U è contraibile;
- (2) V ha il tipo di omotopia di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$;
- (3) $U \cap V$ ha il tipo di omotopia della sfera S^{2n-1} .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è identica a quella usata in [38] per dimostrare la semplice connessione e la riportiamo per comodità del lettore. L'aperto U è contraibile in quanto si ha un omeomorfismo

$$f: \mathbb{C}^n \rightarrow U, \quad f(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n],$$

che inoltre identifica $U \cap V$ con $\mathbb{C}^n - \{0\}$ che ha quindi il tipo di omotopia di S^{2n-1} .

L'iperpiano $H = \{z_0 = 0\} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ è contenuto in V ; l'applicazione

$$R: V \times [0, 1] \rightarrow V, \quad R([z_0, z_1, \dots, z_n], t) = [tz_0, z_1, \dots, z_n],$$

è continua, ben definita e mostra che H è un retratto per deformazione di V . \square

In particolare $U \cap V$ è connesso e lo stesso ragionamento fatto per le sfere mostra che $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) = 0$.

Dato che i gruppi di coomologia di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^0$ e delle sfere sono noti, è un semplice esercizio, usando Mayer-Vietoris ed induzione su n , dimostrare che:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) &= H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) = H^4(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) = \dots = H^{2n}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \\ H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{in tutti gli altri casi.} \end{aligned}$$

Inoltre, se $j: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ è l'inclusione di un iperpiano, allora $j^*: H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}, \mathbb{Z})$ è un isomorfismo per ogni $i \neq 2n$. Ne segue che per ogni retta proiettiva $L \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ il morfismo di inclusione induce un isomorfismo $H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{Z}) \cong H^2(L, \mathbb{Z})$.

Risultati analoghi valgono per i gruppi di coomologia a coefficienti in un qualsiasi gruppo. Inoltre, si può arrivare alla stessa conclusione calcolando, con Mayer-Vietoris, i gruppi di omologia singolare ed applicando il teorema dei coefficienti universali.

ESEMPIO 2.6.5 (Coomologia reale degli spazi proiettivi reali). Dimostriamo adesso che

$$H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } i = 0 \text{ oppure } i = n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sappiamo che $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e $H^0(S^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$, che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \cong S^1$ e che $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) = H^0(S^n, \mathbb{R})$ per ogni $n > 0$. Inoltre, abbiamo già dimostrato che l'applicazione indotta in coomologia reale dalla proiezione naturale $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è iniettiva. In particolare $H^i(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) = 0$ per ogni $i \neq 0, n$ e per concludere ci basta dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$H^n(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Sia dunque $n \geq 2$; osserviamo che il Lemma 2.6.4 vale, con la medesima dimostrazione, anche per spazi proiettivi reali, con l'unica differenza che $U \cap V$ ha il tipo di omotopia della sfera S^{n-1} . A differenza del caso complesso, $U \cap V$ risulta sconnesso per $n = 1$, e questo rende decisamente complicato il calcolo della coomologia intera.

La conclusione segue adesso per induzione su n e dal seguente frammento della successione esatta di Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} 0 = H^{n-1}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow H^{n-1}(V, \mathbb{R}) = H^{n-1}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathbb{R}) \rightarrow H^{n-1}(U \cap V, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \\ &\rightarrow H^n(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(V, \mathbb{R}) = H^n(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathbb{R}) = 0. \end{aligned}$$

Riprenderemo questo calcolo quando tratteremo orientabilità e dualità di Poincaré.

DEFINIZIONE 2.6.6. Una cocatena $\alpha \in S^p(X, G)$ si dice **localmente nulla** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto $x \in U$ tale che $\alpha|_U = 0$. Denotiamo con $K^p(X, G) \subseteq S^p(X, G)$ il sottogruppo delle cocatene localmente nulle.

Data $\alpha \in S^p(X, G)$, se $\alpha|_U = 0$ allora $(d\alpha)|_U = 0$ dato che $S_*(U)$ è un sottocomplesso di $S_*(X)$. Abbiamo quindi il sottocomplesso delle cocatene localmente nulle $K^*(X, G) \subseteq S^*(X, G)$.

Per ogni applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ si ha $f^*K^*(Y, G) \subseteq K^*(X, G)$; infatti, per ogni $\alpha \in K^*(Y, G)$ ed ogni $x \in X$ esiste un aperto $f(x) \in U \subseteq Y$ tale che $\alpha|_U = 0$ e quindi $(f^*\alpha)|_{f^{-1}(U)} = 0$.

DEFINIZIONE 2.6.7. Chiameremo il complesso quoziente

$$\mathcal{P}^*(X, G) = S^*(X, G)/K^*(X, G)$$

complesso delle **cocatene piccole** (stavolta piccole in senso assoluto) di X a coefficienti in G .

Notiamo che $K^0(X, G) = 0$, quindi $\mathcal{P}^0(X, G) = S^0(X, G) = \{\alpha: X \rightarrow G\}$ e quindi $H^0(\mathcal{P}^*(X, G))$ continua ad essere identificato in maniera naturale con il sottogruppo delle applicazioni $X \rightarrow G$ costanti sulle componenti connesse per archi.

TEOREMA 2.6.8 (delle cocatene piccole, II). *La proiezione al quoziente $S^*(X, G) \rightarrow \mathcal{P}^*(X, G)$ è un quasi-isomorfismo di complessi. In particolare, $H^p(X, G) \cong H^p(\mathcal{P}^*(X, G))$ per ogni p .*

DIMOSTRAZIONE. Per la successione esatta lunga di coomologia il teorema è del tutto equivalente a dire che il sottocomplesso $K^*(X, G)$ è aciclico, ossia una successione esatta.

Sia $\alpha \in K^p(X, G)$ tale che $d\alpha = 0$ e scegliamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di X tale che $\alpha|_{U_i} = 0$ per ogni i (ad esempio prendiamo per ogni x un suo intorno aperto dove α si annulla).

Per il teorema delle cocatene piccole il nucleo del morfismo

$$(2.5) \quad S^*(X, G) \xrightarrow{j^\vee} \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), G),$$

è un sottocomplesso aciclico di $S^*(X, G)$. Osserviamo anche che il nucleo di j^\vee è formato dalle cocatene che si annullano su tutti i semplici singolari la cui immagine è interamente contenuta in almeno un aperto U_i .

Per come abbiamo scelto \mathcal{U} in funzione di α abbiamo che $j^\vee(\alpha) = 0$, ossia il cociclo α appartiene al sottocomplesso aciclico $\ker j^\vee$ e dunque è un cobordo. A maggior ragione α è un cobordo in $K^*(X, G)$. \square

Dato che i sottocomplessi delle cocatene localmente nulle sono preservati dalle applicazioni continue, per ogni aperto $U \subseteq X$ il morfismo di restrizione $\rho_{XV}: S^*(X, G) \rightarrow S^*(U, G)$ si fattorizza ad un morfismo di complessi $\mathcal{P}^*(X, G) \rightarrow \mathcal{P}^*(U, G)$.

Nel seguito di queste note, avremo bisogno della seguente conseguenza del Teorema 2.6.8.

COROLLARIO 2.6.9. *Sia X uno spazio contraibile, allora si ha una successione esatta*

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\epsilon^\vee} \mathcal{P}^0(X, G) \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{P}^1(X, G) \xrightarrow{d^\vee} \dots,$$

dove ϵ^\vee associa ad ogni $a \in G$ l'applicazione costante $a: X \rightarrow G$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che X è connesso per archi e la proiezione $S^*(X, G) \rightarrow \mathcal{P}^*(X, G)$ è un quasi-isomorfismo. Dunque

$$H^0(\mathcal{P}^*(X, G)) = H^0(X, G) = \{\alpha: X \rightarrow G \text{ costanti}\}$$

e $H^p(\mathcal{P}^*(X, G)) = 0$ per ogni $p > 0$. \square

2.7. Coomologia di Alexander–Spanier

Denotiamo con E^p la base canonica di \mathbb{R}^{p+1} , ossia l'insieme ordinato dei vertici del semplice topologico standard Δ^p ; le applicazioni faccia δ_i preservano i vertici dei semplici e quindi $\delta_i: E^{p-1} \rightarrow E^p$ per ogni $0 \leq i \leq p$.

Per ogni spazio topologico X denotiamo con $E(X)_p$ l'insieme di tutte le applicazioni $f: E^p \rightarrow X$. Per ogni $p \geq 0$ esiste una ovvia bigezione

$$E(X)_p \rightarrow X^{p+1}, \quad f \mapsto (f(e_0), \dots, f(e_p)),$$

ed una ovvia applicazione

$$r: \Delta(X)_p \rightarrow E(X)_p, \quad f \mapsto f|_{E_p}.$$

In generale r non è surgettiva, ma lo diventa se X è un convesso oppure se possiede la topologia banale.

Sia G un gruppo abeliano fissato e denotiamo con $C^p(X, G) = \{f: E(X)_p \rightarrow G\}$. La composizione a destra con r definisce quindi degli omomorfismi $r^*: C^p(X, G) \rightarrow S^p(X, G)$. Definendo gli omomorfismi

$$\partial: C^{p-1}(X, G) \rightarrow C^p(X, G), \quad (\partial f)(\phi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f(\phi \circ \delta_i),$$

si ha evidentemente $r^*\partial = dr^*$, dove d denota in differenziale del complesso $S^*(X, G)$. Si ha inoltre $\partial^2 = 0$; la dimostrazione è del tutto simile a quella del Lemma 1.2.5 e viene pertanto omessa. Alternativamente, si può osservare che i gruppi $C^p(X, G)$ e le applicazioni ∂ non dipendono affatto dalla topologia di X , quindi possiamo mettere su X la topologia banale in modo da avere r^* iniettiva e quindi $0 = d^2r^* = dr^*\partial = r^*\partial^2$ implica $\partial^2 = 0$.

In questo modo abbiamo trovato un morfismo di complessi di cocatene

$$r^*: C^*(X, G) \rightarrow S^*(X, G).$$

Dato che il complesso $C^*(X, G)$ non dipende dalla topologia di X non ci aspettiamo nulla di interessante dai suoi gruppi di coomologia. Infatti, si ha

$$H^0(C^*(X, G)) = Z^0(C^*(X, G)) = \{f: X \rightarrow G \text{ costanti}\} = G,$$

e $H^n(C^*(X, G)) = 0$ per ogni $n > 0$. Per dimostrarlo conviene interpretare $C^p(X, G)$ come il gruppo di tutte le applicazioni $f: X^{p+1} \rightarrow G$, con il differenziale ∂ che diventa

$$\partial: C^{p-1}(X, G) \rightarrow C^p(X, G), \quad \partial f(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p).$$

Se $f \in C^0(X, G)$ allora $\partial f(x, y) = f(y) - f(x)$ e quindi $\partial f = 0$ se e solo se f è costante.

Se $f \in Z^p(C^*(X, G))$ con $p > 0$, scegliamo un punto $z \in X$ e definiamo

$$g \in C^{p-1}(X, G), \quad g(y_1, \dots, y_p) = f(z, y_1, \dots, y_p), \quad \forall y_1, \dots, y_p \in X.$$

Dal fatto che $\partial f = 0$ segue in particolare

$$\partial f(z, x_0, x_1, \dots, x_p) = 0 \quad \forall x_0, \dots, x_p \in X,$$

che si può riscrivere come

$$f(x_0, x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f(z, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \partial g(x_0, x_1, \dots, x_p).$$

Adesso facciamo intervenire la topologia di X introducendo il sottocomplesso $N^*(X, G) \subseteq C^*(X, G)$ delle applicazioni nulle in un intorno della diagonale piccola;¹ più precisamente, un'applicazione $f: X^{p+1} \rightarrow G$ appartiene a $N^p(X, G)$ se per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che f si annulla su U^{p+1} .

DEFINIZIONE 2.7.1. Definendo $\mathcal{A}^p(X, G) = C^p(X, G)/N^p(X, G)$ per ogni p , il complesso quoziente $(\mathcal{A}^*(X, G), \partial)$ viene detto **complesso delle cocatene di Alexander–Spanier**. Conseguentemente, chiameremo

$$H_{AS}^*(X, G) := H^*(\mathcal{A}^*(X, G))$$

coomologia di Alexander–Spanier di X a coefficienti in G .

ESEMPIO 2.7.2. Per ogni spazio X ed ogni gruppo G si ha

$$H_{AS}^0(X, G) = Z^0(\mathcal{A}^*(X, G)) = \{f: X \rightarrow G \text{ localmente costanti}\}.$$

Infatti, $\mathcal{A}^0(X, G) = C^0(X, G)$ e per una $f: X \rightarrow G$ vale $\partial f \in N^1(X, G)$ se e solo se per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che $\partial f(y, z) = f(z) - f(y) = 0$ per ogni $y, z \in U$.

¹Diagonale piccola = $\{(x, x, \dots, x) \mid x \in X\}$, diagonale grande = $\{(x_0, \dots, x_p) \mid \exists i \neq j \text{ tali che } x_i = x_j\}$.

Nelle notazioni della sezione precedente, è chiaro che se $f \in N^p(X, G)$ allora $r^*(f) \in K^p(X, G)$ e quindi r^* si fattorizza ad un morfismo di complessi

$$r^* : \mathcal{A}^*(X, G) \rightarrow \mathcal{P}^*(X, G)$$

che induce un morfismo naturale $H_{AS}^*(X, G) \rightarrow H^*(X, G)$ tra la coomologia di Alexander–Spanier e la coomologia singolare.

In generale il morfismo $H_{AS}^*(X, G) \rightarrow H^*(X, G)$ si guarda bene dall’essere bigettivo; già a livello di H^0 , da una parte abbiamo le funzioni localmente costanti, dall’altra le funzioni costanti sulle componenti connesse per archi; come esempio potete considerare $X = \mathbb{Q}$ con la topologia euclidea.

Concettualmente, la differenza dipende dal fatto che, detto in maniera molto vaga, la coomologia singolare tiene conto sia della struttura locale che della struttura globale dello spazio topologico, mentre la coomologia di Alexander–Spanier solamente della struttura globale.

Entrando più in dettaglio, a differenza di quanto accade in coomologia singolare (vedi Esercizio 2.23), nella coomologia di Alexander–Spanier ogni cociclo di dimensione positiva è localmente un cobordo, nel senso descritto dal seguente lemma.

LEMMA 2.7.3. *Siano U un aperto in uno spazio topologico, $x \in U$ un suo punto, G un gruppo abeliano, $q > 0$ e $\alpha \in \mathcal{A}^q(U, G)$ tale che $\partial\alpha = 0$. Allora esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ ed una cocatena $\beta \in \mathcal{A}^{q-1}(V, G)$ tale che $\partial\beta = \alpha|_V$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in C^n(U, G)$ un sollevamento di α . Dal fatto che $\partial\alpha = 0$ segue che $\partial f \in N^{n+1}(U, G)$ e quindi esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ tale che $\partial f|_V = 0$. Siccome $q > 0$ esiste $g \in C^{q-1}(V, G)$ tale che $\partial g = f|_V$ ed a maggior ragione $\alpha|_V = \partial\beta$, dove β è la classe di g in $\mathcal{A}^{q-1}(V, G)$. \square

Non tratteremo la coomologia di Alexander–Spanier in profondità; segnaliamo solo che anchessa è un invariante omotopico, ossia vale il risultato della Proposizione 2.4.5, mentre per avere altre proprietà tipiche delle teorie coomologiche occorre aggiungere opportune ipotesi sulla topologia, vedi [48]. Ritroveremo il complesso delle cocatene di Alexander–Spanier tra gli esempi di risoluzioni fini di fasci costanti in spazi paracompatti di Hausdorff.

Esercizi.

ESERCIZIO 2.23. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ l’unione delle circonferenze di centro $(1/n, 0)$ e raggio $1/n$, al variare di n tra gli interi positivi. Trovare un cociclo singolare in X che non sia localmente un cobordo, e più precisamente che non sia un cobordo la sua restrizione ad un qualunque intorno di $(0, 0)$.

Fasci

In 1940, the French mathematician and artillery officer Jean Leray was taken prisoner by the Germans. He told his captors that he was a topologist, fearful that if they discovered his true area of expertise, hydrodynamics, they would force him to aid the German war effort. For the nearly five years of his imprisonment, Leray kept up this subterfuge by carrying out research in topology, a branch of mathematics that studies deformable shapes. He wound up creating one of the most revolutionary ideas in modern mathematics: the notion of a “sheaf”.

(Incipit di [46]).

fàscio *s. m.* [lat. *fascis*]. *Quantità più o meno grande di oggetti della stessa natura, per lo più di forma allungata, come legna, spighe, erbe eccetera.*

(Vocabolario Treccani).

In Molière’s play Le Bourgeois Gentilhomme, M. Jourdain was amazed to learn from his grammar teacher that he had been speaking all of his life in prose! In the same way, I hope to persuade you that you have been using some of the ideas of sheaf theory without knowing it ever since your first calculus course.

(Miles Reid: Chapters on algebraic surfaces).

3.1. Germi di funzioni differenziabili

Salvo avviso contrario, per ogni insieme S ed ogni gruppo abeliano G , interpreteremo la collezione $\{f: S \rightarrow G\} = \prod_{s \in S} G$ come gruppo abeliano. In particolare, l’insieme delle applicazioni dal vuoto ad un qualunque gruppo abeliano è il gruppo banale.

Sia $n \geq 0$ un intero fissato. Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ denotiamo

$$C^k(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^k\}, \quad 0 \leq k \leq \infty.$$

È ben noto dai corsi di analisi che somme e prodotti di funzioni di classe C^k sono ancora di classe C^k ; questo implica che gli insiemi $C^k(U)$ ammettono le seguenti strutture algebriche:

- (1) $C^k(U)$ è uno spazio vettoriale reale;
- (2) $C^k(U)$ è un anello commutativo con unità (la funzione costantemente uguale ad 1).

Inoltre, per ogni $h \geq k$ si ha che $C^h(U)$ è un sottospazio vettoriale ed un sottoanello di $C^k(U)$.

Tali proprietà algebriche sono possedute anche da altri insiemi di funzioni; per i nostri usi risulteranno particolarmente interessanti i seguenti:

$$\mathcal{DR}(U) = \{\text{tutte le funzioni } U \rightarrow \mathbb{R}\} = \prod_{i \in U} \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ localmente costante}\}.$$

Chiameremo $\mathcal{DR}(U)$ spazio delle **funzioni discontinue**, o delle **sezioni discontinue di \mathbb{R}** , sull’aperto U (il senso di questa seconda terminologia sarà spiegato più avanti).

Per definizione, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente costante se per ogni punto $p \in U$ esiste un intorno $p \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che f sia costante su $U \cap V$. Ogni funzione localmente costante è costante in ogni componente connessa; negli spazi localmente connessi vale anche il viceversa.

Notiamo anche che $\mathbb{R}(U)$ è un sottospazio vettoriale ed un sottoanello di $C^\infty(U)$.

Vogliamo adesso studiare come si comportano tali spazi al variare di U tra gli aperti di \mathbb{R}^n ; per concretizzare la trattazione studieremo solo le funzioni C^∞ , ma tutto si applica, mutatis

mutandis, anche alle altre situazioni (con l'ovvia eccezione dell'Esempio 3.1.1). Iniziamo verificando 5 proprietà basilari F_0, \dots, F_4 che poi saranno utilizzate per definire assiomaticamente la nozione di fascio.

Proprietà F0. Si ha $C^\infty(\emptyset) = 0$.

Se $V \subseteq U$ sono aperti, la restrizione a V di una funzione C^∞ su U è ancora di classe C^∞ ; questo perché essere C^∞ è una proprietà locale, ossia dipende solo dal comportamento in intorni sufficientemente piccoli di ogni punto. Abbiamo quindi un'applicazione di restrizione

$$\rho_{UV}: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(V), \quad \rho_{UV}(f) = f|_V,$$

che è un omomorfismo di gruppi abeliani, un'applicazione lineare ed un omomorfismo di anelli.

Proprietà F1. $\rho_{UU} = \text{Id}$, ossia per ogni $f \in C^\infty(U)$ vale $\rho_{UU}(f) = f|_U = f$.

ESEMPIO 3.1.1. Siano x_1, \dots, x_n le coordinate di \mathbb{R}^n , dato che le derivate parziali di una funzione f in un punto p dipendono solo dai valori di f in intorni arbitrariamente piccoli, per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ si hanno i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_i}} & C^\infty(U) & i = 1, \dots, n. \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho_{UV} \\ C^\infty(V) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_i}} & C^\infty(V) \end{array}$$

Proprietà F2. Per ogni terna di aperti $W \subseteq V \subseteq U$ si ha $\rho_{VW}\rho_{UV} = \rho_{UW}$, ossia per ogni $f \in C^\infty(U)$ vale $(f|_V)|_W = f|_W$.

Siano $(U_i)_{i \in I}$ una collezione indicizzata di aperti di \mathbb{R}^n e $U = \cup_i U_i$ la loro unione. Per ogni coppia di indici $i, j \in I$, possibilmente ripetuti, denotiamo $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Proprietà F3. Per una funzione $f \in C^\infty(U)$ vale $f = 0$ se e solo se $\rho_{UU_i}(f) = f|_{U_i} = 0$ per ogni $i \in I$.

Infatti, se $f|_{U_i} = 0$ per ogni i , allora per ogni $p \in U$ esiste un indice i tale che $p \in U_i$ e quindi $f(p) = f|_{U_i}(p) = 0$.

Proprietà F4. Sia data, per ogni $i \in I$ una funzione $f_i \in C^\infty(U_i)$. Se $\rho_{U_i U_{ij}}(f_i) = \rho_{U_j U_{ij}}(f_j)$ per ogni i, j allora esiste $f \in C^\infty(U)$ tale che $\rho_{UU_i}(f) = f_i$ per ogni i .

Infatti, possiamo definire $f \in \mathcal{D}\mathbb{R}(U)$ ponendo $f(p) = f_i(p)$ se $p \in U_i$; si tratta di una buona definizione in quanto, se $p \in U_i \cap U_j$ allora

$$f_j(p) = f_j|_{U_{ij}}(p) = f_i|_{U_{ij}}(p) = f_i(p).$$

Per costruzione $f|_{U_i} = f_i$ e la funzione f risulta di classe C^∞ dato che lo è su ogni aperto U_i .

Fissato un punto $p \in \mathbb{R}^n$, chiameremo **funzione C^∞ in un intorno di p** una qualunque coppia (U, f) con $p \in U$ aperto e $f \in C^\infty(U)$. Denoteremo con

$$C^\infty((p)) = \{(U, f) \mid p \in U, f \in C^\infty(U)\}$$

l'insieme delle funzioni C^∞ in un intorno di p . Per ogni aperto $p \in U$ esiste una naturale applicazione iniettiva $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty((p))$, $f \mapsto (U, f)$.

L'insieme $C^\infty((p))$ non possiede strutture algebriche interessanti e, in analogia con molte altre situazioni (ad esempio il gruppo fondamentale), risulta utile considerarne il quoziente per una opportuna relazione di equivalenza.

Definiamo la relazione \sim su $C^\infty((p))$ ponendo $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste un aperto $p \in A \subseteq U \cap V$ tale che $f|_A = g|_A$. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono evidenti, mentre se $(U, f) \sim (V, g)$ e $(V, g) \sim (W, h)$ vuol dire che esistono due aperti $p \in A \subseteq U \cap V$ e $p \in B \subseteq V \cap W$ tali che $f|_A = g|_A$, $g|_B = h|_B$. Ma allora $p \in A \cap B \subseteq U \cap W$ e $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}$.

Denotiamo con $C_p^\infty = C^\infty((p))/\sim$ il corrispondente insieme quoziente, e con $[U, f] \in C_p^\infty$ la classe di equivalenza della coppia (U, f) . Gli elementi di C_p^∞ sono detti **germi** di funzioni C^∞ nel punto p .

Prima di studiare le strutture algebriche su C_p^∞ è utile fare alcune semplici osservazioni sulla relazione \sim .

- (1) Se $(U, f) \in C^\infty((p))$ e $p \in V \subseteq U$, allora $[U, f] = [V, f|_V]$, in particolare, se $f = c$ è una funzione costante, allora $[U, c] = [V, c]$ per ogni coppia U, V di intorni aperti di p .
- (2) Per ogni $\xi_1, \dots, \xi_n \in C_p^\infty$ ed ogni aperto $p \in U$, esiste un aperto $p \in V \subseteq U$ e funzioni $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(V)$ tali che $\xi_i = [V, f_i]$ per ogni i . Infatti se $\xi_i = [W_i, g_i]$ basta considerare $V = U \cap W_1 \cap \dots \cap W_n$ e $f_i = g_i|_V$.
- (3) Per ogni aperto $p \in U$ consideriamo l'applicazione

$$\eta_{U,p}: C^\infty(U) \rightarrow C_p^\infty, \quad \eta_{U,p}(f) \mapsto [U, f].$$

Per i punti precedenti:

- (a) $\eta_{U,p} = \eta_{V,p} \rho_{UV}$ per ogni $p \in V \subseteq U$ aperti;
- (b) per ogni intorno aperto $p \in U$ si ha $C_p^\infty = \bigcup_{p \in V \subseteq U} \text{Im}(\eta_{V,p})$.

Il quoziente C_p^∞ possiede una struttura di spazio vettoriale e anello commutativo con le operazioni:

- (1) $[U, f] + [V, g] = [U \cap V, f + g]$;
- (2) $c[U, f] = [U, cf]$, $c \in \mathbb{R}$;
- (3) $[U, f][V, g] = [U \cap V, fg]$.

La verifica che tali operazioni sono ben definite è molto semplice; ad esempio, se $[U, f] = [U', f']$ e $[V, g] = [V', g']$ vuol dire che esistono aperti $p \in A \subseteq U \cap U'$, $p \in B \subseteq V \cap V'$ tali che $f|_A = f'|_A$ e $g|_B = g'|_B$. Ma allora

$$[U \cap V, f + g] = [A \cap B, f + g] = [A \cap B, f' + g'] = [U' \cap V', f' + g'].$$

Inoltre tali operazioni sono le uniche che rendono tutte le applicazioni $\eta_{U,p}$ lineari ed omomorfismi di anelli: l'unicità segue da $C_p^\infty = \bigcup_{p \in V \subseteq U} \text{Im}(\eta_{V,p})$.

LEMMA 3.1.2. *L'applicazione*

$$e: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad e[U, f] = f(p),$$

è ben definita ed è un omomorfismo di anelli surgettivo. Il suo nucleo $\mathfrak{m}_p = \ker e$ è l'unico ideale massimale di C_p^∞ .

DIMOSTRAZIONE. La prima parte segue immediatamente dalle definizioni. Dato che \mathbb{R} è un campo, si ha che \mathfrak{m}_p è massimale. Per dimostrare che ogni ideale di C_p^∞ è contenuto in \mathfrak{m}_p basta provare che un germe $[U, f]$ è invertibile se $f(p) \neq 0$. A tal fine basta osservare che $V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ è un intorno aperto di p , $1/f \in C^\infty(V)$ e $[U, f][V, 1/f] = [V, 1] = 1$. \square

Altre funzioni di uso comune sono quelle a supporto compatto.

DEFINIZIONE 3.1.3. Siano X uno spazio topologico e G un gruppo abeliano; un'applicazione $f: X \rightarrow G$ si dice a **supporto compatto** se esiste un sottospazio $K \subseteq X$ chiuso e compatto tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$.

Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce $C^\infty(U)_0 \subseteq C^\infty(U)$ come il sottoinsieme delle funzioni a supporto compatto. È chiaro che si tratta di un sottospazio vettoriale e di un sottoanello.

È importante osservare che le funzioni a supporto compatto non soddisfano la proprietà F1: se $f \in C^\infty(U)_0$ e $V \subseteq U$ è un aperto, in generale la restrizione $f|_V$ non ha supporto compatto. È invece definita una inclusione naturale $i_{VU}: C^\infty(V)_0 \rightarrow C^\infty(U)_0$ ottenuta estendendo f a 0:

$$i_{VU}(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \in U - V \end{cases}$$

Infatti, se $K \subseteq V$ è un compatto (automaticamente chiuso perché V è di Hausdorff) tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in V - K$, allora K è chiuso in U e si può scrivere

$$i_{VU}(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \in U - K \end{cases}$$

Ne segue che $i_{VU}(f)$ è di classe C^∞ per la proprietà F4.

Invece, se prendiamo gli spazi duali e definiamo $D(U) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U)_0, \mathbb{R})$ per ogni aperto U e $\rho_{UV} = i_{VU}^\vee$ per ogni $V \subseteq U$, allora valgono le proprietà F0, F1, F2, ossia $D(\emptyset) = 0$, $\rho_{UU} = \text{Id}$ e $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}$. In realtà valgono anche F3 ed F4, ma questo lo dimostreremo più avanti usando le partizioni dell'unità.

3.2. Prefasci

Uno dei concetti più importanti nella matematica contemporanea è quello di *fascio*, introdotto da J. Leray e poi leggermente modificato da H. Cartan nel 1950. La definizione originale di Cartan era di tipo topologico, cf. [32, 39, 47], ma ben presto si è affermato un approccio equivalente di tipo algebrico, cf. [12, 19], basato sulla nozione di *prefascio*, che adesso introdurremo.

DEFINIZIONE 3.2.1. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** \mathcal{F} di gruppi abeliani su X è il dato di:

- (1) un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$;
- (2) un omomorfismo di gruppi $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ per ogni inclusione di aperti $V \subseteq U$.

Il dato precedente deve soddisfare le seguenti condizioni:

- F0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
- F1) $\rho_{UU}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è l'identità per ogni U ;
- F2) se $W \subseteq V \subseteq U$ sono inclusioni di aperti, allora $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(W)$.

I morfismi ρ_{UV} vengono detti morfismi di **restrizione** del prefascio; molto spesso, per semplicità notazionale, se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subseteq U$ si scrive $\rho_{UV}(s) = s|_V$.

Se \mathcal{F} è un prefascio su X , ogni coppia (U, s) , con $U \subseteq X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, viene detta una **sezione** di \mathcal{F} . Meno genericamente, per un aperto fissato U gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ vengono detti le sezioni di \mathcal{F} su U , mentre gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(X)$ sono detti **sezioni globali** di \mathcal{F} .

Tenendo conto dell'assioma F0, per descrivere un prefascio è sufficiente definire le sue sezioni ed i morfismi di restrizione esclusivamente per gli aperti non vuoti.

ESEMPIO 3.2.2. Il prefascio delle funzioni reali continue in uno spazio topologico X è definito, ponendo

$$C_X(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\} \quad \forall U \subseteq X \text{ aperto,}$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

ESEMPIO 3.2.3. Il prefascio delle funzioni C^∞ su \mathbb{R}^n è definito, ponendo

$$C_{\mathbb{R}^n}^\infty(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty\} \quad \forall U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto,}$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

Si noti che $C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ è un **sottoprefascio** di $C_{\mathbb{R}^n}$. La nozione di sottoprefascio non presenta grosse sorprese: dato un prefascio \mathcal{F} con funzioni di restrizione ρ_{UV} , un sottoprefascio $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ è il dato, per ogni aperto U , di un sottogruppo $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ tale che, per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$, si ha $\rho_{UV}(\mathcal{G}(U)) \subseteq \mathcal{G}(V)$. Le restrizioni a \mathcal{G} delle funzioni di restrizione di \mathcal{F} inducono una struttura di prefascio su \mathcal{G} .

ESEMPIO 3.2.4. Sia X uno spazio topologico. Ad ogni gruppo abeliano G possiamo associare tre prefasci \underline{G}_X , G_X e $\mathcal{D}G_X$ su X , dove per ogni aperto non vuoto U si definisce:

$$\underline{G}_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ costante}\},$$

$$G_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ localmente costante}\},$$

$$\mathcal{D}G_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ senza restrizioni}\} \cong \prod_{x \in U} G.$$

Come sopra i morfismi ρ_{UV} sono quelli naturali di restrizione. Poiché somma e differenza di due funzioni (localmente) costanti sono ancora (localmente) costanti, ogni $G_X(U)$ è in modo naturale un gruppo abeliano e $\underline{G}_X(U)$ un suo sottogruppo. Dunque G_X è un prefascio su X e \underline{G}_X un suo sottoprefascio. Similmente, G_X è un sottoprefascio di $\mathcal{D}G_X$.

Si noti che prendendo i gruppi quoziente possiamo definire un terzo prefascio

$$\mathcal{F}(U) = \frac{G_X(U)}{\underline{G}_X(U)}$$

con la proprietà che $\mathcal{F}(U) = 0$ se U è connesso.

OSSERVAZIONE 3.2.5. Le funzioni localmente costanti sono costanti sulle componenti connesse. Infatti, un'applicazione $f: X \rightarrow G$ è localmente costante se e solo se ogni fibra $f^{-1}(a)$, $a \in G$, è aperta in X . Dunque X è unione disgiunta degli aperti $f^{-1}(a)$ e se X è connesso si deve avere $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ per al più un valore $a \in G$.

Il viceversa è in generale falso; ad esempio, l'applicazione

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = b \text{ se } x = \frac{a}{b}, \quad b > 0, \quad MCD(a, b) = 1,$$

non è localmente costante pur essendo costante su ogni componente connessa.

ESEMPIO 3.2.6. Nello studio della coomologia singolare abbiamo incontrato molti prefasci:

$$U \mapsto S^p(U, G), \mathcal{P}^p(U, G), H^p(U, G), \text{Hom}(H_p(U), G) \text{ eccetera.}$$

DEFINIZIONE 3.2.7 (germe e spiga). Sia \mathcal{F} un prefascio con funzioni di restrizione ρ_{UV} su uno spazio topologico X e sia $x \in X$ un punto fissato: sull'insieme

$$\mathcal{F}((x)) = \{(U, s) \mid U \text{ intorno aperto di } x, s \in \mathcal{F}(U)\} = \{\text{sezioni intorno a } x\}$$

si consideri la relazione di equivalenza:

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \text{ aperto tale che } x \in W \subseteq U \cap V \text{ e } s|_W = t|_W.$$

La verifica che \sim è una relazione di equivalenza è immediata. Definiamo la **spiga** di \mathcal{F} in x come l'insieme quoziente:

$$\mathcal{F}_x = \{\text{germi di sezioni di } \mathcal{F} \text{ in } x\} = \frac{\mathcal{F}((x))}{\sim} = \frac{\{(U, s) \mid x \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim}.$$

Equivalentemente \sim è la più piccola relazione di equivalenza tale che, per ogni $V \subseteq U$ ed ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha $(U, s) \sim (V, s|_V)$.

Denoteremo con $[U, s] \in \mathcal{F}_x$ la classe di equivalenza della coppia (U, s) , che chiameremo **germe** (=germoglio) di s nel punto x . Per alleggerire la notazione, risulta utile denotare con $s_x \in \mathcal{F}_x$ il germe in x di una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$, beninteso quando $x \in U$.

Ogni spiga è un gruppo abeliano, dove l'operazione di somma è indotta per passaggio al quoziente dalle applicazioni

$$[U, s] + [V, t] = [W, s|_W + t|_W], \quad x \in W \subseteq V \cap U.$$

L'elemento neutro è chiaramente $[X, 0]$ e l'opposto è $-[U, s] = [U, -s]$.

Notiamo che per ogni intorno aperto U ed ogni $x \in U$ l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_x, \quad s \mapsto s_x = [U, s],$$

è un omomorfismo di gruppi (per pedanteria dovremmo scrivere $\eta_{U,x}$ al posto di η , ma è preferibile essere noi ad abusare, leggermente, delle notazioni piuttosto che subire le loro vessazioni).

Segue dalla definizione di spiga che ogni germe in \mathcal{F}_x appartiene all'immagine di $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_x$ per qualche intorno aperto U , e quindi anche per tutti gli intorni aperti di x contenuti in U .

Dato che intersezione finita di intorni aperti è ancora un intorno aperto, ogni insieme finito di germi $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{F}_x$ appartiene all'immagine di $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_x$ per qualche intorno aperto U . Da questo segue immediatamente che la struttura di gruppo su \mathcal{F}_x è l'unica che rende tutte le applicazioni $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_x$ omomorfismi.

ESEMPIO 3.2.8 (importante). Le spighe del prefascio G_X delle funzioni localmente costanti (Esempio 3.2.4) sono tutte isomorfe al gruppo G . Infatti, identificando G con il sottogruppo di $G_X(U)$ delle applicazioni costanti, per ogni intorno aperto U del punto x , sono ben definiti due omomorfismi

$$f: G \rightarrow (G_X)_x, \quad f(a) = [X, a], \quad g: (G_X)_x \rightarrow G, \quad g[U, \alpha] = \alpha(x).$$

Dato che $gf = \text{Id}_G$ basta provare che f è surgettiva: dato un germe $[U, \alpha]$, esiste un aperto $x \in V$ tale che $\alpha|_V$ è costante, diciamo $\alpha(y) = a$ per ogni $y \in V$. Ma allora

$$[U, \alpha] = [V, \alpha|_V] = [V, a] = [X, a] = f(a).$$

DEFINIZIONE 3.2.9. Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due prefasci sullo stesso spazio topologico X . Un **morfismo** $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è il dato, per ogni aperto $U \subseteq X$, di un omomorfismo di gruppi abeliani $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$. Gli omomorfismi f_U devono commutare con i morfismi di restrizione, ossia per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ si deve avere un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

La composizione di morfismi è definita in maniera prevedibile: $(g \circ f)_U = g_U \circ f_U$ se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$. Anche la nozione di isomorfismo di prefasci non riserva alcuna sorpresa e la riportiamo su richiesta degli uffici amministrativi: un morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un isomorfismo se $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo di gruppi per ogni aperto U .

L'insieme dei morfismi tra due prefasci è un gruppo abeliano, con la somma definita in maniera prevedibile

$$f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}, \quad (f + g)_U = f_U + g_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U),$$

e che ha come elemento neutro il morfismo nullo $\mathcal{F} \xrightarrow{0} \mathcal{G}$, ossia il morfismo che manda tutte le sezioni in 0.

ESEMPIO 3.2.10. Ogni omomorfismo di gruppi abeliani $A \rightarrow B$ induce in maniera naturale un morfismo tra i rispettivi prefasci di funzioni localmente costanti $A_X \rightarrow B_X$.

ESEMPIO 3.2.11. Dato che ogni funzione localmente costante è anche continua, si ha un ovvio morfismo di prefasci $\mathbb{R}_X \rightarrow C_X$, che per ogni aperto U corrisponde all'inclusione

$$\{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ localmente costante}\} \subseteq \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}.$$

Ogni morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce canonicamente dei morfismi tra le rispettive spighe: per ogni punto $x \in X$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ che, per ogni intorno aperto $x \in U$, rende il diagramma

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

commutativo: più precisamente, $f_x[U, s] = [U, f_U(s)]$. Per verificare che f_x è ben definito, supponiamo che $[U, s] = [V, t]$ e dimostriamo che $[U, f_U(s)] = [V, f_V(t)]$; se $x \in W \subseteq U \cap V$ è tale che $s|_W = t|_W$ allora

$$[U, f_U(s)] = [W, f_U(s)|_W] = [W, f_W(s|_W)] = [W, f_W(t|_W)] = [W, f_V(t)|_W] = [V, f_V(t)].$$

Un isomorfismo di prefasci induce isomorfismi sulle spighe, ma il viceversa è generalmente falso.

LEMMA 3.2.12. *Per un morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ su X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è surgettivo per ogni $x \in X$;
- (2) ogni sezione di \mathcal{G} è localmente nell'immagine di \mathcal{F} ; con ciò intendiamo che per ogni $t \in \mathcal{G}(U)$ ed ogni $x \in U$ esistono un aperto $x \in V \subseteq U$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $f_V(s) = t|_V$.

È importante osservare che nel punto (2) l'aperto V dipende da t .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f_x surgettivo per ogni x . Siano U aperto, $t \in \mathcal{G}(U)$, $x \in U$ e scegliamo $s_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(s_x) = t_x$. Se $s_x = [W, s]$ con $x \in W$ e $s \in \mathcal{F}(W)$, allora $[U, t] = [W, f_W(s)] \in \mathcal{G}_x$, e quindi esiste un aperto $V \subseteq W \cap U$ tale che $f_V(s) = t|_V$.

Viceversa, supponiamo che ogni sezione di \mathcal{G} sia localmente nell'immagine di \mathcal{F} e prendiamo $t_x \in \mathcal{G}_x$. Se $t_x = [U, t]$, esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $f_V(s) = t|_V$ e basta osservare che il germe di $t|_V$ in x è ancora t_x che quindi risulta uguale a $f_x(s_x)$. \square

OSSERVAZIONE 3.2.13. Per completezza, informiamo il lettore che il raccordo tra la teoria 'topologica' dei fasci e quella tramite prefasci avviene passando attraverso i cosiddetti spazi étale.¹ Dato un prefascio \mathcal{F} su X ha senso definire l'insieme

$$\text{et}(\mathcal{F}) = \{(x, s_x) \in x \in X, s_x \in \mathcal{F}_x\} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x,$$

dove \coprod è il simbolo di unione disgiunta. Ogni sezione $f \in \mathcal{F}(U)$ definisce un sottoinsieme di $\text{et}(\mathcal{F})$

$$U_h = \{(x, h_x) \mid x \in U\} \subseteq \text{et}(\mathcal{F})$$

dove $h_x \in \mathcal{F}_x$ denota il germe della sezione h nel punto x .

LEMMA 3.2.14. *La famiglia di tutti i sottoinsiemi U_h è una base di una topologia su $\text{et}(\mathcal{F})$ che rende la proiezione*

$$p: \text{et}(\mathcal{F}) \rightarrow X, \quad p(x, s) = x,$$

un omeomorfismo locale.

DIMOSTRAZIONE. Dato che l'unione degli U_h è tutto $\text{et}(\mathcal{F})$, per dimostrare che sono base di una topologia basta provare che se $(x, s) \in U_h \cap V_k$ allora esiste una sezione (W, l) tale che $(x, s) \in W_l \subset U_h \cap V_k$. Siccome $(x, s) \in U_h \cap V_k$ vuol dire che $x \in V \cap U$ e $h_x = k_x = s$, per definizione di germe esiste un aperto $x \in W \subset V \cap U$ tale che $h|_W = k|_W$ e quindi $(x, s) \in W_h = W_k \subset U_h \cap V_k$.

Per ogni $(x, s) \in \text{et}(\mathcal{F})$ ed ogni aperto $x \in U$, esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ ed una sezione $h \in \mathcal{F}(V)$ tale che $h_x = s$; dunque $(x, s) \in V_h$ e $p(V_h) \subseteq U$ e questo prova che p è continua. Chiaramente $p(U_h) = U$ per ogni sezione (U, h) e questo prova che p è aperta. Per concludere basta osservare che $p: U_h \rightarrow U$ è iniettiva. \square

Con la topologia appena definita, lo spazio topologico $\text{et}(\mathcal{F})$ viene detto **spazio étale** del prefascio \mathcal{F} .

3.3. Fasci

Come già detto, i fasci furono introdotti da Leray e Cartan in topologia algebrica e geometria analitica complessa. Successivamente, il loro uso fu adottato da Kodaira [31] e, soprattutto, da Serre in [47], dove vengono esposti i fondamenti della moderna geometria algebrica. Tuttavia, il lavoro più significativo in teoria dei fasci rimane probabilmente [15], dove Grothendieck inquadra la teoria coomologica dei fasci e la teoria dei funtori derivati di Cartan–Eilenberg nel contesto comune delle categorie abeliane, aprendo un oceano di applicazioni e generalizzazioni.

La nozione di fascio è utile per risolvere problemi globali di esistenza e unicità: molto brevemente, il problema viene prima affrontato da un punto di vista locale, poi la teoria dei fasci permette di adottare tecniche standard di topologia algebrica ed algebra omologica per studiare il problema dal punto di vista globale.

Prima di applicare la teoria dei fasci alla geometria analitica complessa, useremo i fasci in topologia algebrica e differenziale dimostrando, tra le altre cose, che in ogni varietà topologica le coomologie singolare e di Alexander–Spanier coincidono, e che in ogni varietà differenziabile la coomologia di de Rham coincide con la coomologia singolare a coefficienti reali. Sempre utilizzando la teoria dei fasci dimostreremo la dualità di Poincaré in coomologia di de Rham.

DEFINIZIONE 3.3.1. Un prefascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su X si dice un **fascio** se per famiglia indicizzata di aperti $(U_i)_{i \in I}$ con unione di aperti $U = \cup_i U_i$, valgono le seguenti condizioni:

¹Ha oramai preso piede a livello internazionale il termine francese étale, sebbene esista una meravigliosa traduzione italiana in *spazio lasagnato*.

F3) Sia $s \in \mathcal{F}(U)$. Allora $s = 0$ se e solo se $s|_{U_i} = \rho_{UU_i}(s) = 0$ per ogni i .

F4) Data, per ogni $i \in I$, una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ in modo tale che per ogni $i, j \in I$ si abbia

$$s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}, \quad \text{dove } U_{ij} = U_i \cap U_j,$$

(ossia le due restrizioni di s_i ed s_j all'aperto $U_i \cap U_j$ coincidono), allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i .

Chiameremo F3 proprietà di *località dell'annullamento* e la F4 proprietà di *incollamento*. Dato che F0 può essere visto come F3 nel caso particolare $I = \emptyset$, in letteratura i fasci vengono talvolta definiti usando solo gli assiomi F1–F4, ed in alcuni casi usando solo F2–F4 (vedi Esercizio 3.1).

È immediato osservare che se vale la condizione F3 allora la sezione s in F4 è unica: infatti se per $s, t \in \mathcal{F}(U)$ fosse $s|_{U_i} = t|_{U_i} = s_i$ per ogni i , allora $(s - t)|_{U_i} = 0$ per ogni i e quindi $s - t = 0$.

Ribadiamo che ogni fascio è, per definizione, anche un prefascio.

ESEMPIO 3.3.2. Esistono prefasci che non sono fasci; ad esempio sia X uno spazio topologico sconnesso, unione di due aperti disgiunti e non vuoti A, B . Allora il prefascio $\underline{\mathbb{Z}}_X$ delle funzioni costanti $U \rightarrow \mathbb{Z}$, $U \neq \emptyset$, non è un fascio. Presi due elementi $s \in \underline{\mathbb{Z}}_X(A) = \mathbb{Z}$ e $p \in \underline{\mathbb{Z}}_X(B) = \mathbb{Z}$ diversi tra loro, le loro restrizioni coincidono sull'intersezione che è l'insieme vuoto, ma non esiste alcun elemento di $\mathbb{Z} = \underline{\mathbb{Z}}_X(X)$ la cui restrizione su A valga s e su V valga p .

OSSERVAZIONE 3.3.3. In teoria dei fasci esistono alcune variazioni sulle notazioni usate che devono essere conosciute per poter comprendere i testi scritti. In particolare, per il gruppo delle sezioni di un fascio \mathcal{F} su di un aperto U vengono usate indistintamente le tre notazioni:

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}) = H^0(U, \mathcal{F}).$$

Pure in queste note le precedenti tre notazioni saranno utilizzate tutte, scegliendo di volta in volta quella che si adatta meglio al contesto. Invece, per i prefasci che non sono fasci si usa prevalentemente la notazione $\mathcal{F}(U)$.

ESEMPIO 3.3.4. Il prefascio delle funzioni continue in uno spazio topologico X è un fascio. Il prefascio delle funzioni di classe C^∞ su \mathbb{R}^n è un fascio.

ESEMPIO 3.3.5. Per ogni gruppo abeliano G , il prefascio G_X delle funzioni localmente costanti in uno spazio topologico X a valori in G è un fascio, detto **fascio costante**.² L'Esempio 3.3.2 mostra che in generale il prefascio delle funzioni costanti \underline{G}_X non è un fascio.

I novizi devono fare attenzione e ricordarsi che i fasci costanti sono quelli delle funzioni *localmente* costanti e non quelli delle funzioni costanti (che non sono fasci in generale).

ESEMPIO 3.3.6 (Fasci grattacielo). Siano $x \in X$ e G un gruppo abeliano. Per ogni aperto $U \subseteq X$ possiamo definire un fascio \mathcal{F} ponendo

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \rho_{UV} = \begin{cases} \text{Id}_G & \text{se } x \in V \subseteq U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

$$\mathcal{F}_y = \begin{cases} G & \text{se } y \in \overline{\{x\}} \\ 0 & \text{se } y \notin \overline{\{x\}} \end{cases}.$$

ESEMPIO 3.3.7 (restrizione ad aperti). Se \mathcal{F} è un prefascio su X e $U \subset X$ è un aperto, definiamo il prefascio $\mathcal{F}|_U$ su U ponendo $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ per ogni aperto $V \subseteq U$. Se \mathcal{F} è un fascio, allora anche $\mathcal{F}|_U$ è un fascio.

ESEMPIO 3.3.8 (immagine diretta). Siano $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua e \mathcal{F} un fascio su X . Il fascio $f_*\mathcal{F}$ su Y , detto **immagine diretta** di \mathcal{F} è definito come $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ per ogni aperto $V \subseteq Y$.

²In alcuni testi classici i fasci costanti sono detti "semplici"; oggi si preferisce chiamare fasci semplici quelli che hanno come endomorfismi solamente le omotetie.

ESEMPIO 3.3.9 (Somma diretta). Dati due fasci \mathcal{F} e \mathcal{G} , la loro somma diretta è definita come

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto U . Si dimostra facilmente che $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ è un fascio e che per ogni punto x vale $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$.

Similmente la somma diretta di un numero finito di fasci $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ si definisce come

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right) (U) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i(U),$$

mentre per le somme dirette infinite rimandiamo all'Esercizio 3.10.

ESEMPIO 3.3.10. Sia $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci e si assuma che \mathcal{G} sia un fascio. Per ogni aperto U definiamo $\mathcal{H}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ il sottogruppo delle sezioni che sono localmente nell'immagine di f . In altri termini, una sezione $t \in \mathcal{G}(U)$ appartiene ad $\mathcal{H}(U)$ se e solo se per ogni punto $p \in U$ esiste un aperto $p \in V \subseteq U$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $f_V(s) = t|_V$. Allora \mathcal{H} è un sottofascio di \mathcal{G} .

ESEMPIO 3.3.11 (fasci discreti). Sia X uno spazio topologico e sia data un'applicazione F che ad ogni punto $x \in X$ associa un gruppo abeliano $F(x)$. Definiamo il fascio \mathcal{DF} su X ponendo, per ogni aperto non vuoto U

$$\mathcal{DF}(U) = \prod_{x \in U} F(x).$$

Dunque, dare una sezione $s \in \mathcal{DF}(U)$ significa dare un elemento $s(x) \in F(x)$ per ogni $x \in U$; la verifica che si tratta di un fascio è molto semplice e lasciata al lettore. Il medesimo lettore non deve confondere il valore puntuale $s(x) \in F(x)$ con il germe $s_x \in \mathcal{DF}_x$. È chiaro che il valore puntuale $s(x)$ dipende solo dal germe di s in x ed è quindi ben definito un omomorfismo surgettivo di gruppi $\mathcal{DF}_x \rightarrow F(x)$.

Chiameremo **fasci discreti** i fasci ottenuti in questa maniera. Segue dagli assiomi F0–F4 che su uno spazio topologico discreto ogni fascio è discreto.

ESEMPIO 3.3.12 (**Importante, da sapere**). A partire da un qualsiasi prefascio \mathcal{F} possiamo costruire in maniera naturale un fascio discreto \mathcal{DF} , detto delle **sezioni discontinue** di \mathcal{F} , un suo sottofascio $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{DF}$, detto delle **sezioni continue** di \mathcal{F} , ed un morfismo di prefasci $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ che è un *isomorfismo sulle spighe*.

Definiamo \mathcal{DF} come il fascio discreto associato all'applicazione che ad ogni punto x associa la spiga \mathcal{F}_x ; dunque, per ogni aperto non vuoto U si ha $\mathcal{DF}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$. In altri termini una sezione $a \in \mathcal{DF}(U)$ è una collezione di germi $a = (a(x))_{x \in U}$, con $a(x) \in \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in U$. Se $V \subseteq U$, il morfismo di restrizione $\mathcal{DF}(U) \rightarrow \mathcal{DF}(V)$ è definito nel modo ovvio.

Ogni morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ definisce omomorfismi tra le spighe $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ e quindi un morfismo di fasci

$$f: \mathcal{DF} \rightarrow \mathcal{DG}, \quad (fa(x)) = f_x(a(x)) \text{ per ogni } x.$$

È naturalmente definito un morfismo di prefasci $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{DF}$ che ad ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ associa la collezione dei suoi germi: $i(s)(x) = s_x$ per ogni x .

Definiamo poi $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{DF}$ come il sottofascio delle sezioni che sono localmente nell'immagine di i : Dato un aperto U , una sezione $a = \{a(x)\} \in \mathcal{DF}(U)$ appartiene a $\mathcal{F}^+(U)$ se e solo se per ogni $p \in U$ esiste un intorno aperto $p \in V \subseteq U$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $i(s) = a|_V$, ossia $a(x) = s_x$ per ogni $x \in V$.

È tautologico osservare che per ogni aperto U si ha $i_U(\mathcal{F}(U)) \subseteq \mathcal{F}^+(U)$. Per il Lemma 3.2.12 il morfismo di prefasci $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è surgettivo sulle spighe. Se $i_x(s_x) = 0$ per qualche $x \in U$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, vuol dire che esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ tale che $i(s)|_V = 0$, ossia $s_y = 0$ per ogni $y \in V$ ed a maggior ragione $s_x = 0$.

Esercizi.

ESERCIZIO 3.1. Dimostrare che le due condizioni F2 ed F3 implicano F1. (Sugg.: da F3 segue che ρ_{UU} è iniettivo; se $\rho_{UU}(x) = y$ allora, da F2 segue $\rho_{UU}(x - y) = 0$.)

ESERCIZIO 3.2. Sia \mathcal{F} un fascio e siano U, V due aperti tali che il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V)$ sia surgettivo. Dimostrare che anche la restrizione $\mathcal{F}(U \cup V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettiva.

ESERCIZIO 3.3. Sia \mathcal{F} il prefascio su \mathbb{R} definito come

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ localmente costanti}\} & \text{se } U \text{ limitato} \\ 0 & \text{se } U \text{ illimitato} \end{cases}$$

e con ρ_{UV} la usuale restrizione quando U è limitato. Dire se \mathcal{F} è un fascio.

ESERCIZIO 3.4 (cf. [14, pag. 35]). Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ poniamo

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \mid \int_U |f| < +\infty \right\}.$$

Dire se \mathcal{F} , con gli usuali morfismi di restrizione, è un fascio.

ESERCIZIO 3.5. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un sottoprefascio. Dimostrare che \mathcal{G} soddisfa la condizione F3. Provare inoltre che \mathcal{G} soddisfa F4 se e solo se per ogni unione di aperti $U = \cup_i U_i$ ed ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i , si ha $s \in \mathcal{G}(U)$.

ESERCIZIO 3.6. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione su di un aperto U . Si definisce il **supporto** di s come il sottoinsieme

$$\text{Supp}(s) = \{x \in U \mid 0 \neq s_x \in \mathcal{F}_x\}.$$

Dimostrare che si tratta di un sottoinsieme chiuso e che, per una funzione continua $\varphi \in C_X(X)$ si ha

$$\text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

ESERCIZIO 3.7. Sia X uno spazio topologico e denotiamo con X_d l'insieme X dotato della topologia discreta; in tal modo l'identità $\text{Id}: X_d \rightarrow X$ è un'applicazione continua. Provare che per ogni fascio \mathcal{F} su X_d , il fascio immagine diretta $\text{Id}_* \mathcal{F}$ è discreto e che ogni fascio discreto su X si ottiene in questo modo.

ESERCIZIO 3.8 (Immagine inversa di un fascio). Siano $f: X \rightarrow Y$ continua e \mathcal{F} un fascio su Y . Sia \mathcal{DF} il fascio discreto su X associato all'applicazione $F(x) = \mathcal{F}_{f(x)}$. Per ogni coppia di aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ tali che $f(U) \subseteq V$, abbiamo un omomorfismo

$$f_{V,U}^\# : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{DF}(U), \quad f_{V,U}^\#(s) = (s_{f(x)})_{x \in U}.$$

Per ogni aperto $W \subseteq X$ sia $f^{-1}(W) \subseteq \mathcal{DF}(W)$ il sottogruppo delle sezioni localmente nell'immagine degli omomorfismi $f_{V,U}^\#$. Più precisamente, una sezione $t \in \mathcal{DF}(W)$ appartiene a $f^{-1}(W)$ se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $x \in U \subseteq W$ e $f(U) \subseteq V \subseteq Y$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tali che $t|_U = f_{V,U}^\#(s)$.

Dimostrare che $f^{-1}\mathcal{F}$ è un fascio e che per ogni $x \in X$ esiste un isomorfismo naturale di spighe $(f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$.

3.4. Morfismi di fasci

Un **morfismo di fasci** è per definizione un morfismo di prefasci (ogni fascio è anche un prefascio). Similmente, un isomorfismo di fasci è un isomorfismo di prefasci.

ESEMPIO 3.4.1. Dati due fasci \mathcal{F} e \mathcal{G} , le due inclusioni naturali di inclusione $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, sono morfismi.

ESEMPIO 3.4.2. Siano \mathcal{F} un fascio su X , $x \in X$ e consideriamo il fascio grattacielo

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} \mathcal{F}_x & x \in U \\ 0 & x \notin U. \end{cases}$$

Gli omomorfismi

$$\eta_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x = \mathcal{G}(U), \quad x \in U, \quad \eta_U(s) = s_x,$$

definiscono un morfismo di fasci $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $\eta_x = \text{Id}$ e $\eta_y = 0$ per ogni $y \notin \overline{\{x\}}$.

ESEMPIO 3.4.3. Costruiamo sullo spazio proiettivo reale $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $n > 0$, un fascio \mathcal{F} con tutte le spighe isomorfe a \mathbb{Z} ma senza sezioni globali, ossia tale che $\mathcal{F}(X) = 0$.

Denotiamo con $\pi: S^n \rightarrow X$ la proiezione naturale e poniamo, per ogni aperto $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}(U) = \{s: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ continue dispari}\}.$$

Dato che \mathbb{Z} è uno spazio discreto, dire che $s: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{Z}$ è continua è la stessa cosa che dire localmente costante; dispari vuol dire $s(-x) = -s(x)$.

Dato che S^n è connessa le uniche funzioni continue $S^n = \pi^{-1}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ sono le costanti e questo implica immediatamente $\mathcal{F}(X) = 0$. Proviamo adesso che se $U \subseteq X$ è il complementare di un iperpiano, allora $\mathcal{F}|_U$ è isomorfo al fascio costante \mathbb{Z}_U ; da questo segue che le spighe di \mathcal{F} sono tutte isomorfe a \mathbb{Z} .

Possiamo scrivere $\pi^{-1}(U) = U_+ \cup U_-$, dove U_+ e U_- sono aperti disgiunti, ciascuno omeomorfo a U tramite π e antipodali l'uno con l'altro. Per ogni aperto $V \subseteq U$ esiste un'ovvia bigezione tra $\mathcal{F}(V)$ e le funzioni continue $\pi^{-1}(V) \cap U_+ \rightarrow \mathbb{Z}$, che a loro volta sono in bigezione con le applicazioni continue $V \rightarrow \mathbb{Z}$. Possiamo quindi affermare che il fascio $\mathcal{F}|_U$ è isomorfo al fascio costante \mathbb{Z}_U .

OSSERVAZIONE 3.4.4. I fasci localmente isomorfi a fasci costanti, come quello dell'esempio precedente, vengono anche detti **sistemi di coefficienti locali**, e la loro introduzione in matematica (Reidemeister 1935, Steenrod 1942) è precedente a quella dei fasci, ovviamente con una diversa definizione, e cioè come rivestimenti in cui ogni fibra ha una struttura di gruppo abeliano e gli operatori di monodromia (vedi [38]) sono isomorfismi di gruppi: il raccordo tra le due definizioni si ottiene passando dagli spazi étale (aggiungendo alcune ipotesi sulla topologia).

I morfismi tra fasci sono univocamente determinati dai morfismi tra le rispettive spighe, nel senso descritto dal seguente lemma:

LEMMA 3.4.5. *Siano $f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ due morfismi di fasci. Allora $f = g$ se e solo se $f_x = g_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ per ogni x . In particolare, un morfismo di fasci è nullo se e solo se è nullo sulle spighe.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è chiara. Viceversa, supponiamo $f_x = g_x$ per ogni $x \in X$ e siano $U \subseteq X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione. Per ipotesi si ha

$$f(s)_x = f_x(s_x) = g_x(s_x) = g(s)_x \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Per definizione di germe, per ogni $x \in U$ esiste un aperto $x \in V_x \subseteq U$ tale che $f(s)|_{V_x} = g(s)|_{V_x}$, ossia $(f(s) - g(s))|_{V_x} = 0$. Siccome gli aperti V_x ricoprono U , per F3 si ha $f(s) - g(s) = 0$. \square

Una delle conseguenze del Lemma 3.4.5 è che per definire un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è sufficiente definire, in maniera compatibile, gli omomorfismi $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ al variare di U in una base di aperti fissata.

PROPOSIZIONE 3.4.6. *Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci su X e \mathcal{B} una base di aperti della topologia. Sia dato, per ogni $U \in \mathcal{B}$, un omomorfismo $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ in modo tale che se $U, V \in \mathcal{B}$ e $V \subseteq U$, allora $\rho_{UV} f_U = f_V \rho_{UV}$. Allora i morfismi f_U si estendono in maniera unica ad un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $U \subseteq X$ un aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione; proviamo prima che se $V, W \in \mathcal{B}$ e $V \cup W \subseteq U$, allora

$$(3.2) \quad f_V(s|_V)|_{V \cap W} = f_W(s|_W)|_{V \cap W}.$$

Dato che \mathcal{G} è un fascio e $V \cap W$ è unione di elementi di \mathcal{B} , basta dimostrare che $f_V(s|_V)|_H = f_W(s|_W)|_H$ per ogni $H \in \mathcal{B}$ tale che $H \subseteq V \cap W$. Questo segue dalle ipotesi poiché

$$f_V(s|_V)|_H = f_H(s|_H) = f_W(s|_W)|_H.$$

Consideriamo adesso il ricoprimento aperto di U formato da tutti gli elementi di \mathcal{B} contenuti in U e definiamo $f_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ come l'unica sezione tale che $f_U(s)|_V = f_V(s|_V)$ per ogni aperto V della base contenuto in U ; questo è possibile per gli assiomi F0–F4 e la proprietà (3.2). In questo modo otteniamo un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

L'unicità di f segue dal fatto che i morfismi tra spighe sono univocamente determinati dal comportamento di f negli aperti di una qualunque base topologica. \square

Dati due fasci \mathcal{F}, \mathcal{G} su X , si denota con $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ il gruppo abeliano formato da tutti i morfismi $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Per ogni aperto $U \subseteq X$ è ben definito un morfismo di restrizione $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_U(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$: basta tenere conto degli omomorfismi $f_V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ al variare di V tra gli aperti contenuti in U e ‘dimenticare’ gli altri.

Ne consegue che risulta ben definito un prefascio $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ponendo

$$\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}_U(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

per ogni aperto $U \subseteq X$.

TEOREMA 3.4.7. *Nelle notazioni precedenti, $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un fascio.*

DIMOSTRAZIONE. L’assioma F3 segue dal Lemma 3.4.5, mentre F4 segue dalla Proposizione 3.4.6, tenendo presente che se $U = \cup_i U_i$ allora gli aperti contenuti in qualche U_i formano una base della topologia su U . I dettagli sono lasciati per esercizio. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 3.9. Siano $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ un morfismo di fasci su X e $t \in \mathcal{H}(X)$ una sezione globale. Si consideri la collezione \mathcal{A} di tutte le coppie (U, s) con $U \subseteq X$ aperto e $s \in \mathcal{G}(U)$ tali che $g_U(s) = t|_U$. Provare che \mathcal{A} possiede elementi massimali rispetto all’ordinamento di estensione $(U, s) \leq (V, r)$ se $U \subseteq V$ e $r|_U = s$. Trovare un controesempio quando \mathcal{G} è solo un prefascio (Sugg.: Esercizio 3.3).

ESERCIZIO 3.10. Sia $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ una famiglia di fasci su X e consideriamo il prefascio $\mathcal{F}(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$. Dimostrare che ogni spiga di \mathcal{F} è uguale alla somma diretta delle spighe dei fasci \mathcal{F}_i .

Mostrare con un esempio che, se I è infinito allora in generale \mathcal{F} non è un fascio. Per tale ragione si definisce $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}^+$ (mostreremo più avanti che se \mathcal{F} è un fascio allora $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è un isomorfismo e quindi questa definizione di somma diretta non è conflittuale con la precedente).

ESERCIZIO 3.11. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\phi: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una funzione localmente costante. Provare che le applicazioni

$$f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U), \quad f_U(s) = \phi|_U \cdot s,$$

sono ben definite per ogni aperto U (qui bisogna usare che \mathcal{F} è un fascio) e definiscono un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

ESERCIZIO 3.12. Sia X uno spazio topologico. Per ogni aperto $U \subseteq X$ definiamo il prefascio $\mathbb{Z}_{U!}$ su X che sull’aperto $V \subseteq X$ vale

$$\mathbb{Z}_{U!}(V) = \{s \in \mathbb{Z}_X(V) \mid s(x) = 0 \text{ per ogni } x \in V - U\}.$$

Provare che $\mathbb{Z}_{U!}$ è un fascio e che per ogni fascio \mathcal{F} su X esiste un isomorfismo di gruppi

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_{U!}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(U)$$

ESERCIZIO 3.13. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\mathcal{D}\mathcal{F}$ il fascio discreto associato all’applicazione $x \mapsto \mathcal{F}(x)$. Provare che esiste un isomorfismo naturale

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{D}\mathcal{F}) \cong \prod_{x \in X} \text{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}(x)).$$

ESERCIZIO 3.14 (Fasci iniettivi). Un fascio \mathcal{I} su X si dice **iniettivo** se per ogni fascio \mathcal{F} su X , ogni sottofascio $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ed ogni morfismo $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}$, esiste un morfismo $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ che estende f . Sia $\mathcal{D}\mathcal{F}$ un fascio discreto tale che ogni gruppo $\mathcal{F}(x)$ sia divisibile; dimostrare che $\mathcal{D}\mathcal{F}$ è iniettivo. Dedurre dall’Esercizio 2.17 che ogni fascio è isomorfo ad un sottofascio di un fascio iniettivo.

3.5. Successioni esatte

Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice una **successione esatta** se per ogni punto x la successione di spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

è una successione esatta. In particolare, l'esattezza o meno di una successione di fasci **dipende solo dal comportamento dei morfismi sulle spighe**.

LEMMA 3.5.1 (Esattezza sulle sezioni implica esattezza sulle spighe). *Siano \mathcal{B} una base della topologia su X e $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ due morfismi di prefasci su X tali che per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ la successione*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

sia esatta. Allora per ogni $x \in X$ la successione di spighe

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. La verifica che $f_x(\mathcal{F}_x) \subseteq \ker g_x$ è immediata. Per l'inclusione opposta notiamo che il seguente diagramma di gruppi è commutativo per ogni scelta dell'aperto U che contenga il punto x .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{g_U} & \mathcal{H}(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x & \xrightarrow{g_x} & \mathcal{H}_x \end{array}$$

Dobbiamo dimostrare che se $s_x \in \ker g_x$ allora esiste $r_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(r_x) = s_x$. Consideriamo un rappresentante di s_x , indichiamolo con $s_V \in \mathcal{G}(V)$, $x \in V$, ed il fatto che $g_x(s_x) = 0$ ci assicura che esiste un aperto della base $W \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W$ e $g_V(s_V)|_W = 0$. A questo punto consideriamo la successione esatta

$$\mathcal{F}(W) \xrightarrow{f_W} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{g_W} \mathcal{H}(W)$$

per l'esattezza sappiamo che esiste r_W tale che $f_W(r_W) = s_W$. La tesi segue scegliendo come r_x la classe di r_W . \square

Ad esempio, se \mathcal{F} è un sottoprefascio del prefascio \mathcal{G} , allora ogni spiga \mathcal{F}_x è un sottogruppo di \mathcal{G}_x : per dimostrarlo basta applicare il Lemma 3.5.1 alla successione $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

TEOREMA 3.5.2 (Esattezza a sinistra delle sezioni globali). *Per ogni successione esatta di fasci su X del tipo*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$$

e per ogni aperto $U \subseteq X$, la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Lemma 3.4.5 che $g_U f_U = (gf)_U = 0$. Data una sezione $s \in \ker f_U$ abbiamo che questa va a zero in ogni spiga di \mathcal{G} su U , e dunque per ogni $x \in U$ vale $s_x \in \ker f_x = 0$. Segue dalle proprietà di fascio di \mathcal{F} che s è 0 e dunque f_U è iniettiva.

Dato un elemento $s \in \ker g_U$ lo stesso ragionamento usato sopra mostra che per ogni $x \in X$ esiste $r_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(r_x) = s_x$. Dunque per ogni x esiste un aperto $x \in V_x$ e sezioni $r_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$ tali che $f(r_{V_x}) = s|_{V_x}$. Per concludere resta da verificare che, dati due punti x, y si abbia che $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} = r_{V_y}|_{V_x \cap V_y}$, ma chiaramente $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}|_{V_x \cap V_y}$ ha come immagine 0 e dunque per l'iniettività mostrata al punto precedente si ha $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}|_{V_x \cap V_y} = 0$. Quindi per le proprietà di fascio di \mathcal{F} segue la tesi. \square

In particolare, se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni x , allora $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni aperto U . Basta infatti applicare il Teorema 3.5.2 alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}.$$

Similmente, se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è suriettivo per ogni x , allora $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è suriettivo per ogni aperto U . Basta infatti applicare il Teorema 3.5.2 alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato che: *un morfismo di fasci è un isomorfismo se e solo se è un isomorfismo sulle spighe*. Alla luce di questo fatto è utile riconsiderare la costruzione del fascio \mathcal{F}^+ delle sezioni continue di un prefascio.

Ricordiamo che per ogni prefascio \mathcal{F} è definito il morfismo $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{DF}$ che ad ogni sezione associa la collezione dei suoi germi ed il sottofascio $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{DF}$ della sezioni localmente nell'immagine di i : abbiamo dimostrato che $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è un isomorfismo sulle spighe e quindi, se \mathcal{F} è un fascio, allora $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è un isomorfismo.

TEOREMA 3.5.3 (proprietà universale di \mathcal{F}^+). *Siano \mathcal{F} un prefascio, \mathcal{G} un fascio e $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. Allora esiste un unico morfismo di fasci $f^+: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $f = f^+ \circ i$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che $i_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ è un isomorfismo per ogni x , si deve avere $f_x^+ = f_x i_x^{-1}$ e questo implica l'unicità di f^+ . Per dimostrare l'esistenza basta osservare che f induce il morfismo

$$\mathcal{D}f: \mathcal{DF} \rightarrow \mathcal{DG}, \quad \mathcal{D}f_U((s_x)_{x \in U}) = (f_x(s_x))_{x \in U},$$

che, per come sono definiti i fasci \mathcal{F}^+ e \mathcal{G}^+ , si restringe ad un morfismo $\mathcal{D}f: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ tale che $\mathcal{D}f i = i f$; adesso si usa il fatto che $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$ è un isomorfismo. \square

COROLLARIO 3.5.4. *Siano \mathcal{G} un fascio e \mathcal{F} un sottoprefascio di \mathcal{G} . Allora, il sottofascio di \mathcal{G} delle sezioni che appartengono localmente a \mathcal{F} è isomorfo ad \mathcal{F}^+ .*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ il sottofascio delle sezioni localmente in \mathcal{F} (Esempio 3.3.10). Siccome $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ si ha $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{H}_x$, mentre per come è definito \mathcal{H} il morfismo tra spighe $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ è suriettivo. Dunque $\mathcal{F}_x = \mathcal{H}_x$ ed il morfismo $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{H}$ dato dalla proprietà universale è un isomorfismo sulle spighe. \square

In analogia con la definizione di successione esatta, diremo che un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è iniettivo (resp.: suriettivo, bigettivo) se per ogni x il morfismo tra le spighe $f: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è iniettivo (resp.: suriettivo, bigettivo).

Abbiamo visto un tale f è iniettivo (resp.: bigettivo) se e solo se per ogni aperto U il morfismo $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è iniettivo (resp.: bigettivo).

Abbiamo anche visto che un morfismo suriettivo di fasci non è necessariamente suriettivo a livello di sezioni. Vale però il seguente risultato parziale.

LEMMA 3.5.5. *Siano $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0$ una successione esatta di fasci e $s \in \mathcal{G}(U)$ una sezione. Allora per ogni $p \in U$ esiste un aperto $p \in V \subseteq U$ ed una sezione $t \in \mathcal{F}(V)$ tale che $f_V(t) = s|_V$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di morfismo suriettivo e dal Lemma 3.2.12. \square

Dato un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ su X , vogliamo definire in maniera naturale il suo nucleo $\ker f$ ed il suo conucleo $\operatorname{coker} f$ in modo tale che si abbia una successione esatta

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow \operatorname{coker} f \rightarrow 0.$$

Per il nucleo la cosa è molto facile: definiamo il prefascio $\ker f$ come

$$(\ker f)(U) = \ker f_U = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid f_U(s) = 0\}, \quad \forall U \text{ aperto.}$$

LEMMA 3.5.6. *Nella notazioni precedenti $\ker f$ è un fascio e $(\ker f)_x = \ker f_x$ per ogni $x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che $\ker f$ è un sottoprefascio del fascio \mathcal{F} la località dell'annullamento (F3) è immediata.

Per quanto riguarda l'assioma di incollamento F4, siano $U = \cup_i U_i$ e $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $f_{U_i}(s_i) = 0$ per ogni i e $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$ per ogni i, j . Dato che \mathcal{F} è un fascio esiste $s \in \mathcal{F}(U)$

tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i . Ma allora $f_U(s)|_{U_i} = f_{U_i}(s_i) = 0$ e dato che anche \mathcal{G} è un fascio ne consegue che $f_U(s) = 0$. Abbiamo provato che $\ker f$ è un fascio. Per ogni aperto U si ha una successione esatta di gruppi

$$0 \rightarrow \ker f(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U)$$

e per il Lemma 3.5.1 la successione di fasci

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$$

è esatta. □

Per il conucleo la situazione è leggermente più complessa; naturalmente è ben definito il prefascio \mathcal{C} dei conuclei, $\mathcal{C}(U) = \text{coker } f_U$, che però non è un fascio in generale.

Per il Lemma 3.5.1, la successione delle spighe

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{C}_x \rightarrow 0$$

è esatta per ogni $x \in X$, e quindi $\mathcal{C}_x = \text{coker } f_x$. Possiamo quindi definire $\text{coker } f = \mathcal{C}^+$ (fascio delle sezioni continue di \mathcal{C}) e, componendo i due morfismi di prefasci $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ e $i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^+$, otteniamo una successione esatta di fasci

$$\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}^+ = \text{coker } f \rightarrow 0.$$

Equivalentemente, possiamo inizialmente definire $\mathcal{D} \text{coker } f$ come il fascio discreto associato all'applicazione $x \mapsto \text{coker } f_x$ e poi $\text{coker } f$ come il sottofascio di $\mathcal{D} \text{coker } f$ formato dalle sezioni localmente nell'immagine del morfismo naturale $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D} \text{coker } f$; si verifica a posteriori che $\mathcal{D} \text{coker } f$ coincide con il fascio delle sezioni discontinue di $\text{coker } f$.

DEFINIZIONE 3.5.7 (estensione canonica di un fascio). Per ogni fascio \mathcal{F} , con relativo fascio delle sezioni discontinue \mathcal{DF} , chiamiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{DF} \rightarrow \text{coker } i \rightarrow 0$$

estensione canonica di \mathcal{F} .

ESEMPIO 3.5.8. Se $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta di fasci, non è detto che per ogni aperto U la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

sia esatta. Ad esempio, prendiamo un qualunque fascio \mathcal{F} su X non nullo ma senza sezioni globali, come quello dell'Esempio 3.4.3. Sia $x \in X$ tale che $\mathcal{F}_x \neq 0$ e consideriamo il morfismo surgettivo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, dove \mathcal{G} è il fascio grattacielo che vale \mathcal{F}_x nel punto x (Esempio 3.4.2). Allora si ha una successione esatta di fasci $0 \rightarrow \ker \eta \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{G} \rightarrow 0$ in cui il morfismo $\eta_X: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{F}_x$ non è surgettivo.

Un altro esempio, forse più significativo, verrà descritto nella prossima sezione.

Esercizi.

ESERCIZIO 3.15. Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ una successione esatta di fasci su X e si assuma che per ogni coppia di aperti $U, V \subseteq X$ l'applicazione di restrizione $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V)$ sia surgettiva. Dimostrare che $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ è surgettivo. (Sugg. siano $t \in \mathcal{H}(X)$ e (U, s) massimale nella famiglia \mathcal{A} dell'Esercizio 3.9 e si assuma che esista $x \notin U$. Prendere V un intorno aperto di x tale che $t|_V$ sia nell'immagine di $\mathcal{G}(V)$.)

ESERCIZIO 3.16 (fasci fiacchi). Un fascio \mathcal{F} su X si dice **fiacco** se tutti gli omomorfismi di restrizione $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sono surgettivi. Dimostrare che:

- (1) Un fascio \mathcal{F} su X è fiacco se e solo se per ogni $U \subseteq X$ aperto, l'applicazione $\rho_{XU}: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettiva.
- (2) I fasci discreti sono fiacchi, ma non tutti i fasci fiacchi sono discreti.
- (3) Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ una successione esatta di fasci su X con \mathcal{F} fiacco. Allora $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ è surgettiva per ogni U .
- (4) Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ una successione esatta di fasci su X con \mathcal{F} e \mathcal{G} fiacchi. Allora anche \mathcal{H} è fiacco.

- (5) Sia $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_n$ una successione esatta di fasci su X con $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$ fiaschi. Dimostrare che $0 \rightarrow \mathcal{F}_1(X) \rightarrow \mathcal{F}_2(X) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ è una successione esatta.
- (6) L'immagine diretta di un fascio fiacco è ancora fiacca.

3.6. La successione esponenziale

Diamo un esempio di successione esatta corta di fasci che, assieme alle sue varianti C^∞ e olomorfa, riveste un ruolo importantissimo in geometria. Per semplicità di notazione scriveremo $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ per indicare i gruppi abeliani $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ rispettivamente. Abbiamo allora una successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inclusione}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ex}\pi} \mathbb{C}^* \rightarrow 0, \quad \text{ex}\pi(z) = e^{2\pi iz}.$$

Dotiamo \mathbb{C} e \mathbb{C}^* della topologia euclidea. Fissato uno spazio topologico X denotiamo con \mathcal{C} e \mathcal{C}^* i fasci su X delle funzioni continue a valori in \mathbb{C} e \mathbb{C}^* rispettivamente. Dato che \mathbb{Z} è discreto in \mathbb{C} , possiamo identificare il fascio costante \mathbb{Z}_X con il sottofascio di \mathcal{C} delle funzioni continue a valori interi. Abbiamo allora una successione di morfismi di fasci

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\text{ex}\pi} \mathcal{C}^* \rightarrow 0, \quad \text{ex}\pi(f)(x) = e^{2\pi if(x)}, \quad x \in X,$$

che vogliamo dimostrare essere esatta. Le stesse considerazioni si applicano se al posto delle funzioni continue prendiamo quelle di classe C^∞ (quando X è un aperto di \mathbb{R}^n o più in generale una varietà differenziabile) e per quelle olomorfe (quando X è un aperto di \mathbb{C}^n o più in generale una varietà complessa).

Per ogni aperto $U \subseteq X$ la successione

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X(U) \rightarrow \mathcal{C}(U) \xrightarrow{\text{ex}\pi_U} \mathcal{C}^*(U)$$

è esatta dato che, per una funzione continua $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, si ha $\text{ex}\pi(f) = 1$ se e solo se $f(x) \in \mathbb{Z}$ per ogni $x \in U$. Per il Lemma 3.5.1 anche la successione di fasci $0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\text{ex}\pi} \mathcal{C}^*$ è esatta.

In generale l'omomorfismo $\text{ex}\pi_U$ non è surgettivo. Consideriamo ad esempio $X = S^1 \subseteq \mathbb{C}$ e la funzione $g \in \mathcal{C}^*(S^1)$ definita come $g(t) = t$. È ben noto, e comunque facile da dimostrare (Esercizio 3.17), che non esiste alcuna funzione continua $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $e^{2\pi if(t)} = t$.

Per dimostrare che $\text{ex}\pi$ è surgettiva sulle spighe proviamo che ogni sezione di \mathcal{C}^* è localmente sull'immagine di \mathcal{C} , vedi Lemma 3.2.12. Siano $U \subseteq X$ aperto, $g: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ continua e $p \in U$. Scriviamo $g(x) = g(p)(1 - h(x))$ con $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua tale che $h(p) = 0$. A meno di restringere U ad un intorno più piccolo possiamo supporre $|h(x)| \leq 1/2$ per ogni $x \in U$ e quindi

$$1 - h = \text{ex}\pi(f), \quad \text{dove } f = \frac{1}{2\pi i} \log(1 - h) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n}.$$

Basta adesso scegliere un numero complesso a tale che $\text{ex}\pi(a) = g(p)$ per avere $\text{ex}\pi(a + f) = g$.

Al fine di motivare la coomologia di Čech con un esempio significativo, presentiamo un'applicazione del teorema delle cocatene piccole all'esistenza del logaritmo di funzioni complesse.

Sia $g \in \mathcal{C}^*(X)$ fissata, dall'esattezza della successione esponenziale

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\text{inclusione}} \mathcal{C} \xrightarrow{\text{ex}\pi} \mathcal{C}^* \rightarrow 0, \quad \text{ex}\pi(f) = e^{2\pi if},$$

segue che g è localmente nell'immagine di $\text{ex}\pi$ e quindi esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ tale che ogni restrizione $g|_{U_i}$ ammette un logaritmo continuo. In generale, il ricoprimento \mathcal{U} non è unico; se un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ ha la proprietà che ogni $j \in J$ esiste $i \in I$ tale che $V_j \subseteq U_i$, allora allora la restrizione di g ad ogni V_j possiede logaritmo continuo.

Fissiamo dunque un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ come sopra e scegliamo, per ogni $i \in I$, una sezione $f_i \in \mathcal{C}(U_i)$ tale che $\text{ex}\pi(f_i) = g|_{U_i}$.

Per semplicità notazionale scriviamo

$$U_{ij} = U_i \cap U_j, \quad U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \quad \text{per ogni } i, j, k \in I.$$

La collezione delle sezioni $f_i \in \mathcal{C}(U_i)$ definisce, nella sua globalità un elemento del prodotto diretto

$$f = (f_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i).$$

Siccome $\text{ex}\pi(f_i) = \text{ex}\pi(f_j)$ su U_{ij} , la collezione delle differenze $\omega_{ij} := f_j - f_i \in \mathbb{Z}_X(U_{ij})$ rappresenta un elemento del prodotto diretto

$$\omega = (\omega_{ij}) \in \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathbb{Z}_X(U_{ij})$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

- (1) $\omega_{ii} = 0$ per ogni $i \in I$;
- (2) $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ per ogni $i, j \in I$;
- (3) $\omega_{ij} = \omega_{ik} + \omega_{kj}$ su U_{ijk} per ogni $i, j, k \in I$.

Le precedenti tre condizioni possono essere condensate nell'unica espressione

$$(3.3) \quad \omega_{jk} - \omega_{ik} + \omega_{ij} = 0, \quad \text{su } U_{ijk}, \quad \text{per ogni } i, j, k \in I.$$

Infatti, se vale (3.3), ponendo $i = j = k$ si trova $\omega_{ii} = 0$, mentre con $k = i$ si trova $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Quindi il nostro $\omega = (\omega_{ij})$ è un elemento del gruppo abeliano

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) := \left\{ \eta \in \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathbb{Z}_X(U_{ij}) \mid \eta_{jk} - \eta_{ik} + \eta_{ij} = 0 \text{ su } U_{ijk}, \quad \forall i, j, k \in I \right\}.$$

Vediamo adesso cosa succede ad ω quando esiste globalmente il logaritmo continuo di g , e cioè una sezione $f \in \mathcal{C}(X)$ tale che $\text{ex}\pi(f) = g$. In tale situazione, per ogni indice $i \in I$ la sezione $a_i = f_i - f|_{U_i}$ appartiene a $\mathbb{Z}_X(U_i)$ ed inoltre vale $\omega_{ij} = a_j - a_i$ in U_{ij} . Abbiamo quindi provato che, se g appartiene all'immagine di $\mathcal{C}(X) \xrightarrow{\text{ex}\pi} \mathcal{C}^*(X)$, allora ω appartiene al sottogruppo

$$B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ \eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid \exists (a_i) \in \prod_{i \in I} \mathbb{Z}_X(U_i), \quad \eta_{ij} = a_j - a_i \text{ su } U_{ij}, \quad \forall i, j \in I \right\}.$$

Viceversa se $\omega \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ossia se esistono $a_i \in \mathbb{Z}_X(U_i)$ tali che $\omega_{ij} = a_j - a_i$ per ogni $i, j \in I$, allora le sezioni $f_i - a_i \in \mathcal{C}(U_i)$ coincidono nelle doppie intersezioni U_{ij} e quindi si incollano ad una funzione $f \in \mathcal{C}(X)$ tale che $\text{ex}\pi(f) = g$.

In conclusione, abbiamo dimostrato che $g \in \mathcal{C}^*(X)$ si solleva a $\mathcal{C}(X)$ se e solo se la classe di ω si annulla nel gruppo quoziente

$$H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) = Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) / B^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X),$$

che dipende solo dal fascio \mathbb{Z}_X e dal ricoprimento \mathcal{U} .

DEFINIZIONE 3.6.1. Chiameremo $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$ **primo gruppo di coomologia** di Čech del ricoprimento \mathcal{U} a valori in \mathbb{Z}_X

Notiamo che la definizione di $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$ si estende immediatamente se al posto del fascio costante \mathbb{Z}_X mettiamo un qualsiasi prefascio \mathcal{F} : infatti possiamo considerare i due omomorfismi di gruppi abeliani

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\delta_0} \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_{ij}) \xrightarrow{\delta_1} \prod_{i, j, k \in I} \mathcal{F}(U_{ijk}),$$

$$(\delta_0 s)_{ij} = s_j|_{U_{ij}} - s_i|_{U_{ij}}, \quad (\delta_1 s)_{ijk} = s_{jk}|_{U_{ijk}} - s_{ik}|_{U_{ijk}} + s_{ij}|_{U_{ijk}},$$

e definire

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta_1, \quad B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Im}(\delta_0), \quad H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Svilupperemo questa ed altre generalizzazioni nei prossimi capitoli.

Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente criterio di esistenza della determinazione continua del logaritmo.

TEOREMA 3.6.2. *Se X è localmente connesso per archi e $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ (coomologia singolare), allora l'esponenziale*

$$\text{ex}\pi: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}^*(X), \quad \text{ex}\pi(f) = e^{2\pi i f},$$

è surgettivo.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo dai corsi di topologia generale che “localmente connesso per archi” significa che ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi o, equivalentemente, che le componenti connesse per archi di un qualunque aperto sono ancora aperte.

Sia $g \in \mathcal{C}^*(X)$ fissata; per ogni $x \in X$ scegliamo un suo intorno aperto U_x connesso per archi nel quale la funzione g possiede logaritmo continuo. Per le considerazioni precedenti basta quindi provare che, per il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ la condizione $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ in coomologia singolare implica la condizione $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) = 0$ in coomologia di Čech. Grazie al teorema delle cocatene piccole possiamo usare il complesso $S^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(S_*(\mathcal{U}), \mathbb{Z})$ per calcolare $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Sia dunque $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) = 0$ fissato e consideriamo l'omomorfismo $\alpha: S_1(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{Z}$ che nel semplice ϕ vale

$$(3.4) \quad \alpha(\phi) = \omega_{x,z}(x) - \omega_{y,z}(y), \quad \text{dove: } \phi(\Delta^1) \subseteq U_z, \quad x = \phi(0, 1), \quad y = \phi(1, 0).$$

Dobbiamo verificare che si tratta di una buona definizione dato che il punto z non è univocamente determinato da ϕ . Supponiamo quindi che $\phi(\Delta^1) \subseteq U_w$, allora $\phi: \Delta^1 \rightarrow U_z \cap U_w$ ha immagine connessa e di conseguenza $\omega_{z,w}(x) = \omega_{z,w}(y)$. Questo implica l'uguaglianza

$$\omega_{x,w}(x) - \omega_{y,w}(y) = (\omega_{x,z} + \omega_{z,w})(x) - (\omega_{y,z} + \omega_{y,w})(y) = \omega_{x,z}(x) - \omega_{y,z}(y).$$

La cocatena singolare α si annulla sui bordi dei 2-simplessi singolari in $S_2(\mathcal{U})$: infatti se $z \in X$ è tale che $\psi(\Delta^2) \subseteq U_z$, basta considerare $\psi\delta_i: \Delta^1 \rightarrow U_z$ ed applicare la definizione (3.4) per avere immediatamente $\alpha(d\psi) = 0$.

Siccome $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, il cociclo singolare α è anche un cobordo, ossia esiste un'applicazione $\beta: X \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $\alpha(\phi) = \beta(\phi(0, 1)) - \beta(\phi(1, 0))$ per ogni 1-simplesso con immagine in qualche aperto U_z . Per concludere dimostriamo che se $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ la funzione $\omega_{x,y}: U_x \cap U_y \rightarrow \mathbb{Z}$ è costante e vale $\omega_{x,y} = \beta(y) - \beta(x)$. Sia $u \in U_x \cap U_y$; siccome U_x, U_y sono connessi per archi possiamo trovare due 1-simplessi singolari $\phi_1: \Delta^1 \rightarrow U_x$ e $\phi_2: \Delta^1 \rightarrow U_y$ tali che

$$\phi_1(1, 0) = x, \quad \phi_1(0, 1) = \phi_2(1, 0) = z, \quad \phi_2(0, 1) = y.$$

Dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} \alpha(\phi_1) &= \omega_{x,x}(x) - \omega_{z,x}(z) = -\omega_{x,z}(z) = \beta(z) - \beta(x), \\ \alpha(\phi_2) &= \omega_{z,y}(z) - \omega_{y,y}(y) = \omega_{z,y}(z) = \beta(y) - \beta(z), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\omega_{x,y}(z) = \omega_{x,z}(z) + \omega_{z,y}(z) = \beta(y) - \beta(x).$$

□

OSSERVAZIONE 3.6.3. Segue dalla formula $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ e dal fatto, non dimostrato, che negli spazi connessi per archi il primo gruppo di omologia è l'abelianizzato del gruppo fondamentale, che se X è connesso per archi allora $H^1(X, \mathbb{Z})$ è isomorfo al gruppo degli omomorfismi $\pi_1(X, x) \rightarrow \mathbb{Z}$. Ne consegue che si può anche dimostrare il Teorema 3.6.2 utilizzando la teoria dei rivestimenti, ed in particolare, il teorema di sollevamento di applicazioni qualsiasi.

Esercizi.

ESERCIZIO 3.17. Sia $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che esiste $t \in S^1$ tale che $f(t) = f(-t)$, e quindi che $\text{ex}\pi(f)$ non è iniettiva. (Sugg.: l'applicazione $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - f(-t)$ è dispari ed ha immagine connessa.)

Coomologia di Čech

Dopo aver visto le coomologie singolari e di Alexander–Spanier, introduciamo adesso la coomologia di Čech, estendendo e generalizzando la costruzione del gruppo $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$ vista nella Sezione 3.6. La prima differenza che salta agli occhi è che qui il gruppo dei coefficienti non è necessariamente fisso ma può variare da punto a punto; questa iniziale complicazione si rivelerà ben presto una cornucopia di utili ed interessanti applicazioni.

4.1. Coomologia di Čech dei ricoprimenti

In tutta la sezione, indicheremo con \mathcal{F} un prefascio di gruppi abeliani su di uno spazio topologico X . Ricordiamo inoltre la nostra convenzione di considerare i ricoprimenti aperti di uno spazio topologico sempre in forma di famiglia indicizzata.

Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per semplicità di notazione scriveremo

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_q \in I.$$

Il gruppo $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ delle q -cocatene di Čech sul ricoprimento \mathcal{U} a valori in \mathcal{F} è per definizione

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}), \quad q \geq 0.$$

In altri termini una q -cocatena è una famiglia di sezioni $c = (c_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$, con ciascun

$$c_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$$

al variare di $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in I$. La struttura di gruppo su $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è quella ovvia dedotta dalla legge di addizione sulle sezioni di \mathcal{F} . Dato che $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ si ha

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in N_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}), \quad \text{dove } N_q = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in I^{q+1} \mid U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} \neq \emptyset\}.$$

Il differenziale di Čech $\delta: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è definito dalla formula

$$(4.1) \quad (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}}.$$

In grado 0, se $c = (c_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}(U_\alpha)$, allora $\delta c = ((\delta c)_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$, dove per ogni coppia $\alpha, \beta \in I$ si ha

$$(4.2) \quad (\delta c)_{\alpha\beta} = c_\beta|_{U_{\alpha\beta}} - c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}.$$

In grado 1, se $c = (c_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$ si ha $\delta c = ((\delta c)_{\alpha\beta\gamma})$, con

$$(4.3) \quad (\delta c)_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} - c_{\alpha\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} + c_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Per semplificare le notazioni è pratica usuale sottintendere l'operazione di restrizione e scrivere (4.1) nella forma semplificata:

$$(4.4) \quad (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}.$$

L'applicazione δ è un omomorfismo di gruppi (qui è *fondamentale* che il prefascio sia di gruppi abeliani) ed il nome differenziale è motivato dal seguente lemma.

LEMMA 4.1.1. *Nelle notazioni precedenti $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Data una q -cocatena $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+2} \in I$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta^2 c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+2}} &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j (\delta c)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+2}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+2}} + \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{i=j+1}^{q+2} (-1)^{i+j-1} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{q+2}}. \end{aligned}$$

Scambiando i e j in una delle due sommatorie si vede facilmente che tutti i termini si cancellano a coppie. \square

Otteniamo così un complesso di cocatene $(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$, chiamato il **complesso delle cocatene di Čech** del prefascio \mathcal{F} sul ricoprimento \mathcal{U} . Alla solita maniera si definiscono i cocicli $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ed i cobordi $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

DEFINIZIONE 4.1.2. Il q -esimo gruppo di coomologia di Čech di \mathcal{F} relativo ad \mathcal{U} è

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^q(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Un modo equivalente di chiamare i gruppi $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è quello di *coomologia di \mathcal{U} a valori in \mathcal{F}* .

LEMMA 4.1.3. Nelle notazioni precedenti esiste un omomorfismo naturale di gruppi

$$\epsilon: \mathcal{F}(X) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Se \mathcal{F} è un fascio, allora ϵ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo l'omomorfismo

$$\epsilon: \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \epsilon(s) = (s|_{U_\alpha})_{\alpha \in I}.$$

Segue dagli assiomi di prefascio che $\delta\epsilon = 0$ e quindi l'immagine di ϵ è contenuta in $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. È immediato osservare che le proprietà F3 e F4 per il ricoprimento \mathcal{U} sono del tutto equivalenti a dire che $\epsilon: \mathcal{F}(X) \rightarrow Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è iniettiva e surgettiva, rispettivamente. \square

Nel lemma precedente, l'aggettivo "naturale" è riferito al fatto che commuta con i morfismi di prefasci. Se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di prefasci, allora per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in I$ si ha un omomorfismo di gruppi $f: \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$. Presi tutti assieme, tali omomorfismi definiscono un morfismo di complessi

$$f: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}), \quad f((c_{\alpha_0 \dots \alpha_q})) = (f(c_{\alpha_0 \dots \alpha_q})),$$

(esercizio: verificare) e di conseguenza un morfismo in coomologia $f: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Quello che in (co)omologia singolare era l'esempio banale dello spazio formato da un solo punto, qui diventa l'esempio dei ricoprimenti stupidi.

DEFINIZIONE 4.1.4. Diremo che un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X è **stupido** se esiste $i \in I$ tale che $U_i = X$.

LEMMA 4.1.5. Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto stupido di X . Allora $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ e $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda il calcolo dell' H^0 basta dimostrare che la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\epsilon} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \epsilon(s) = (s|_{U_i})_{i \in I},$$

è esatta. Scegliamo un indice $0 \in I$ tale che $U_0 = X$, allora l'iniettività di ϵ segue dal fatto che la sua composizione con la proiezione $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(U_0)$ è l'identità. Se $a = (a_i) \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e poniamo $s = a_0$, allora $(\delta a)_{0i} = a_i - s|_{U_i} = 0$ e quindi $a_i = s|_{U_i}$ per ogni i , ossia $a = \epsilon(s)$.

Sia $a \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $n > 0$, un cociclo e definiamo

$$b \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad b_{i_1 \dots i_n} = a_{0i_1 \dots i_n},$$

per ogni $i_1, \dots, i_n \in I$. La definizione di b è ben posta in quanto per ipotesi $U_0 = X$ e di conseguenza $U_{i_0 \dots i_n} = U_{0i_0 \dots i_n}$. Per ogni $i_0, \dots, i_n \in I$ si ha

$$0 = (\delta a)_{0i_0 \dots i_n} = a_{i_0 \dots i_n} - \sum_{j=0}^n (-1)^j a_{0i_0 \dots \widehat{i}_j \dots i_n} = a_{i_0 \dots i_n} - (\delta b)_{i_0 \dots i_n},$$

e quindi $a = \delta b$ è un cobordo. \square

DEFINIZIONE 4.1.6. Siano $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ due ricoprimenti dello stesso spazio topologico. Una **funzione di raffinamento** da \mathcal{V} a \mathcal{U} è un'applicazione $\gamma: J \rightarrow I$ tale che $V_j \subseteq U_{\gamma(j)}$ per ogni $j \in J$. Diremo che \mathcal{V} è **più fine**, o anche **un raffinamento**, di \mathcal{U} e scriveremo $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, se esistono funzioni di raffinamento da \mathcal{V} a \mathcal{U} . Scriveremo $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ per indicare che \mathcal{V} è più fine di \mathcal{U} .

In altri termini, vale $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ se e solo se ogni elemento di \mathcal{V} è contenuto in almeno un elemento di \mathcal{U} .

ESEMPIO 4.1.7. Ogni sottoricoprimento è anche un raffinamento.

ESEMPIO 4.1.8. Nelle notazioni della Definizione 4.1.6, il ricoprimento $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V} = (U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ è più fine di \mathcal{U} e \mathcal{V} . Come funzioni di raffinamento possiamo prendere le due proiezioni $I \times J \rightarrow I$ e $I \times J \rightarrow J$.

OSSERVAZIONE 4.1.9. Il lettore deve fare attenzione al fatto che \prec non è un ordinamento poiché non soddisfa la proprietà antisimmetrica; ad esempio, se \mathcal{U}, \mathcal{V} sono ricoprimenti stupidi di X , allora $\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$. Inoltre, dato che non abbiamo imposto alcuna limitazione sull'insieme degli indici di un ricoprimento, il solito ragionamento intorno al paradosso di Russell ci dice che la collezione dei ricoprimenti aperti (indicizzati e senza restrizioni sull'insieme degli indici), di uno spazio topologico non è un insieme.

Chi ha una conoscenza di base di teoria delle categorie può osservare che i ricoprimenti aperti di uno spazio topologico formano una categoria, con le funzioni di raffinamento come morfismi, e che $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$ coincide con il prodotto categoriale.

Per ovviare, parzialmente, ai problemi esposti nell'Osservazione 4.1.9 è utile introdurre l'insieme ordinato dei ricoprimenti uniformi.

DEFINIZIONE 4.1.10. Un **ricoprimento uniforme** di uno spazio topologico X è un ricoprimento aperto $(U_x)_{x \in X}$, indicizzato da X , e tale che $x \in U_x$ per ogni $x \in X$.

Dati due ricoprimenti uniformi $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ e $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$, scriveremo $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se $U_x \subseteq V_x$ per ogni $x \in X$.

Il nome "ricoprimento uniforme" è chiaramente dovuto all'ovvio legame con le strutture uniformi, vedi ad esempio [7, 27].

LEMMA 4.1.11. Siano $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto e $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ un ricoprimento uniforme dello spazio X . Esiste allora un ricoprimento uniforme $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ ed un'applicazione $f: X \rightarrow I$ tale che $U_x \subseteq W_{f(x)} \cap V_x$ per ogni x . In particolare, ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento uniforme.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in X$ scegliamo $f(x) \in I$ tale che $x \in W_{f(x)}$ e definiamo $U_x = W_{f(x)} \cap V_x$. \square

Se il ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ è più fine del ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, data una funzione di raffinamento $\gamma: J \rightarrow I$, ossia tale che $V_j \subseteq U_{\gamma(j)}$ per ogni $j \in J$, è definito in maniera naturale un morfismo di complessi

$$\gamma^*: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

dove

$$(4.5) \quad (\gamma^*c)_{j_0 \dots j_q} = c_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_q)}|_{V_{j_0 \dots j_q}},$$

con la proprietà di commutazione con i differenziali di Čech $\delta\gamma^* = \gamma^*\delta$ di immediata verifica. Se $\mathcal{W} = (W_h)_{h \in H}$ è un raffinamento di \mathcal{V} con funzione $\eta: H \rightarrow J$, si ha $\eta^*\gamma^* = (\gamma\eta)^*$.

Il problema che si pone è che il morfismo di complessi γ^* dipende non solo dai ricoprimenti \mathcal{U}, \mathcal{V} ma anche dalla funzione di raffinamento. Per fortuna, in coomologia le cose funzionano meglio.

TEOREMA 4.1.12. Nelle notazioni precedenti, siano $\gamma, \eta: J \rightarrow I$ due funzioni di raffinamento. Allora i due morfismi di complessi

$$\gamma^*, \eta^*: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

sono omotopi e quindi

$$\gamma^* = \eta^*: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Una possibile omotopia esplicita $T: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})[-1]$ è data dalle applicazioni

$$T: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

$$(Tc)_{j_0 \dots j_{q-1}} = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i c_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \eta(j_{q-1})} |_{V_{j_0 \dots j_{q-1}}}.$$

Data $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $j_0, \dots, j_q \in J$ si ha

$$\begin{aligned} (T\delta c)_{j_0 \dots j_q} &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (\delta c)_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \eta(j_q)} \\ &= \sum_{0 \leq h \leq i \leq q} (-1)^{i+h} c_{\dots \widehat{\gamma(j_h)} \dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \eta(j_q)} + \sum_{0 \leq i \leq h \leq q} (-1)^{i+h+1} c_{\dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \widehat{\eta(j_h)} \dots \eta(j_q)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta Tc)_{j_0 \dots j_q} &= \sum_{h=0}^q (-1)^h (hc)_{j_0 \dots \widehat{j_h} \dots j_q} \\ &= \sum_{0 \leq i < h \leq q} (-1)^{i+h} c_{\dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \widehat{\eta(j_h)} \dots \eta(j_q)} + \sum_{0 \leq h < i \leq q} (-1)^{i+h-1} c_{\dots \widehat{\gamma(j_h)} \dots \gamma(j_i) \eta(j_i) \dots \eta(j_q)}; \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (\delta Tc + T\delta c)_{j_0 \dots j_q} &= \sum_{i=0}^q c_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_{i-1}) \eta(j_i) \dots \eta(j_q)} - c_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_i) \eta(j_{i+1}) \dots \eta(j_q)} \\ &= c_{\eta(j_0) \dots \eta(j_q)} - c_{\gamma(j_0) \dots \gamma(j_q)}. \end{aligned}$$

□

La morale di tutto questo è che se $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ allora è ben definito un omomorfismo in coomologia $r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, ottenuto scegliendo una qualunque funzione di raffinamento. È chiaro che $r_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \text{Id}$ e che se $\mathcal{W} \prec \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ allora $r_{\mathcal{U}, \mathcal{W}} = r_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$.

COROLLARIO 4.1.13. *Siano \mathcal{U}, \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X . Se $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, ad esempio se \mathcal{U} e \mathcal{V} hanno gli stessi aperti con diverse ripetizioni oppure se si ottengono l'uno dall'altro mediante permutazione degli indici, allora esiste un isomorfismo naturale $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ e $r_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}: H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono entrambi ben definiti e le loro composizioni $r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} r_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} = r_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$, $r_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = r_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$ sono entrambe applicazioni identiche. □

Tra le ovvie conseguenze del Corollario 4.1.13 c'è il fatto che ogni gruppo di coomologia di Čech è naturalmente isomorfo ad un gruppo di coomologia di un ricoprimento aperto senza ripetizioni. In particolare, hanno perfettamente senso i gruppi $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ dove $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un ricoprimento aperto proprio.

Esercizi.

ESERCIZIO 4.1. Provere che uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento finito.

ESERCIZIO 4.2. Siano $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X e $\gamma: J \rightarrow I$ un'applicazione di insiemi. Si assuma che per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $U_i \subseteq U_{\gamma(j)}$. Dimostrare che $\mathcal{V} = (U_{\gamma(j)})_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di X e $H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni prefascio \mathcal{F} .

4.2. Cocatene di Čech normalizzate, alternanti ed ordinate

Siano $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e \mathcal{F} è un prefascio su X . Per vari motivi, risulta spesso utile rimpiazzare il complesso $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con complessi quasi-isomorfi ‘più piccoli’.

DEFINIZIONE 4.2.1 (cocatene normalizzate). Una cocatena $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si dice **normalizzata** se $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = 0$ ogni volta che $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ per qualche $i = 0, \dots, q-1$. Denoteremo con $C_{nor}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il sottogruppo delle cocatene normalizzate.

Le cocatene normalizzate sono preservate dal differenziale di Čech, e quindi definiscono un sottocomplesso $C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Infatti, se $c \in C_{nor}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1} \in I$ sono tali che $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ per qualche $i = 0, \dots, q$, allora

$$(\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=i}^{i+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{q+1}} = 0.$$

DEFINIZIONE 4.2.2 (cocatene alternanti). Una cocatena $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si dice **alternante** se è normalizzata e se $c_{\alpha_{\sigma(0)} \dots \alpha_{\sigma(q)}} = (-1)^\sigma c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ per ogni permutazione σ di $\{0, \dots, q\}$ con segnatura $(-1)^\sigma$. Denoteremo con $C_{alt}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C_{nor}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il sottogruppo delle cocatene alternanti.

Si nota subito che se c è una cocatena alternante, allora $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$ per qualche $i \neq j$ e che, se il ricoprimento \mathcal{U} contiene esattamente n aperti non vuoti, allora $C_{alt}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q \geq n$.

Pure le cocatene alternanti sono preservate dal differenziale di Čech e pertanto definiscono un sottocomplesso $C_{alt}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Infatti, se $c \in C_{alt}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, già sappiamo che $\delta c \in C_{nor}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; dato che il gruppo delle permutazioni è generato dalle trasposizioni di elementi adiacenti, per verificare che $\delta c \in C_{alt}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ci basta provare che per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1} \in I$ ed ogni $i = 0, \dots, q$ vale $\delta c_{\alpha_0 \dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{q+1}} = -\delta c_{\alpha_0 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_{q+1}}$. Sviluppando i conti, e tenendo presente che c è alternante, si ottiene

$$\begin{aligned} \delta c_{\alpha_0 \dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j c_{\dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots} + (-1)^i c_{\dots \widehat{\alpha_i} \alpha_{i+1} \dots} \\ &\quad + (-1)^{i+1} c_{\dots \alpha_i \widehat{\alpha_{i+1}} \dots} + \sum_{j=i+2}^{q+1} (-1)^j c_{\dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \widehat{\alpha_j} \dots} \\ &= -\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j c_{\dots \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots} + (-1)^i c_{\dots \alpha_{i+1} \widehat{\alpha_i} \dots} \\ &\quad + (-1)^{i+1} c_{\dots \widehat{\alpha_{i+1}} \alpha_i \dots} - \sum_{j=i+2}^{q+1} (-1)^j c_{\dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \widehat{\alpha_j} \dots} \\ &= -\delta c_{\alpha_0 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_{q+1}}. \end{aligned}$$

Riepilogando, le cocatene alternanti e normalizzate definiscono due **sottocomplessi**

$$C_{alt}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Supponiamo adesso che l'insieme degli indici I sia dotato di un ordinamento \leq tale che, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora $i \leq j$ oppure $j \leq i$; questo è del tutto equivalente a dire che se $J \subseteq I$ e $\bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$, allora (J, \leq) è una catena di I . Ordinamenti con tale proprietà esistono sempre, ad esempio quelli totali e, a maggior ragione, i buoni ordinamenti.

Definiamo le **q -cocatene ordinate** come gli elementi del gruppo

$$C_{<}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}).$$

È immediato osservare che la medesima formula del differenziale di Čech δ ha senso anche per le cocatene ordinate

$$\delta: C_{<}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{<}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

e che se denotiamo con $p: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la proiezione sulle componenti indicizzate da successioni strettamente crescenti di indici, allora $p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un morfismo di complessi ($p\delta = \delta p$).

Quindi il complesso $C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un **quoziante** di $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: non va dimenticato che per definire $C^*_{<}$ abbiamo avuto bisogno di aggiungere un elemento estraneo al dato iniziale e non univocamente definito.

Abbiamo dunque tre morfismi di complessi (due inclusioni ed una proiezione)

$$(4.6) \quad C^*_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow C^*_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

la cui composizione è un isomorfismo; infatti ogni q -cocatena alternante c è univocamente determinata dalle componenti $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ in cui $\alpha_0 < \dots < \alpha_q$.

Passando in coomologia abbiamo dei morfismi

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccccccc} H^*_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \hookrightarrow & H^*_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \hookrightarrow & H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{p} & H^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \simeq & & \end{array}$$

dove, ovviamente, $H^*_x(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^*(C^*_x(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ per $x \in \{alt, nor, <\}$. Fortuna vuole che si abbia:

TEOREMA 4.2.3. *Siano \mathcal{F} un prefascio su X e \mathcal{U} ricoprimento aperto di X . Allora i morfismi in (4.7) sono isomorfismi:*

$$(4.8) \quad H^p_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \text{ per ogni } p.$$

In altri termini, i morfismi di complessi in (4.6) sono quasi-isomorfismi.

La dimostrazione è abbastanza laboriosa ed è didatticamente utile dare prima alcune semplici dimostrazioni nei casi $n = 0, 1$; la dimostrazione del caso generale può essere omessa ad una prima lettura senza compromettere la comprensione generale del testo. Con una dimostrazione ancora più laboriosa (che non riportiamo) si può anche dimostrare che i morfismi di complessi in (4.6) sono equivalenze omotopiche.

PROPOSIZIONE 4.2.4. *Siano \mathcal{F} un prefascio su X , e \mathcal{U} ricoprimento aperto di X . Allora*

$$(4.9) \quad H^0_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^0_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad H^1_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^1_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che $C^0_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^0_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ basta dimostrare che $Z^1_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^1_{nor}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sia $c \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; per ogni α si ha

$$0 = (\delta c)_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} - c_{\alpha\alpha} + c_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha}$$

e per ogni α, β :

$$c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta} - c_{\beta\beta} + c_{\beta\alpha} = (\delta c)_{\beta\alpha\beta} = 0$$

Dunque ogni 1-cociclo di $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è alternante di per sé. Attenzione che queste uguaglianze tra cocicli non valgono in grado > 1 . \square

Alcuni autori definiscono la coomologia di Čech usando direttamente le cocatene alternanti (e.g. [32]), altri quelle ordinate (e.g. [19]) ed altri ancora quelle normalizzate (e.g. [14]).

Dimostrazione del Teorema 4.2.3. La dimostrazione standard, adottata dalla maggior parte dei testi in circolazione, deduce il Teorema 4.2.3 da un analogo risultato per l'omologia simpliciale, riferendosi spesso ai testi classici di Cartan, Eilenberg e Steenrod per la dimostrazione (ad esempio [10, Sezione VI.6]).

Noi, che non abbiamo trattato l'omologia simpliciale, adotteremo un approccio diretto che riprende ed espande una traccia di dimostrazione contenuta in una versione preliminare (giugno 2008) di [44]; nella versione finale dello stesso viene presentata la dimostrazione standard. Su Stacks project (Tag 01FG) si trova descritta, senza dimostrazione, un'equivalenza omotopica esplicita tra i due complessi, che però risulta impossibile da verificare a meno di non essere un mago della combinatoria.

Dimostriamo prima gli isomorfismi $H^*_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Dato che ogni insieme possiede ordinamenti totali, è sufficiente dimostrare che, per un *ordinamento totale fissato* \leq , la proiezione $p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un quasi-isomorfismo.

LEMMA 4.2.5. *Sia $f: C^* \rightarrow E^*$ un morfismo surgettivo di complessi di cocatene con nucleo $D^* = \ker p \subseteq C^*$. Se esiste un'omotopia $h: D^* \rightarrow D^*[-1]$ tale che $(dh + hd)x = x$ per ogni $x \in D^*$, allora f è un quasi-isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che h definisce una omotopia tra l'identità in D^* ed il morfismo nullo. Questo implica che D^* è un complesso aciclico e tutto segue dalla successione esatta lunga di coomologia. \square

Imitiamo la costruzione di $C^*_<$ per le successioni non decrescenti di indici definendo, per ogni n :

$$C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}).$$

La solita formula del differenziale di Čech δ definisce un complesso

$$C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : C_0^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_0^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_0^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

ed il morfismo p si fattorizza come composizione di due proiezioni naturali

$$p: C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{q} C_0^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

LEMMA 4.2.6. *Il morfismo surgettivo di complessi $C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{q} C_0^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un isomorfismo in coomologia.*

DIMOSTRAZIONE. Sia D^* il nucleo di q , ossia

$$D^n = \{c \in C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \quad \forall \alpha_0 < \dots < \alpha_n\}$$

e consideriamo l'omotopia

$$h: C_0^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

dove per $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n$ e $c \in C_0^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si pone

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \text{ se } \alpha_0 < \dots < \alpha_n.$$

Altrimenti, se $0 \leq k < n$ denota il più piccolo intero tale che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ si definisce

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = (-1)^k c_{\alpha_0 \dots \alpha_k \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}.$$

Ad esempio:

$$(hc)_{1234} = 0, \quad (hc)_{1223} = -c_{12223}, \quad (hc)_{1133} = c_{11133}.$$

È immediato osservare che $h(D^*) \subset D^*$; per il Lemma 4.2.5 basta dimostrare che $h\delta + \delta h$ è identità su D^* . Si noti che $D^0 = 0$. Siano $c \in D^n$, $n > 0$ e $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n$ fissati.

Se $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$ vale

$$(\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \sum_i \pm (hc)_{\dots \widehat{\alpha}_i \dots} = 0, \quad (h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0$$

e quindi

$$(\delta h + h\delta)c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 = c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}.$$

Altrimenti sia $0 \leq k < n$ il più piccolo intero tale che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$; siccome $(hc)_{\dots \widehat{\alpha}_k \alpha_{k+1} \dots} = (hc)_{\dots \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \dots}$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha}_i \dots} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha}_i \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha}_i \dots} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k-1} c_{\dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_k \alpha_k \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^{i+k} (hc)_{\dots \alpha_k \alpha_k \dots \widehat{\alpha}_i \dots} \end{aligned}$$

Dato che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ si ha

$$(-1)^k c_{\dots \widehat{\alpha}_k \alpha_k \alpha_{k+1} \dots} + (-1)^{k+1} c_{\dots \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \dots} + (-1)^{k+2} c_{\dots \alpha_k \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \dots} = (-1)^k c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
(h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} &= (-1)^k (\delta c)_{\dots \alpha_k \alpha_k \alpha_{k+1} \dots} \\
&= c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k} c_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_k \alpha_k \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^{i+k+1} (hc)_{\dots \alpha_k \alpha_k \dots \widehat{\alpha_i} \dots}
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$(h\delta + \delta h)c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}.$$

□

Per ogni coppia di interi $p, k \geq 0$ denotiamo

$$J_k^p = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in I^{p+1} \mid \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_p\},$$

osservando che:

- (1) $J_0^p \subseteq J_1^p \subseteq \dots \subseteq J_p^p$,
- (2) $J_k^p = I^{p+1}$ per ogni $k \geq p$,
- (3) $J_k^p = I^k \times J_0^{p-k}$ per ogni $k \leq p$.

Infine per ogni $k \geq 0$ definiamo l'applicazione

$$j_k: \bigcup_{p \geq 0} J_{k+1}^p \rightarrow \mathbb{N}, \quad j_k(\alpha_0, \dots, \alpha_p) = \max\{i \mid i \leq p, \alpha_i \leq \alpha_k\}.$$

Estendiamo ora la costruzione di $C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ad una serie di complessi $C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $k \geq 0$, ponendo

$$C_k^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in J_k^p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}).$$

La solita formula del differenziale di Čech definisce dei complessi

$$C_k^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_k^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_k^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots, \quad k \geq 0,$$

e le proiezioni canoniche

$$q_k: C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \widehat{q}_k: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

sono morfismi di complessi. Siccome $C_k^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni $k \geq p$, ne segue che q_k e \widehat{q}_k inducono isomorfismi tra i rispettivi H^p per ogni $p > k$.

LEMMA 4.2.7. *Per ogni $k \geq 0$ la proiezione $q_k: C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un quasi-isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $k \geq 0$ fissato e denotiamo con $D^* \subseteq C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il nucleo di q_k , ossia

$$D^p = \left\{ c \in \prod_{J_{k+1}^p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \mid c_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = 0 \text{ se } k \geq p \text{ oppure } \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \right\}.$$

Definiamo adesso una omotopia $h: D^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow D^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})[-1]$ tale che $h\delta + \delta h = \text{Id}$. Siccome $D^p = 0$ per ogni $p \leq k$, ci basta definire $h: D^{p+1} \rightarrow D^p$ per $p > k$.

Dati $0 < k < p$ e $c \in D^{p+1} \subseteq C_{k+1}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, per ogni $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in J_{k+1}^p$ sia

$$j = j_k(\alpha_0, \dots, \alpha_p) = \max\{i \mid i \leq p, \alpha_i \leq \alpha_k\}$$

e definiamo $(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ inserendo un doppione di α_k in posizione $j+2$ (ricordiamo che si parte da 0) e cambiando il segno nel modo seguente:

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = (-1)^j c_{\beta_0 \dots \beta_{p+1}}, \quad (\beta_0, \dots, \beta_{p+1}) = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p).$$

Dato che \leq è un ordinamento totale si ha $hc \in C_{k+1}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; per verificare che $hc \in D^p$ basta osservare che $\beta_k = \alpha_k$ e $\beta_{k+1} = \alpha_k$ (se $j = k$) oppure $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1}$ (se $j > k$). In entrambi i casi, se $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ allora $\beta_k \leq \beta_{k+1}$ e quindi $(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = 0$.

Vediamo qualche esempio concreto, con $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned}
k = 0: & \quad (hc)_{011} = c_{0011}, \quad (hc)_{212} = c_{2122}, \quad (hc)_{102} = -c_{1012}, \\
k = 1: & \quad (hc)_{012} = -c_{0112}, \quad (hc)_{210} = c_{2101}, \quad (hc)_{241233} = -c_{2412334}.
\end{aligned}$$

Rimane da dimostrare che $(h\delta + \delta h)c = c$ per ogni $c \in D^*$. Sia $c \in D^p$ fissato (con $p > k$) e prendiamo un multiindice $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in J_{k+1}^p$, ossia tale che $\alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_p$ e denotiamo $j = j(\alpha_0, \dots, \alpha_p) = \max\{i \mid i \leq p, \alpha_i \leq \alpha_k\}$. Allora

$$\begin{aligned} (h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= (-1)^j (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_j \alpha_k \alpha_{j+1} \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_j \alpha_k \dots \alpha_p} + c_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j+1} c_{\alpha_0 \dots \alpha_j \alpha_k \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \end{aligned}$$

e siccome $c \in D^p$ i primi addendi svaniscono e si ha

$$(h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=k+1}^j (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_j \alpha_k \dots \alpha_p} + c_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j+1} c_{\alpha_0 \dots \alpha_j \alpha_k \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}.$$

Similmente, siccome $hc \in D^{p-1}$, si ha

$$(\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i (hc)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = \sum_{i=k+1}^p (-1)^i (hc)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}.$$

Siccome

$$j_k(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p) = \begin{cases} j-1 & \text{per } k < i \leq j \\ j & \text{per } j < i \leq p \end{cases}$$

si ottiene

$$(\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=k+1}^j (-1)^{i+j-1} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_j \alpha_k \dots \alpha_p} + \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \alpha_j \alpha_k \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}.$$

e facendo le somme $h\delta + \delta h = \text{Id}_D$. □

Per i due lemmi precedenti abbiamo una successione di isomorfismi

$$\dots H^*(C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^*(C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \dots H^*(C_1^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^*(C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^*(C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

e per concludere basta ricordare che $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C_k^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni $k \geq p$ e quindi

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

per ogni $k > p$. Il Teorema 4.2.3 risulta quindi dimostrato per quanto riguarda le cocatene alternanti e ordinate.

Per quanto riguarda le cocatene normalizzate, esiste una decomposizione in somma diretta $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \oplus K^*$, dove

$$K^p = \{c \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid c_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = 0 \text{ se } \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \text{ per ogni } i = 0, \dots, p-1\},$$

e lasciamo al lettore la semplice verifica che K^* è un sottocomplesso di $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Ne segue che l'inclusione $C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è iniettiva in coomologia. D'altra parte $C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ contiene il sottocomplesso delle cocatene alternanti, e quanto già dimostrato implica che l'inclusione $C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è anche surgettiva in coomologia.

OSSERVAZIONE 4.2.8. Chi volesse dimostare direttamente che $C_{nor}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un quasi-isomorfismo, può trasporre in ambiente coomologico la dimostrazione di [55, Theorem 8.3.8] e/o quella di [37, Theorem 6.1], per dimostrare che K^* è un complesso aciclico.

Esercizi.

ESERCIZIO 4.3. Mostrare che se, nel complesso di Čech, si considerano le cocatene c tali che $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$ per qualche $i \neq j$, non si ottiene un sottocomplesso. Viceversa, se per un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)$ ed un prefascio \mathcal{F} , consideriamo

$$G^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\{(i_0, \dots, i_p) \mid i_a \neq i_b \forall a \neq b\}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}),$$

allora la formula del differenziale di Čech definisce un complesso che però **non** calcola la coomologia di Čech (prendere \mathcal{U} formato da due aperti).

4.3. Insiemi diretti e colimiti

La costruzione delle spighe è un caso particolare di *colimite*, che andiamo a presentare nel contesto semplificato degli insiemi diretti, più che sufficiente per i nostri bisogni.

DEFINIZIONE 4.3.1. Un **insieme diretto** è una coppia (D, \rightarrow) dove D è un insieme e \rightarrow una relazione binaria su D che soddisfa le seguenti tre condizioni:

- (1) (identità) $d \rightarrow d$ per ogni $d \in D$;
- (2) (composizione) se $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$ allora $a \rightarrow c$;
- (3) (filtranza) per ogni $a, b \in D$ esiste $c \in D$ tale che $a \rightarrow c$ e $b \rightarrow c$.

Abbiamo preferito usare i termini identità, composizione e filtranza al posto di riflessiva, transitiva e reticolo superiore, nonché usare una freccia cicciottella, perché il contesto naturale e generale dei colimiti è quello delle categorie piccole (vedi Appendice) e non quello degli ordinamenti, oltre al fatto che non si richiede la proprietà antisimmetrica.

Vediamo alcuni esempi di insiemi diretti:

ESEMPIO 4.3.2. La famiglia dei sottoinsiemi finiti di un insieme S con la relazione $A \rightarrow B$ se $A \subseteq B$.

ESEMPIO 4.3.3. L'insieme degli interi non nulli, e più in generale l'insieme dei non divisori di zero in un anello commutativo, con la relazione $a \rightarrow b$ se a divide b .

ESEMPIO 4.3.4. La famiglia degli aperti in uno spazio topologico con la relazione $U \rightarrow V$ se $U \subseteq V$.

ESEMPIO 4.3.5. La famiglia degli aperti in uno spazio topologico con la relazione $U \rightarrow V$ se $V \subseteq U$.

ESEMPIO 4.3.6. La famiglia degli intorni aperti di un punto fissato in uno spazio topologico, con la relazione $U \rightarrow V$ se $V \subseteq U$.

ESEMPIO 4.3.7. La famiglia dei ricoprimenti uniformi di uno spazio topologico, con la relazione $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ se $\mathcal{U} \geq \mathcal{V}$.

ESEMPIO 4.3.8. La famiglia dei ricoprimenti aperti $(U_i)_{i \in I}$ di uno spazio topologico, con I sottoinsieme di una potenza cartesiana finita di un insieme fissato S ,¹ con la relazione $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ se $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$. La filtranza si può dimostrare considerando ad esempio la costruzione dell'Esempio 4.1.8.

DEFINIZIONE 4.3.9. Sia (D, \rightarrow) un insieme diretto. Un **sistema diretto** di gruppi abeliani su (D, \rightarrow) è il dato di:

- (1) un gruppo abeliano F_a per ogni $a \in D$;
- (2) un omomorfismo $f_{ab}: F_a \rightarrow F_b$ per ogni $a, b \in D$ tali che $a \rightarrow b$.

Gli omomorfismi f_{ab} devono soddisfare le seguenti condizioni:

- (1) $f_{aa} = \text{Id}_{F_a}$ per ogni $a \in D$;
- (2) $f_{bc}f_{ab} = f_{ac}$ per ogni $a, b, c \in D$ tali che $a \rightarrow b \rightarrow c$.

Ad esempio, un prefascio può essere visto come un sistema diretto di gruppi abeliani sull'insieme diretto dell'Esempio 4.3.5 che si annulla sull'aperto vuoto.

Dato un sistema diretto (F_a, f_{ab}) di gruppi abeliani su D insieme diretto non vuoto, definiamo il suo **colimite** (chiamato anche *limite diretto* nei testi classici) come

$$\text{colim}_{a \in D} F_a = \{(a, x) \mid a \in D, x \in F_a\} / \sim$$

dove $(a, x) \sim (b, y)$ se esiste $c \in D$ tale che $a \rightarrow c$, $b \rightarrow c$ e $f_{ac}(x) = f_{bc}(y)$.

Lasciamo come esercizio la facile verifica che \sim è una relazione di equivalenza. Equivalentemente, possiamo definire \sim come la più piccola relazione di equivalenza tale che $(a, x) \sim (b, f_{ab}(x))$ per ogni $a \rightarrow b$.

¹L'unione disgiunta delle potenze cartesiane S^n è un insieme, e più precisamente un sottoinsieme dell'insieme delle parti finite di $\mathbb{N} \times S$.

Per ogni $x \in F_a$ denoteremo con $[a, x] \in \text{colim}_i F_i$ la classe di equivalenza di (a, x) . Esiste sul colimite una unica struttura di gruppo abeliano che rende tutte le applicazioni

$$f_a: F_a \rightarrow \text{colim}_i F_i, \quad f_a(x) = [a, x],$$

omomorfismi: in concreto, dati $[a, x], [b, y] \in \text{colim}_i F_i$ scegliamo $c \in D$ tale che $a \rightarrow c, b \rightarrow c$ e definiamo

$$[a, x] + [b, y] = [c, f_{ac}(x)] + [c, f_{bc}(y)] = [c, f_{ac}(x) + f_{bc}(y)].$$

Tale definizione di somma è ben posta, l'elemento neutro è $[a, 0]$ (per ogni $a \in D$) e $-[a, x] = [a, -x]$.

Ad esempio se $x \in X$, \mathcal{F} è un prefascio su X e consideriamo l'insieme diretto degli intorni aperti di x (Esempio 4.3.6), allora la costruzione del colimite coincide con la costruzione della spiga \mathcal{F}_x .

TEOREMA 4.3.10 (proprietà universale del colimite). *Siano G un gruppo abeliano e (F_a, f_{ab}) un sistema diretto di gruppi abeliani sull'insieme diretto (D, \rightarrow) . Sia dato per ogni a un omomorfismo di gruppi $g_a: F_a \rightarrow G$ e si assuma che $g_b f_{ab} = g_a$ per ogni $a \rightarrow b$. Allora esiste un unico omomorfismo di gruppi $g: \text{colim}_a F_a \rightarrow G$ tale che $g f_a = g_a$ per ogni $a \in D$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta porre $g([a, x]) = g_a(x)$ e verificare (esercizio) che g è ben definito ed è l'unico tale che $g f_a = g_a$ per ogni a . \square

Dati due sistemi diretti $(F_a, f_{ab}), (G_a, g_{ab})$ sullo stesso insieme diretto D , un morfismo

$$\alpha: (F_a, f_{ab}) \rightarrow (G_a, g_{ab})$$

è una famiglia di omomorfismi $\alpha_a: F_a \rightarrow G_a$ tale che $\alpha_b f_{ab} = g_{ab} \alpha_a$ per ogni $a \rightarrow b$.

Ogni morfismo di sistemi diretti induce un omomorfismo tra i colimiti

$$\bar{\alpha}: \text{colim}_i F_i \rightarrow \text{colim}_i G_i$$

tale che $\bar{\alpha} f_a = g_a \alpha_a$ per ogni $a \in D$. Concretamente $\bar{\alpha}([a, x]) = [a, \alpha_a(x)]$.

Il seguente risultato è una generalizzazione del Lemma 3.5.1.

LEMMA 4.3.11 (esattezza del colimite). *Siano $(F_a, f_{ab}) \xrightarrow{\alpha} (G_a, g_{ab}) \xrightarrow{\beta} (H_a, h_{ab})$ morfismi di insiemi diretti sullo stesso insieme diretto D . Se la successione $F_a \xrightarrow{\alpha_a} G_a \xrightarrow{\beta_a} H_a$ è esatta per ogni $a \in D$, allora anche*

$$\text{colim}_i F_i \xrightarrow{\bar{\alpha}} \text{colim}_i G_i \xrightarrow{\bar{\beta}} \text{colim}_i H_i$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Sia $[a, x] \in \text{colim}_i F_i$, allora $\bar{\beta} \bar{\alpha}([a, x]) = [a, \beta_a \alpha_a(x)] = [a, 0]$ e questo prova che $\bar{\beta} \bar{\alpha} = 0$. Sia adesso $[a, y] \in \ker \bar{\beta}$; siccome $[a, \beta_a(y)] = 0$ esiste $a \rightarrow b$ tal che $\beta_b(g_{ab}(y)) = h_{ab}(\beta_a(y)) = 0$. Dunque $g_{ab}(y) \in \ker \beta_b$ ed esiste $x \in F_b$ tale che $\alpha_b(x) = g_{ab}(y)$. Per concludere osserviamo che $\bar{\alpha}([b, x]) = [b, \alpha_b(x)] = [b, g_{ab}(y)] = [a, y]$. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 4.4. Sia D un insieme diretto che possiede un elemento finale ω , ossia un elemento tale che $a \rightarrow \omega$ per ogni $a \in D$. Provare che per ogni sistema diretto di gruppi abeliani (F_a, f_{ab}) su D , l'omomorfismo $f_\omega: F_\omega \rightarrow \text{colim}_a F_a$ è un isomorfismo.

ESERCIZIO 4.5. Sia (D, \rightarrow) un insieme diretto. Un sottoinsieme $H \subseteq D$ si dice **cofinale** se per ogni $a \in D$ esiste $b \in H$ tale che $a \rightarrow b$. Provare che ogni sottoinsieme cofinale è a sua volta un insieme diretto con la relazione indotta per restrizione.

Sia adesso (F_a, f_{ab}) un sistema diretto di gruppi abeliani su (D, \rightarrow) . Provare che esiste un isomorfismo naturale

$$\text{colim}_{a \in H} F_a \xrightarrow{\cong} \text{colim}_{a \in D} F_a, \quad [a, x] \mapsto [a, x], \quad a \in H, x \in F_a.$$

ESERCIZIO 4.6. Sia \prec una relazione su un insieme S che soddisfa le proprietà riflessiva e transitiva. Sia D la collezione dei sottoinsiemi finiti di S e, dati $a, b \in D$ conveniamo che $a \rightarrow b$ se per ogni $x \in a$ esiste $y \in b$ tale che $a \prec b$. Provare che (D, \rightarrow) è un insieme diretto.

ESERCIZIO 4.7. Sia (F_a, f_{ab}) un sistema diretto di gruppi abeliani sull'insieme diretto D . Definiamo il gruppo

$$L = \bigoplus_{a \in D} F_a / R,$$

dove R è il sottogruppo di $\bigoplus_a F_a$ generato da tutti gli elementi del tipo $x - f_{ab}(x)$, al variare di $a \rightarrow b$ e $x \in F_a$. Dimostrare che L è canonicamente isomorfo a $\text{colim}_a F_a$.

Nota. Non è difficile dimostrare che la definizione di L ha senso e soddisfa la proprietà universale del colimite anche quando la relazione \rightarrow non è filtrante.

ESERCIZIO 4.8. Sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e denotiamo con D l'insieme diretto dei sottoinsiemi finiti di I . Per ogni $a \in D$ (ossia $a \subseteq I$ finito) definiamo

$$F_a = H_n(\cup_{i \in a} U_i)$$

mentre se $a \rightarrow b$ (ossia $a \subseteq b$) definiamo $f_{ab}: F_a \rightarrow F_b$ come il morfismo indotto in omologia dall'inclusione $\cup_{i \in a} U_i \subseteq \cup_{i \in b} U_i$. Dimostrare che $H_n(X) = \text{colim}_a F_a$ (Sugg.: ogni catena ha supporto compatto).

4.4. Coomologia di Čech di fasci e prefasci

Partendo dai gruppi di coomologia di un ricoprimento aperto a valori in un prefascio, vogliamo togliere la dipendenza dal ricoprimento. Tra i vari modi possibili di farlo, tra loro equivalenti, seguiremo [12] definendo i gruppi di coomologia di Čech come *colimiti sull'insieme diretto dei ricoprimenti uniformi*.

Per ogni spazio topologico X , denotiamo con $\mathbf{U}(X)$ l'insieme dei suoi ricoprimenti uniformi. Abbiamo visto che $\mathbf{U}(X)$ è anche un insieme diretto, con la relazione di direzione

$$(U_x)_{x \in X} \rightarrow (V_x)_{x \in X} \iff V_x \subseteq U_x \text{ per ogni } x.$$

Dato un prefascio \mathcal{F} su X , un intero n e due ricoprimenti uniformi $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ e $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$, se $V_x \subseteq U_x$ per ogni x , allora è ben definito l'omomorfismo $r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ottenuto, ad esempio, considerando l'identità su X come funzione di raffinamento.

Dunque, $(H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}), r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}})$ è un sistema diretto di gruppi abeliani sull'insieme diretto dei ricoprimenti uniformi di X . Possiamo definire i **gruppi di coomologia di Čech** del prefascio \mathcal{F} su X come i rispettivi colimiti:

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = \text{colim}_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(X)} H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Più concretamente,

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = \{(\mathcal{U}, a) \mid a \in H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})\} / \sim,$$

dove \mathcal{U} varia tra tutti i ricoprimenti uniformi di X e $(\mathcal{U}, a) \sim (\mathcal{V}, b)$ se esiste un ricoprimento uniforme \mathcal{W} tale che

$$\mathcal{W} \leq \mathcal{U}, \quad \mathcal{W} \leq \mathcal{V}, \quad r_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(a) = r_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(b).$$

Per le proprietà generali dei colimiti, per ogni ricoprimento uniforme \mathcal{U} è ben definito l'omomorfismo $r_{\mathcal{U}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{F})$, che ad ogni $a \in H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ associa la classe di equivalenza di (\mathcal{U}, a) .

Adesso, grazie al Teorema 4.1.12 possiamo definire per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X , non necessariamente uniforme, un morfismo naturale

$$(4.10) \quad r_{\mathcal{U}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{F}).$$

Infatti, preso un qualunque raffinamento uniforme $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X} \prec \mathcal{U}$, ed una qualunque funzione di raffinamento $\gamma: X \rightarrow I$, possiamo considerare l'omomorfismo

$$r_{\mathcal{U}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma^*} H^n(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{r_{\mathcal{V}}} \check{H}^n(X, \mathcal{F}).$$

Per verificare che $r_{\mathcal{U}}$ è ben definito, prendiamo un altro raffinamento uniforme $\mathcal{W} = (W_x)_{x \in X} \prec \mathcal{U}$ con funzione di raffinamento $\eta: X \rightarrow I$. Se consideriamo il ricoprimento uniforme $\mathcal{H} = (V_x \cap W_x)_{x \in X}$, allora per il Teorema 4.1.12 si ha $r_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} \circ \gamma^* = r_{\mathcal{W}, \mathcal{H}} \circ \eta^*$ e quindi

$$r_{\mathcal{V}} \circ \gamma^* = r_{\mathcal{H}} \circ r_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} \circ \gamma^* = r_{\mathcal{H}} \circ r_{\mathcal{W}, \mathcal{H}} \circ \eta^* = r_{\mathcal{W}} \circ \eta^*.$$

La dimostrazione appena esposta ci dice anche che per ogni raffinamento di ricoprimenti aperti $\gamma: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ si ha $r_{\mathcal{U}} = r_{\mathcal{V}} \circ \gamma^*$; basta infatti prendere un raffinamento uniforme $\eta: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ per definire $r_{\mathcal{V}}$ ed usare la composizione $\gamma\eta: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ per definire $r_{\mathcal{U}}$.

A livello di operatività risulta molto spesso più agevole maneggiare i cocicli, e pertanto, se \mathcal{U} è un qualunque ricoprimento aperto e $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, denoteremo con $[\mathcal{U}, a] \in \check{H}^n(X, \mathcal{F})$ l'immagine della classe di coomologia di a tramite l'omomorfismo $r_{\mathcal{U}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{F})$.

LEMMA 4.4.1. *Dati due ricoprimenti aperti $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ e due cocicli $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $b \in Z^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, si ha $[\mathcal{U}, a] = [\mathcal{V}, b]$ in $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ se e solo se esiste un raffinamento comune $\mathcal{W} = (W_h)_{h \in H}$ e funzioni di raffinamento $\gamma: H \rightarrow I$, $\eta: H \rightarrow J$ tale che*

$$\gamma^*(a) - \eta^*(b) \in B^n(\mathcal{W}, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo temporaneamente con $\langle \mathcal{U}, a \rangle \in H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la classe di coomologia di un cociclo $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Il lemma segue immediatamente dal fatto che la classe $r_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(\langle \mathcal{U}, a \rangle)$ è rappresentata dal cociclo $\gamma^*(a)$, per una qualunque funzione di raffinamento $\gamma: H \rightarrow I$; se $\tilde{\gamma}: H \rightarrow I$ è un'altra funzione di raffinamento, allora $\tilde{\gamma}^*(a) - \gamma^*(a) \in B^n(\mathcal{W}, \mathcal{F})$. \square

È utile osservare che se X è compatto, allora ogni elemento di $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ è rappresentato da una coppia $[\mathcal{U}, a]$ con \mathcal{U} ricoprimento aperto finito.

ESEMPIO 4.4.2. Sia \mathcal{F} un prefascio in uno spazio topologico discreto X . Allora $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$. Infatti, ogni ricoprimento aperto possiede come raffinamento il ricoprimento uniforme $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$, dove $U_x = \{x\}$, e per tale ricoprimento vale $C_{alt}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

Sia $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci, Allora i morfismi indotti $f: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ commutano con i morfismi di raffinamento $r_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$. Se ci restringiamo all'insieme diretto dei ricoprimenti uniformi, si ottiene un morfismo di sistemi diretti che, per passaggio al colimite, induce un morfismo in coomologia

$$f: \check{H}^*(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^*(X, \mathcal{G}).$$

Sebbene sia stato possibile definire il gruppi $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ per qualunque prefascio, solamente aggiungendo le condizioni F3, F4 riusciamo ad ottenere qualche risultato minimamente utile ed interessante su tali gruppi di coomologia.

LEMMA 4.4.3. *Siano \mathcal{F} un fascio su X e \mathcal{U} un ricoprimento aperto. Allora*

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \check{H}^0(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$. Per definizione $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è il gruppo degli 0 cocicli, ossia delle famiglie di sezioni $c_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $c_j|_{U_{ij}} - c_i|_{U_{ij}} = 0$, che per le proprietà F3 ed F4 corrispondono esattamente alle sezioni globali. Si noti che il lemma è equivalente all'esattezza della successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\epsilon} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad (\epsilon c)_i = c|_{U_i}.$$

\square

LEMMA 4.4.4. *Siano \mathcal{F} un fascio su X e \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X . Allora l'omomorfismo $r_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$ è iniettivo. In particolare, $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$ se e solo se $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$. Per costruzione, se $x \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $r_{\mathcal{U}}(x) = 0$, allora esiste un raffinamento $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J} \prec \mathcal{U}$, con funzione $\gamma: J \rightarrow I$, tale che $\gamma^*(x) = 0$ in $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Possiamo considerare il ricoprimento $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V} = (U_\alpha \cap V_j)_{(\alpha, j) \in I \times J}$ come raffinamento comune di \mathcal{U} e \mathcal{V} e prendere come funzioni di raffinamento le proiezioni sui fattori:

$$\eta: I \times J \rightarrow J, \quad \eta(\alpha, j) = j; \quad \rho: I \times J \rightarrow I, \quad \rho(\alpha, j) = \alpha.$$

Dall'indipendenza dei morfismi di raffinamento in coomologia segue che $\rho^*(x) = \eta^*\gamma^*(x) = 0$.

Scegliamo un cociclo $(a_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ che rappresenta x , allora il cociclo

$$(c_{(\alpha, h)(\beta, k)}) = a_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta} \cap V_{hk}}, \quad \alpha, \beta \in I; \quad h, k \in J,$$

rappresenta $\rho^*(x)$ ed è pertanto un cobordo. Esistono quindi delle sezioni $b_{(\alpha,h)} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap V_h)$ tali che

$$(4.11) \quad (c_{(\alpha,h)(\beta,k)}) = b_{(\beta,k)} - b_{(\alpha,h)}, \quad \alpha, \beta \in I; \quad h, k \in J.$$

Siccome $a_{\alpha\alpha} = 0$ per ogni α (vedi Proposizione 4.2.4), si ha $b_{(\alpha,k)} = b_{(\alpha,h)}$ per ogni h, k e per la proprietà F4 applicata alle unioni $U_\alpha = \cup_h U_\alpha \cap V_h$, esistono sezioni $b_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tali che $b_{(\alpha,h)} = b_\alpha|_{U_\alpha \cap V_h}$ per ogni h . Ma allora la relazione (4.11) diventa

$$a_{\alpha\beta} = b_\beta - b_\alpha \text{ su } U_{\alpha\beta} \cap V_{hk}, \quad \forall \alpha, \beta, h, k$$

che per l'assioma F3 equivale a dire $a_{\alpha\beta} = b_\beta - b_\alpha$ su $U_{\alpha\beta}$, ossia $(a_{\alpha\beta}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. \square

TEOREMA 4.4.5. *Siano \mathcal{DF} un fascio discreto su X . Allora $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{DF}) = \check{H}^n(X, \mathcal{DF}) = 0$ per ogni $n > 0$ ed ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} .*

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$. Per ogni $x \in X$ denotiamo con $\mathcal{U}_x = (\{x\} \cap U_i)_{i \in I}$, pensato come ricoprimento di $\{x\}$. Per ipotesi $\mathcal{DF}(U) = \prod_{x \in U} F(x)$ per una opportuna famiglia indicizzata di gruppi abeliani $(F(x))_{x \in X}$. Per ogni $x \in X$ denotiamo \mathcal{F}_x il fascio su $\{x\}$ che vale 0 sul vuoto e $F(x)$ su $\{x\}$. Possiamo allora scrivere

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{DF}) = \prod_{i \in I} \prod_{x \in U_i} F(x) = \prod_{i \in I} \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x(\{x\} \cap U_i) = \prod_{x \in X} \prod_{i \in I} \mathcal{F}_x(\{x\} \cap U_i) = \prod_{x \in X} C^0(\mathcal{U}_x, \mathcal{F}_x).$$

Lo stesso ragionamento si applica alle cocatene di grado superiore, ottenendo

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{DF}) = \prod_{x \in X} C^*(\mathcal{U}_x, \mathcal{F}_x), \quad H^*(\mathcal{U}, \mathcal{DF}) = \prod_{x \in X} H^*(\mathcal{U}_x, \mathcal{F}_x).$$

Si conclude osservando che ogni ricoprimento \mathcal{U}_x è stupido. \square

DEFINIZIONE 4.4.6. Si definisce il **supporto** di un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ su X come il sottoinsieme

$$\text{Supp}(f) = \{x \in X \mid 0 \neq f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x\}$$

Ad esempio, se il morfismo $f: C_X \rightarrow C_X$ è dato dalla moltiplicazione per una funzione continua $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$, allora

$$\text{Supp}(f) = \text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Per prevenire un errore comune, va detto che in generale il supporto di un morfismo di fasci non è un sottoinsieme chiuso. Notiamo che per ogni aperto $U \subseteq X$ tale che $U \cap \text{Supp}(f) = \emptyset$ si ha $f_U = 0$.

DEFINIZIONE 4.4.7. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, un ricoprimento aperto di X . Una **partizione dell'identità** di \mathcal{F} subordinata ad \mathcal{U} è una famiglia di morfismi di fasci $f_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i \in I$, tali che:

- (1) $\overline{\text{Supp}(f_i)} \subseteq U_i$ per ogni i ;
- (2) la famiglia dei supporti $\text{Supp}(f_i)_{i \in I}$, è localmente finita: questo significa che ogni punto di X possiede un intorno che interseca $\text{Supp}(f_i)$ per al più un numero finito di indici i ;
- (3) $\sum_{i \in I} f_i = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

Il terzo punto della definizione richiede una spiegazione. Dati $U \subseteq X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, vogliamo definire $\sum_{i \in I} f_i(s) \in \mathcal{F}(U)$. Scegliamo un ricoprimento aperto $U = \cup_j U_j$ tale che per ogni j si abbia $U_j \cap \text{Supp}(f_i) \neq \emptyset$ per un numero finito di indici i . Ha quindi senso considerare le sezioni $t_j = \sum_{i \in I} f_i(s|_{U_j}) \in \mathcal{F}(U_j)$. Ma allora $t_j = t_h$ su $U_j \cap U_h$ per ogni j, h e quindi esiste, ed è unica, una sezione $t \in \mathcal{F}(U)$ tale che $t|_{U_j} = t_j$ per ogni j . Si definisce $\sum_{i \in I} f_i(s) = t$.

DEFINIZIONE 4.4.8. Un fascio si dice **fine** se ammette partizioni dell'identità subordinate a qualunque ricoprimento aperto.

Vedremo molti esempi, anche importanti, di fasci fini più avanti. Per il momento accontentiamoci di studiare il loro comportamento in coomologia.

TEOREMA 4.4.9. *Sia \mathcal{F} un fascio su X che possiede una partizione dell'unità rispetto ad un ricoprimento aperto \mathcal{U} . Allora*

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{per ogni } n > 0.$$

Di conseguenza, se \mathcal{F} è un fascio fine su X , allora $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ e sia $f_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i \in I$, una partizione dell'identità di \mathcal{F} subordinata ad \mathcal{U} . Ogni f_i si innesta in un diagramma commutativo di fasci

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{F} \\ & \searrow \rho & \nearrow g_i \\ & \mathcal{F}_i & \end{array}$$

dove $\mathcal{F}_i(U) = \mathcal{F}(U_i \cap U)$ e $\rho_U = \rho_{U, U \cap U_i}$ per ogni aperto $U \subseteq X$; si noti che, se $j: U_i \rightarrow X$ è l'inclusione, allora $\mathcal{F}_i = j_*(\mathcal{F}|_{U_i})$. Ciascun morfismo g_i è univocamente determinato dal diagramma (ρ è surgettivo sulle spighe), e sull'aperto $U \subseteq X$ vale

$$g_i: \mathcal{F}_i(U) \rightarrow \mathcal{F}(U), \quad g_i(s) = \begin{cases} f_i(s)|_{U \cap U_i} & \text{su } U_i \cap U \\ 0 & \text{su } U - \overline{\text{Supp } f_i}. \end{cases}$$

Dalla condizione $\sum_{i \in I} f_i = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ segue che per ogni aperto U ed ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha

$$\sum_i g_i(s|_{U \cap U_i}) = \sum_i g_i \rho_{U, U \cap U_i}(s) = \sum_i f_i(s) = s.$$

Siano adesso $n > 0$ ed $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. La condizione $\delta a = 0$ si può scrivere come

$$a_{i_0 \dots i_n} = \sum_{h=0}^n (-1)^h a_{j_{i_0 \dots \widehat{i}_h \dots i_n}} \quad \text{per ogni } j, i_0, \dots, i_n \in I.$$

Per ogni $j, i_0, \dots, i_n \in I$ si ha

$$g_j: \mathcal{F}(U_{j, i_0, \dots, i_n}) = \mathcal{F}_j(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_n}).$$

Definiamo la cocatena $b \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ come

$$b_{i_1 \dots i_n} = \sum_j g_j(a_{j i_1 \dots i_n})$$

che ha senso per la locale finitezza dei supporti. Per concludere basta dimostrare che $\delta b = a$. Per ogni $i_0, \dots, i_n \in I$ vale

$$\begin{aligned} \delta b_{i_0, \dots, i_n} &= \sum_{h=0}^n (-1)^h b_{i_0 \dots \widehat{i}_h \dots i_n} = \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{j \in I} g_j(a_{j i_0 \dots \widehat{i}_h \dots i_n}) \\ &= \sum_{j \in I} g_j \left(\sum_{h=0}^n (-1)^h a_{j i_0 \dots \widehat{i}_h \dots i_n} \right) = \sum_{j \in I} g_j(a_{i_0 \dots i_n}) = a_{i_0 \dots i_n}. \end{aligned}$$

□

Esercizi.

ESERCIZIO 4.9. Siano $f: X \rightarrow Y$ un'immersione chiusa (ossia continua, chiusa ed iniettiva) e \mathcal{F} un fascio su X . Provare che esiste un isomorfismo naturale $\check{H}^*(X, \mathcal{F}) = \check{H}^*(Y, f_*\mathcal{F})$.

ESERCIZIO 4.10. Sia G un gruppo abeliano non banale che agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazio topologico connesso per archi E , e denotiamo con $X = E/G$ il corrispondente spazio quoziente. Usare la teoria dei rivestimenti per dimostrare che $\check{H}^1(X, G_X) \neq 0$.

4.5. Spazi topologici paracompatti e PHH

Ricordiamo che, salvo avviso contrario, intenderemo i ricoprimenti sempre in senso indicizzato.

DEFINIZIONE 4.5.1. Un ricoprimento $(A_i)_{i \in I}$ di uno spazio topologico X si dice:

- (1) **aperto** se ogni A_i è aperto;
- (2) **chiuso** se ogni A_i è chiuso;
- (3) **puntualmente finito** se ogni punto $x \in X$ appartiene ad A_i per al più un numero finito di indici i .
- (4) **localmente finito** se ogni punto $x \in X$ possiede un intorno V tale che $V \cap A_i \neq \emptyset$ per al più un numero finito di indici i .

Dato che ogni intorno contiene un aperto, e che un aperto interseca un sottoinsieme A se e soltanto se interseca la sua chiusura, ne segue che un ricoprimento (A_i) è localmente finito se e solo se il ricoprimento delle chiusure $(\overline{A_i})$ è localmente finito.

LEMMA 4.5.2. *Sia $(A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento localmente finito di uno spazio topologico X . Allora per ogni sottoinsieme $J \subseteq I$ vale*

$$\overline{\bigcup_{j \in J} A_j} = \bigcup_{j \in J} \overline{A_j}.$$

In particolare, se ogni A_i è chiuso, allora $\bigcup_{j \in J} A_j$ è chiuso per ogni $J \subseteq I$.

DIMOSTRAZIONE. È un semplice esercizio di topologia generale. □

In un certo senso, i ricoprimenti localmente finiti si posizionano agli antipodi dei ricoprimenti uniformi (Definizione 4.1.10): in uno spazio topologico in cui ogni aperto non vuoto è infinito, non esistono ricoprimenti uniformi localmente finiti. Tuttavia, la possibilità di passare, mediante raffinamenti, da ricoprimenti uniformi a ricoprimenti aperti localmente finiti assume un importante ruolo in matematica e ci conduce alla nozione di paracompattatezza.

DEFINIZIONE 4.5.3. Uno spazio topologico si dice **paracompatto** se ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} ammette un raffinamento $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ con \mathcal{V} ricoprimento aperto localmente finito.

Rimandiamo il lettore ai testi [7, 38, 39] per una trattazione approfondita degli spazi paracompatti. Qui ci limiteremo a dimostrare il risultato di cui avremo maggiormente bisogno, il *teorema di restringimento*, al quale premettiamo un lemma di autonomo interesse.

LEMMA 4.5.4. *In uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano X paracompatto di Hausdorff e $x \in X$ fissato. Dato un intorno aperto U di x , dobbiamo dimostrare che esiste un aperto $V \subseteq X$ tale che $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Denotiamo $Y = X - U$; dato che X è di Hausdorff, ogni $y \in Y$ possiede un intorno aperto $y \in W_y$ tale che $x \notin \overline{W_y}$. Denotiamo $W_x = U$ e sia $(A_i)_{i \in I}$ un raffinamento aperto localmente finito del ricoprimento aperto $(W_y)_{y \in Y \cup \{x\}}$, con funzione di raffinamento $\gamma: I \rightarrow Y \cup \{x\}$. Se poniamo $A = \bigcup \{A_i \mid \gamma(i) \in Y\}$, allora A è un aperto che contiene Y e la cui chiusura

$$\overline{A} = \bigcup \{\overline{A_i} \mid \gamma(i) \in Y\} \subseteq \bigcup_{y \in Y} \overline{W_y}$$

non contiene x . Basta quindi considerare $V = X - \overline{A}$ per avere l'aperto cercato. □

TEOREMA 4.5.5 (di restringimento). *Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff X . Esiste allora un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ tale che $\overline{V_i} \subseteq U_i$ per ogni $i \in I$.*

In particolare, l'identità su I è una funzione di raffinamento da \mathcal{V} a \mathcal{U} .

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 4.5.4, per ogni $x \in X$ possiamo scegliere un indice $\gamma(x) \in I$ tale che $x \in U_{\gamma(x)}$ ed un aperto $x \in W_x$ tale che $\overline{W_x} \subseteq U_{\gamma(x)}$. Abbiamo quindi un raffinamento uniforme $(W_x)_{x \in X}$ di \mathcal{U} , con funzione di raffinamento $\gamma: X \rightarrow I$.

Sia adesso $(A_j)_{j \in J}$ un raffinamento aperto localmente finito di $(W_x)_{x \in X}$, scegliamo una funzione di raffinamento $\eta: J \rightarrow X$ e denotiamo

$$V_i = \bigcup \{A_j \mid \gamma\eta(j) = i\}, \quad \text{per ogni } i \in I.$$

Dato che gli elementi di $(V_i)_{i \in I}$ sono ottenuti come unione di aperti di un ricoprimento localmente finito, a maggior ragione anche $(V_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto localmente finito. Inoltre, per ogni i si ha

$$\overline{V_i} = \bigcup \{ \overline{A_j} \mid \gamma \eta(j) = i \} \subseteq \bigcup \{ \overline{W_x} \mid \gamma(x) = i \} \subseteq U_i.$$

□

Come abbiamo visto nella dimostrazione, nel teorema di restringimento può succedere che $V_i = \emptyset$ anche se $U_i \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE 4.5.6. È molto facile dimostrare che se X è paracompatto e $Y \subseteq X$ è chiuso, allora anche Y è paracompatto. Invece, un sottospazio aperto di uno spazio paracompatto di Hausdorff non è necessariamente paracompatto. Si tratta tuttavia di un fenomeno estremamente raro e non è facile trovare controesempi in letteratura: l'unico che conosco, di D. Zelinski e riportato nell'appendice, viene dato come esercizio nel "Topologie générale" di Bourbaki e non è particolarmente istruttivo, se non per il fatto che si ottiene partendo da un buon ordinamento su un insieme non numerabile, che quindi esiste ma che non è possibile descrivere concretamente.²

In queste note, per avere una trattazione semplificata e concettualmente più limpida, in alcuni risultati classici in cui si richiedono spazi paracompatti di Hausdorff aggiungeremo l'ipotesi che anche ogni sottospazio aperto sia paracompatto. Per quanto detto nell'osservazione precedente, si tratta di una limitazione del tutto irrilevante nella pratica matematica.

DEFINIZIONE 4.5.7. Diremo che uno spazio topologico è **PHH** (*Paracompact Hereditary and Hausdorff*) se è di Hausdorff ed ogni suo aperto è paracompatto.

PROPOSIZIONE 4.5.8. *Sia X uno spazio topologico PHH. Allora ogni sottospazio di X è PHH.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che ogni sottospazio è paracompatto. Siano $Y \subseteq X$ e $\mathcal{U} = (U_i \cap Y)_{i \in I}$ un ricoprimento di Y , con ciascun U_i aperto di X . Per ipotesi l'aperto $U = \cup_i U_i$ è paracompatto e quindi esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ di U ed un'applicazione $\gamma: J \rightarrow I$ tale che $V_j \subseteq U_{\gamma(j)}$ per ogni j . Ma allora $(V_j \cap Y)_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di Y che è più fine di \mathcal{U} . □

Terminiamo la sezione con tre risultati, senza dimostrazione, i quali mostrano che la stragrande maggioranza degli spazi topologici di uso comune è PHH.

TEOREMA 4.5.9. *Ogni spazio topologico localmente compatto di Hausdorff a base numerabile è PHH.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa, si può trovare in [7, 38, 39]. □

PROPOSIZIONE 4.5.10. *Per uno spazio di Hausdorff localmente euclideo X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) X è PHH;
- (2) X è paracompatto;
- (3) ogni componente connessa di X è a base numerabile;
- (4) ogni componente connessa di X è unione numerabile di compatti.

DIMOSTRAZIONE. Omessa, si può trovare in [38, 39]. □

DEFINIZIONE 4.5.11. Una **varietà topologica** è uno spazio di Hausdorff localmente euclideo che soddisfa le quattro condizioni equivalenti della precedente Proposizione 4.5.10.

PROPOSIZIONE 4.5.12 (A.H. Stone e Morita, 1948). *Ogni spazio metrizzabile è PHH.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa, si può trovare in [7]. □

²L'impossibilità di una descrizione esplicita deriva sostanzialmente dall'indipendenza dell'ipotesi del continuo.

Esercizi.

ESERCIZIO 4.11. Provare che uno spazio topologico è paracompatto se e solo se ogni ricoprimento uniforme possiede raffinamenti aperti localmente finiti.

ESERCIZIO 4.12. Provare che, in uno spazio paracompatto di Hausdorff, un fascio è fine se e solo se possiede partizioni dell'identità subordinate ad ogni ricoprimento aperto localmente finito.

ESERCIZIO 4.13. Siano \mathcal{U} e $\mathcal{V} = (V_j)$ due ricoprimenti aperti di X . Diremo che \mathcal{V} è un *raffinamento stellato* di \mathcal{U} se il ricoprimento uniforme

$$\mathcal{W} = (W_x)_{x \in X}, \quad W_x := \bigcup \{V_j \mid x \in V_j\},$$

è un raffinamento di \mathcal{U} . Provare che in uno spazio paracompatto di Hausdorff, ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento stellato.

ESERCIZIO 4.14. Dedurre dal teorema di retringimento che ogni spazio paracompatto di Hausdorff è normale. (Ricordiamo che uno spazio topologico si dice normale se è $T2 + T4$, ossia se è di Hausdorff ed ogni coppia di chiusi disgiunti possiede intorno aperti disgiunti.)

ESERCIZIO 4.15 (Teorema di restringimento per spazi normali). Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico normale X . Si consideri la collezione \mathcal{A} formata dalle famiglie indicizzate di aperti $(V_j)_{j \in J}$ tali che:

- (1) $J \subseteq I$ e $\overline{V_j} \subseteq U_j$ per ogni $j \in J$;
- (2) $\bigcup_{j \in J} V_j \cup \bigcup_{i \in I-J} U_i = X$.

(Cf. Lemma 2.2.5). Ordiniamo \mathcal{A} ponendo $(V_j)_{j \in J} \leq (W_h)_{h \in H}$ se $J \subseteq H$ e $V_j = W_j$ per ogni $j \in J$. Dimostrare che \mathcal{A} possiede elementi massimali e dedurre che esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ di X tale che $\overline{V_i} \subseteq U_i$ per ogni $i \in I$.

Rispetto al teorema di restringimento per spazi paracompatti di Hausdorff abbiamo indebolito le ipotesi su X e rafforzato quelle su \mathcal{U} , chiedendo che il ricoprimento di partenza fosse localmente finito. D'altra parte è chiaro dalle definizioni che uno spazio di Hausdorff è paracompatto se e solo vale il teorema di restringimento.

4.6. La successione esatta lunga di coomologia

Non è difficile dimostrare che per ogni successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0,$$

sullo spazio X , esiste una successione esatta di gruppi abeliani

$$(4.12) \quad 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{f} \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{f} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g} \check{H}^1(X, \mathcal{G}),$$

con il morfismo δ definito nel modo seguente: sia $t \in \check{H}^0(X, \mathcal{G}) = G(X)$ e scegliamo un ricoprimento uniforme $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in X}$ e sezioni $s(x) \in \mathcal{F}(U_x)$ tali che $f(s(x)) = t|_{U_x}$ per ogni x . Allora $\delta(t)$ è uguale all'immagine della classe di coomologia del cociclo $(s(y) - s(x))_{x,y} \in Z^1(\mathcal{U}, \ker f)$ tramite l'omomorfismo naturale (iniettivo) $H^1(\mathcal{U}, \ker f) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E})$; i dettagli sono rimandati all'Esercizio 4.17.

Ci piacerebbe continuare ed allungare la successione esatta con le coomologie di ordine superiore, ma non possiamo farlo perché la coomologia di Čech non gode in generale delle proprietà che uno si aspetta da una buona teoria coomologia. Per avere una 'buona' teoria occorre aggiungere determinate condizioni sulla quaterna $(X, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$. Le ipotesi extra più utilizzate in matematica sono:

- (1) X paracompatto di Hausdorff, oppure
- (2) X varietà algebrica o schema noetheriano separato, e $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ coerenti (qualunque cosa questo voglia significare, cf. [19]).

In queste note adotteremo solo la prima ipotesi. È utile osservare che l'ipotesi di paracompattatezza T2 interviene solamente nella dimostrazione del seguente lemma tecnico.

LEMMA 4.6.1. *Siano \mathcal{G} un prefascio su di uno spazio paracompatto di Hausdorff X e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ un sottoprefascio tale che il morfismo di inclusione $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ sia un isomorfismo sulle spighe, ossia $\mathcal{H}_x = \mathcal{G}_x$ per ogni x . Allora $\check{H}^*(X, \mathcal{H}) = \check{H}^*(X, \mathcal{G})$.*

DIMOSTRAZIONE. (cf. [47, p. 218], [23, Thm. 2.9.1]) Dato che \mathcal{H} è un sottoprefascio di \mathcal{G} , per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X si ha che $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ è un sottocomplesso di $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$; in particolare, $Z^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = Z^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \cap C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H})$.

Sia $n \geq 0$ intero fissato e scriviamo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$. Per iniziare, proviamo che per ogni cocatena $a \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ esiste un raffinamento uniforme $\mathcal{V} = (V_p)_{p \in X} \prec \mathcal{U}$ ed una funzione di raffinamento $\gamma: X \rightarrow I$ tali che $\gamma^*(a) \in C^n(\mathcal{V}, \mathcal{H})$.

Per il teorema di restringimento possiamo trovare un ricoprimento aperto $(W_i)_{i \in I}$ localmente finito tale che $\overline{W_i} \subseteq U_i$ per ogni i . Definiamo subito la funzione di raffinamento γ scegliendo, per ogni $p \in X$, un indice $\gamma(p) \in I$ tale che $p \in W_{\gamma(p)}$.

Adesso definiamo gli aperti V_p . Per ogni punto $p \in X$ scegliamo un intorno aperto $p \in V_p$ tale che $V_p \subseteq W_{\gamma(p)}$ e $V_p \cap W_i \neq \emptyset$ per al più un numero finito di indici i . Adesso eseguiamo una successione finita di restringimenti di V_p ad intorni aperti più piccoli in modo tale che, in aggiunta, siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- (1) Se $V_p \cap W_i \neq \emptyset$ allora $V_p \subseteq U_i$. Infatti, se $p \in \overline{W_i}$ possiamo restringere V_p in modo che $V_p \subseteq U_i$, mentre se $p \notin \overline{W_i}$ possiamo restringere V_p in modo tale che $V_p \cap W_i = \emptyset$; si usa il fatto che $V_p \cap W_i \neq \emptyset$ per al più finiti indici i .
- (2) Se $V_p \cap W_{i_0 \dots i_n} \neq \emptyset$, e quindi $V_p \subseteq U_{i_0 \dots i_n}$ per il punto precedente, allora $(a_{i_0 \dots i_n})|_{V_p} \in \mathcal{H}(V_p)$; questo è possibile perché $V_p \cap W_{i_0 \dots i_n} \neq \emptyset$ per un numero finito di successioni i_0, \dots, i_n , per l'uguaglianza di spighe $\mathcal{H}_p = \mathcal{G}_p$ ed il Lemma 3.2.12.

Adesso prendiamo come ricoprimento uniforme $\mathcal{V} = (V_p)_{p \in X}$ e dimostriamo che $\gamma^*(a) \in C^n(\mathcal{V}, \mathcal{H})$, e cioè che per ogni $p_0, \dots, p_n \in X$ si ha $(a_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)})|_{V_{p_0 \dots p_n}} \in \mathcal{H}(V_{p_0 \dots p_n})$.

Se $V_{p_0 \dots p_n} = \emptyset$ allora $\mathcal{H}(V_{p_0 \dots p_n}) = \mathcal{G}(V_{p_0 \dots p_n}) = 0$. Se invece $V_{p_0 \dots p_n} \neq \emptyset$, dal fatto che $V_{p_0 \dots p_n} \subseteq W_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)}$ segue $V_{p_0} \cap W_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)} \neq \emptyset$ e quindi $V_{p_0} \subseteq U_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)}$ e $(a_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)})|_{V_{p_0}} \in \mathcal{H}(V_{p_0})$. A maggior ragione $(a_{\gamma(p_0) \dots \gamma(p_n)})|_{V_{p_0 \dots p_n}} \in \mathcal{H}(V_{p_0 \dots p_n})$.

Siamo adesso pronti per dimostrare che il morfismo naturale $\check{H}^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{G})$ è surgettivo ed iniettivo.

Surgettività. Sia $[\mathcal{U}, a] \in \check{H}^n(X, \mathcal{G})$, dove $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Abbiamo provato che esiste un raffinamento uniforme $\mathcal{V} = (V_p)_{p \in X}$ con funzione di raffinamento $\gamma: X \rightarrow I$ tale che $\gamma^*(a) \in Z^n(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \cap C^n(\mathcal{V}, \mathcal{H}) = Z^n(\mathcal{V}, \mathcal{H})$. Dunque $[\mathcal{U}, a] = [\mathcal{V}, \gamma^*(a)] \in \check{H}^n(X, \mathcal{H})$.

Iniettività. Sia $[\mathcal{U}, a] \in \check{H}^n(X, \mathcal{H})$, $a \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ tale che $[\mathcal{U}, a] = 0$ in $H^n(X, \mathcal{G})$. Questo significa che, a meno di sostituire \mathcal{U} con un suo raffinamento vale $a \in B^n(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Sia $b \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ tale che $\delta b = a$. Per il conto precedente, a meno di raffinare ancora \mathcal{U} possiamo supporre $b \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ e quindi anche a è un cobordo. \square

TEOREMA 4.6.2. *In uno spazio paracompatto di Hausdorff X , ad ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0,$$

corrisponde una successione esatta lunga di gruppi di coomologia

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \dots \\ \dots \xrightarrow{f} \check{H}^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^{n+1}(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} \check{H}^{n+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \dots \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con \mathcal{H} il prefascio immagine di f , ossia $\mathcal{H}(U) = f(\mathcal{F}(U)) \subseteq \mathcal{G}(U)$. Per l'esattezza a sinistra delle sezioni, per ogni aperto $U \subseteq X$ si ha una successione esatta $0 \rightarrow \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$.

Ne segue che, per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, il prodotto diretto delle successioni esatte corte

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_p}) \rightarrow 0$$

ci fornisce una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

ed una successione esatta lunga in coomologia

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \dots$$

Prendendo i colimiti (che preservano l'esattezza) sull'insieme diretto dei ricoprimenti uniformi di X , abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{g} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} \dots$$

Per il Lemma 4.6.1 si ha $H^*(X, \mathcal{H}) = H^*(X, \mathcal{G})$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 4.16. È possibile dimostrare che in ogni spazio paracompatto di Hausdorff il fascio delle funzioni continue a valori complessi è fine (non lo faremo, dimostreremo in seguito l'analogo C^∞ sulla varietà differenziabili).

Dimostrare che in uno spazio paracompatto di Hausdorff X vale $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ se e solo se ogni funzione continua $f: X \rightarrow \mathbb{C}^*$ possiede logaritmo continuo.

ESERCIZIO 4.17. Siano \mathcal{H} e \mathcal{G} come nel Lemma 4.6.1. Provare che, senza ipotesi alcuna sulla topologia di X , il morfismo naturale $\check{H}^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{G})$ è bigettivo per $n = 0$ ed iniettivo per $n = 1$. Usare lo stesso ragionamento della dimostrazione del Teorema 4.6.2 per dedurre l'esattezza della successione (4.12).

4.7. Il teorema di Leray

In questa sezione, denoteremo con X uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff, con \mathcal{F} un fascio su X e con $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per ogni aperto $U \subseteq X$ scriveremo $\check{H}^*(U, \mathcal{F})$ per indicare i gruppi di coomologia $\check{H}^*(U, \mathcal{F}|_U)$.

DEFINIZIONE 4.7.1. Nelle notazioni precedenti, diremo che la coppia $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ha la proprietà L_n se per ogni $0 \leq p < n$ ed ogni successione $i_0, \dots, i_p \in I$ l'aperto $U_{i_0 \dots i_p}$ è paracompatto e $\check{H}^{n-p}(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) = 0$.

Ad esempio, la condizione L_0 è vuota (sempre soddisfatta), mentre L_1 significa che per l'aperto U_i è paracompatto e $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i \in I$. Inoltre, dato che gli indici nella successione i_0, \dots, i_p possono essere ripetuti, la condizione L_n equivale a chiedere che per ogni $0 \leq q \leq p < n$ ed ogni successione $i_0, \dots, i_q \in I$ l'aperto $U_{i_0 \dots i_q}$ è paracompatto e $\check{H}^{n-p}(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0$.

LEMMA 4.7.2. Nelle notazioni precedenti, $L_n \Rightarrow L_{n-1}$ per ogni intero n .

DIMOSTRAZIONE. Se vale L_n , allora per ogni $0 \leq q < n - 1$, si ha $0 \leq q + 1 < n$ e quindi, per ogni $i_0, \dots, i_q \in I$ l'aperto $U_{i_0 \dots i_q} = U_{i_0 \dots i_q i_q}$ è paracompatto e $\check{H}^{(n-1)-q}(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = \check{H}^{n-(q+1)}(U_{i_0 \dots i_q i_q}, \mathcal{F}) = 0$. \square

Il principale obiettivo di questa sezione è dimostrare il celebre, ed importante, *teorema di Leray dei ricoprimenti aciclici*.

TEOREMA 4.7.3 (Leray). Siano \mathcal{F} un fascio su di uno spazio paracompato di Hausdorff X e \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X . Per ogni $p \geq 0$ denotiamo con

$$\alpha_p: H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(X, \mathcal{F})$$

la componente in grado p del morfismo naturale $r_{\mathcal{U}}$ (vedi (4.10)).

Se la coppia $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ soddisfa L_n , allora α_p è bigettivo per ogni $0 \leq p \leq n$ e α_{n+1} è iniettivo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione su n , con il caso iniziale $n = 0$ già dimostrato nelle sezioni precedenti. Supponiamo quindi $n > 0$ e scegliamo una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{E} \rightarrow 0$$

con \mathcal{C} fascio discreto, ad esempio l'estensione canonica. Allora si hanno successioni esatte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) \xrightarrow{f} \mathcal{C}(U_{i_0 \dots i_p}) \xrightarrow{g} \mathcal{E}(U_{i_0 \dots i_p}) \quad \forall i_0, \dots, i_p \in I,$$

che determinano una successione esatta di complessi

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \xrightarrow{g} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{E}).$$

Denotiamo con $M^* = g(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{C})) \subseteq C^*(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ il sottocomplesso immagine di g , in modo da avere una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \xrightarrow{g} M^* \rightarrow 0.$$

Ricordiamo che, siccome \mathcal{C} è discreto, si ha $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{C}) = \check{H}^q(X, \mathcal{C}) = 0$ per ogni $q > 0$, e dalla successione esatta lunga di coomologia segue $H^r(M^*) = H^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni $r > 0$.

Dalla condizione L_n segue che

$$H^1(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{per ogni } 0 \leq q < n \text{ ed ogni } i_0, \dots, i_q \in I,$$

e quindi, per la successione esatta lunga di coomologia sull'aperto paracompatto $U_{i_0 \dots i_q}$ si ha

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_q}) \xrightarrow{f} \mathcal{C}(U_{i_0 \dots i_q}) \xrightarrow{g} \mathcal{E}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow 0.$$

Questo prova che $M^q = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ per ogni $q < n$ e quindi $H^q(M^*) = H^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ per ogni $q < n$ e $H^n(M^*) \subseteq H^n(\mathcal{U}, \mathcal{E})$. Inoltre, dato che $\check{H}^r(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{C}) = 0$ per ogni $r > 0$ (la restrizione di \mathcal{C} ad ogni aperto è ancora un fascio discreto), sempre dalla successione esatta lunga di coomologia segue che

$$\check{H}^{n-1-q}(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{E}) = \check{H}^{n-q}(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall 0 \leq q < n-1, \quad i_0, \dots, i_q \in I,$$

e di conseguenza \mathcal{E} soddisfa la condizione L_{n-1} .

Siccome $n > 0$ si ha un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}) & \xrightarrow{g} & H^0(M^*) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \alpha_1 & & \\ \check{H}^0(X, \mathcal{C}) & \xrightarrow{g} & \check{H}^0(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

da cui segue che α_1 è un isomorfismo. Per mostrare l'iniettività di α_2 basta osservare che dalle successioni esatte lunghe e dal caso $n = 0$ per il fascio \mathcal{E} segue

$$H^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^1(M^*) \subseteq H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \subseteq \check{H}^1(X, \mathcal{E}) = \check{H}^2(X, \mathcal{F}).$$

Se $n \geq 2$, abbiamo visto che la coppia $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ soddisfa L_{n-1} . Dunque, per ogni $0 < q \leq n$ si ha

$$H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(M^*) \xrightarrow{h} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha_q} \check{H}^q(X, \mathcal{E}) = \check{H}^{q+1}(X, \mathcal{F})$$

con h, α_q isomorfismi per $q < n$ ed entrambi iniettivi per $q = n$. \square

DEFINIZIONE 4.7.4. Un ricoprimento aperto \mathcal{U} si dice **Leray-aciclico** per un fascio \mathcal{F} se la coppia $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ soddisfa L_n per ogni $n > 0$.

Dunque, se \mathcal{U} è Leray-aciclico per \mathcal{F} si ha $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^*(X, \mathcal{F})$.

4.8. Risoluzioni e teorema di de Rham astratto

In tutta la sezione, X denoterà uno spazio topologico fissato.

Chiameremo **risoluzione** (coomologica) di un fascio \mathcal{F} una qualunque successione esatta di fasci

$$(4.13) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

È ovviamente possibile definire una risoluzione omologica di \mathcal{F} come un successione esatta $\dots \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$; tuttavia in questo testo ci occuperemo solamente di risoluzioni coomologiche, che chiameremo semplicemente risoluzioni.

Se ad una risoluzione come in (4.13) togliamo \mathcal{F} e prendiamo le sezioni globali otteniamo un complesso (coomologico) di gruppi abeliani

$$\mathcal{E}^*(X) : \quad \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3(X) \xrightarrow{d} \dots$$

del quale possiamo considerare i gruppi di coomologia

$$H^n(\mathcal{E}^*(X)) = \frac{\ker(d: \mathcal{E}^n(X) \rightarrow \mathcal{E}^{n+1}(X))}{d(\mathcal{E}^{n-1}(X))}.$$

Se la risoluzione ha determinate proprietà, esiste un legame tra i gruppi $H^n(\mathcal{E}^*(X))$ ed i gruppi di coomologia di \mathcal{F} .

TEOREMA 4.8.1. *Supponiamo X paracompatto di Hausdorff. Per ogni risoluzione*

$$(4.14) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots,$$

si hanno degli omomorfismi naturali

$$\alpha_n: H^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{F}), \quad n \geq 0,$$

che godono delle seguenti proprietà:

- (1) se $\check{H}^{n-i-1}(X, \mathcal{E}^i) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n-2$, allora α_n è iniettivo;
- (2) se $\check{H}^{n-i}(X, \mathcal{E}^i) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$, allora α_n è surgettivo.

In particolare α_0 è un sempre un isomorfismo e α_1 è sempre iniettivo.

Prima di dare la dimostrazione, precisiamo che quando diciamo che i morfismi α_n sono naturali si intende che per ogni diagramma commutativo di fasci

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

con le righe risoluzioni di \mathcal{F} e \mathcal{G} rispettivamente, si hanno dei diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathcal{E}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & \check{H}^n(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ H^n(\mathcal{H}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & \check{H}^n(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione su n trattando separatamente i casi $n = 0$, $n = 1$ e $n \geq 2$. Se $n = 0$, allora

$$\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

e si ha la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X)$$

che equivale all'isomorfismo

$$i: \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \ker(\mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X)) = H^0(\mathcal{E}^*(X)).$$

Tale isomorfismo è chiaramente naturale e quindi lo è anche il suo inverso

$$\alpha_0 = i^{-1}: H^0(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}).$$

Se $n > 0$, denotiamo con \mathcal{F}' il nucleo di $d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$. Allora la risoluzione (4.14) si spezza in una successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}' \rightarrow 0$$

ed una risoluzione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

La successione esatta corta ci dà una successione esatta lunga

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \check{H}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_0) \rightarrow \dots,$$

mentre l'ipotesi induttiva applicata alla risoluzione di \mathcal{F}' ci dà l'uguaglianza $\check{H}^0(X, \mathcal{F}') = \ker(\mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X))$. Rimettendo assieme le cose si ottiene una successione esatta

$$0 \rightarrow \frac{\ker(\mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X))}{d(\mathcal{E}^0(X))} \xrightarrow{\alpha_1} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_0).$$

Così facendo, abbiamo anche dimostrato che α_1 è sempre iniettivo, e che è surgettivo qualora $\check{H}^1(X, \mathcal{E}^0) = 0$.

Sia adesso $n > 1$ e supponiamo vero il teorema per tutti gli interi minori di n . Abbiamo la successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{n-1}(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \check{H}^{n-1}(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\delta} \check{H}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \cdots,$$

e per l'ipotesi induttiva abbiamo anche un morfismo naturale

$$\alpha'_{n-1}: \check{H}^{n-1}(\mathcal{E}^{*-1}(X)) = \check{H}^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow \check{H}^{n-1}(X, \mathcal{F}').$$

Basta allora definire α_n come la composizione di δ ed α'_{n-1} . Anche qui notiamo che α_n è iniettivo se α'_{n-1} è iniettivo e $\check{H}^{n-1}(X, \mathcal{E}^0) = 0$, mentre α_n è surgettivo se α'_{n-1} è surgettivo e $\check{H}^n(X, \mathcal{E}^0) = 0$. \square

DEFINIZIONE 4.8.2. Un fascio \mathcal{F} sullo spazio X si dice **aciclico** (in coomologia di Čech) se $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

Ad esempio, sono aciclici tutti i fasci discreti e tutti i fasci fini (il viceversa non vale, in entrambi i casi!).

DEFINIZIONE 4.8.3. Una risoluzione

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \cdots,$$

di un fascio \mathcal{F} è detta **aciclica** se ciascun fascio \mathcal{E}_i è aciclico.

COROLLARIO 4.8.4 (Teorema di de Rham astratto, o delle risoluzioni acicliche). *Data una risoluzione aciclica*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \cdots,$$

di un fascio \mathcal{F} sullo spazio paracompato di Hausdorff X , si hanno degli isomorfismi naturali

$$H^n(\mathcal{E}^*(X)) \xrightarrow{\simeq} \check{H}^n(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza immediata del Teorema 4.8.1. \square

OSSERVAZIONE 4.8.5. Dato un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^2 & \xrightarrow{d} & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{d} & \cdots \end{array}$$

con la riga superiore una risoluzione di \mathcal{F} e con la riga inferiore una risoluzione **aciclica** di \mathcal{G} , i morfismi indotti in coomologia $H^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow H^n(\mathcal{H}^*(X))$ dipendono solo da f e **non** dipendono da g . Infatti per naturalità si hanno dei quadrati commutativi

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathcal{E}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & \check{H}^n(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ H^n(\mathcal{H}^*(X)) & \xrightarrow[\simeq]{\alpha_n} & \check{H}^n(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

con la seconda freccia orizzontale un isomorfismo per il Corollario 4.8.4.

Esempio: la risoluzione canonica. Dato un qualunque fascio \mathcal{F} su X , prendiamo la sua estensione canonica

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{D}\mathcal{F} \xrightarrow{p_1} \mathcal{F}^{(1)} := \text{coker}(i) \rightarrow 0.$$

Poi prendiamo la risoluzione canonica di $\mathcal{F}^{(1)}$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{(1)} \xrightarrow{i_1} \mathcal{D}\mathcal{F}^{(1)} \xrightarrow{p_2} \mathcal{F}^{(2)} := \text{coker}(i_1) \rightarrow 0,$$

e proseguiamo allo stesso modo per ogni n :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{(n)} \xrightarrow{i_n} \mathcal{D}\mathcal{F}^{(n)} \xrightarrow{p_{n+1}} \mathcal{F}^{(n+1)} := \text{coker}(i_n) \rightarrow 0.$$

Ponendo $\mathcal{C}^0 = \mathcal{D}\mathcal{F}$ e $\mathcal{C}^n = \mathcal{D}\mathcal{F}^{(n)}$ si ottiene quella che si chiama **risoluzione canonica**, o anche **risoluzione di Godement**, del fascio \mathcal{F} :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{i_1 p_1} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{i_2 p_2} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{i_3 p_3} \dots$$

Dato che ogni \mathcal{C}^n è un fascio discreto, e quindi aciclico, per il teorema di de Rham astratto abbiamo che, per ogni spazio paracompatto di Hausdorff X si ha

$$(4.15) \quad \check{H}^*(X, \mathcal{F}) = H^*(\mathcal{C}^*(X)).$$

Se X non è paracompatto di Hausdorff, allora la coomologia di Čech non ha le buone proprietà che ci aspettiamo da una teoria coomologica. Ecco allora che in tal caso *possiamo usare la (4.15) come definizione della coomologia di \mathcal{F}* , ossia $H^n(X, \mathcal{F}) := H^n(\mathcal{C}^*(X))$. In questo modo otteniamo una teoria coomologica con tutte le proprietà volute, che molto brevemente sono: functorialità rispetto ai morfismi di fasci, $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(\text{punto}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$, successione esatta lunga di coomologia.

Per maggiori dettagli e dimostrazioni complete rimandiamo alle dispense del corso di geometria superiore 2019–2020, oppure a [12, 17, 39].

Esempio: la risoluzione di Čech. Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X ; mostriamo come i morfismi $r_{\mathcal{U}}: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{F})$ possono essere interpretati alla luce del Teorema 4.8.1. Per ogni $q \geq 0$ definiamo il fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q$ come

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q(U) = \prod_{i_0, \dots, i_q \in I} \mathcal{F}(U \cap U_{i_0 \dots i_q}), \quad U \text{ aperto } \subseteq X.$$

Equivalentemente, $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q(U) = C^q(\mathcal{U}_U, \mathcal{F}|_U)$ è il gruppo delle q -cocatene di Čech del fascio ristretto $\mathcal{F}|_U$ sul ricoprimento aperto $\mathcal{U}_U := (U \cap U_i)_{i \in I}$. Per ogni aperto U si ha un complesso di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0(U) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1(U) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^2(U) \xrightarrow{\delta} \dots$$

che è una successione esatta quando \mathcal{U}_U è stupido, ossia ogni volta che U è contenuto in un aperto U_i . Siccome gli aperti contenuti in qualche U_i sono una base della topologia, abbiamo una successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^2 \xrightarrow{\delta} \dots$$

detta **risoluzione di Čech** di \mathcal{F} relativa al ricoprimento \mathcal{U} , e per come è stata costruita, si ha $H^n(\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^*(X)) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

OSSERVAZIONE 4.8.6. Sembra naturale poter dimostrare il Teorema di Leray come conseguenza del teorema di de Rham astratto applicato alla risoluzione di Čech. In effetti, naturale lo è ma, in coomologia di Čech, dedurre le ipotesi del teorema di de Rham da quelle del teorema di Leray non è affatto immediato e richiede una dimostrazione che, oltre ad utilizzare le proprietà dei fasci fiacchi, risulta di difficoltà non inferiore a quella del teorema di Leray che abbiamo presentato.

Esercizi.

ESERCIZIO 4.18. Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \rightarrow \dots$ la risoluzione di Čech di un fascio fiacco \mathcal{F} relativa ad un ricoprimento \mathcal{U} . Provare che ogni fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q$ è fiacco e dedurre dall'Esercizio 3.16 che $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

4.9. Le risoluzioni singolare e di Alexander–Spanier

Fissati un intero $p \geq 0$, un gruppo abeliano G ed uno spazio topologico X possiamo considerare il prefascio su X delle p -cocatene singolari a valori in G , e cioè

$$U \mapsto S^p(U, G).$$

Gli assiomi F0, F1, F2, F4 sono soddisfatti. Se $p > 0$, si vede subito che l'assioma F3 non è soddisfatto e quindi che $S^p(\cdot, G)$ non è un fascio: infatti, se $X = A \cup B$ con A, B aperti, nulla vieta ad una catena singolare $\alpha: \Delta(X)_p \rightarrow G$ di annullarsi su $\Delta(A)_p \cup \Delta(B)_p$ ma di essere non banale sui simplessi la cui immagine non è interamente contenuta in A oppure in B .

Sembra naturale allora quotientare per le catene localmente nulle e prendere il prefascio

$$U \mapsto \mathcal{P}^p(U, G)$$

delle cocatene piccole; adesso F0, F1, F2, F3 sono soddisfatti ma qualcosa potrebbe essere andato storto con F4, anche se non sono a conoscenza di controesempi. Obiettivo di questa sezione è mostrare che, negli spazi PHH la proprietà F4 passa al quoziente e quindi che $\mathcal{P}^p(\cdot, G)$ è un fascio.

Consideriamo un contesto più generale, che si applica anche alle cocatene di Alexander–Spanier.

Siano X, Δ spazi topologici non vuoti e G un gruppo abeliano fissati. Nelle nostre future applicazioni lo spazio Δ sarà un simpleso topologico standard Δ^p (coomologia singolare) oppure l'insieme dei suoi vertici E^p (coomologia di Alexander–Spanier).

Notazioni. Per ogni sottospazio topologico $A \subseteq X$ denotiamo con:

- (1) $\Delta(A)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue $\phi: \Delta \rightarrow X$ tali che $\phi(\Delta) \subseteq A$; se $A \subseteq B$ allora $\Delta(A) \subseteq \Delta(B)$.
- (2) $S(A)$ il gruppo abeliano libero generato da $\Delta(A)$.
- (3) $F(A) = \text{Hom}(S(A), G)$, che coincide con il gruppo di tutte le applicazioni $f: \Delta(A) \rightarrow G$. Se $A \subseteq B$ ed $f \in F(B)$, per semplicità notazionale scriveremo $f|_A \in F(A)$ al posto di $f|_{\Delta(A)}$.
- (4) $K(A) \subseteq F(A)$ il sottogruppo delle applicazioni localmente nulle nella topologia di sottospazio, ossia $f \in K(A)$ se e solo se per ogni $x \in A$ esiste un aperto U di X tale che $x \in A \cap U$ e $f|_{A \cap U} = 0$.
- (5) $\mathcal{P}(A) = F(A)/K(A)$.

Se $B \subseteq A \subseteq X$, allora sono definiti nella maniera ovvia i morfismi di restrizione $F(A) \rightarrow F(B)$, $K(A) \rightarrow K(B)$ e $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$.

LEMMA 4.9.1. *Siano $A, B \subseteq X$ due sottospazi.*

- (1) *Se B è chiuso, la restrizione $K(A) \rightarrow K(A \cap B)$ è surgettiva.*
- (2) *Siano $f \in F(A)$, $g \in F(B)$ tali che $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, allora esiste $h \in F(A \cup B)$ tale che $h|_A = f$ e $h|_B = g$.*
- (3) *La restrizione $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ è surgettiva.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Se $f: \Delta(B \cap A) \rightarrow G$ è localmente nulla basta estendere a zero su $\Delta(A) - \Delta(A \cap B)$, ossia definire $f(\phi) = 0$ per ogni $\phi \in \Delta(A) - \Delta(B)$. La chiusura di B garantisce che l'estensione a zero è ancora localmente nulla.

2) Siccome $\Delta(A) \cap \Delta(B) = \Delta(A \cap B)$ basta estendere a zero in $\Delta(A \cup B) - (\Delta(A) \cup \Delta(B))$.

3) Basta dimostrare che $F(X) \rightarrow F(A)$ è surgettiva, e per questo basta estendere a zero su $\Delta(X) - \Delta(A)$. □

Se ci restringiamo agli aperti di X , allora F, K, \mathcal{P} definiscono tre prefasci, ed è chiaro dalle definizioni che la proiezione $F \rightarrow \mathcal{P}$ è un morfismo di prefasci ed un isomorfismo sulle spighe. Dato U aperto, una sezione $s \in F(U)$ appartiene a $K(U)$ se e solo se tutti i suoi germi s_x , $x \in U$, si annullano, ossia $K(U) = \ker i_U$, dove $i: F \rightarrow F^+$ è il morfismo naturale nel fascio delle sezioni continue di F . In particolare, il morfismo i si fattorizza ad un morfismo di prefasci $\mathcal{P} \rightarrow F^+$ che è iniettivo sulle sezioni ed un isomorfismo sulle spighe.

TEOREMA 4.9.2. *Nelle notazioni precedenti, si assuma che X sia uno spazio topologico PHH. Allora la restrizione di \mathcal{P} agli aperti di X è un fascio fine.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(U_i)_{i \in I}$, una famiglia di aperti di X e denotiamo $U = \bigcup U_i$. Dato che $\mathcal{P}(V) = F(V)/K(V)$ per ogni aperto V , gli assiomi F3 ed F4 possono essere scritti nel modo seguente:

- F3) Sia $f \in F(U)$ tale che $f|_{U_i} \in K(U_i)$ per ogni i , allora $f \in K(U)$;
- F4) Siano $f_i \in F(U_i)$ tali che $f_i - f_j \in K(U_i \cap U_j)$ per ogni i, j , allora esiste $f \in F(U)$ tale che $f - f_i \in K(U_i)$ per ogni i .

La prova di F3 è immediata e non richiede alcuna ipotesi sulla topologia di X . Infatti, l'appartenenza a K di una sezione f dipende solo dal comportamento locale di f .

La dimostrazione di F4 è decisamente meno elementare. A meno di considerare le restrizioni dei tre prefasci all'aperto U , non è restrittivo supporre $U = X$.

Dato che X è paracompatto di Hausdorff, per il teorema di restringimento esiste un ricoprimento chiuso localmente finito $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ tale che $C_i \subseteq U_i$ per ogni i : nelle notazioni del Teorema 4.5.5 basta prendere $C_i = \overline{V}_i$.

Per ogni $J \subseteq I$ denotiamo $C_J = \bigcup_{j \in J} C_j$. Allora $C_I = X$ e dalla locale finitezza del ricoprimento segue che ogni C_J è un chiuso di X .

Sia \mathcal{A} l'insieme delle coppie (J, g) con $J \subseteq I$ e $g \in F(C_J)$ tali che $g - f_i \in K(C_J \cap U_i)$ per ogni i . Ordiniamo \mathcal{A} per estensione, ossia $(J, g) \leq (H, h)$ se $J \subseteq H$ e $h|_{C_J} = g$, e dimostriamo che \mathcal{A} possiede elementi massimali.

Per il Lemma di Zorn ci basta dimostrare che ogni catena $\mathcal{B} = \{(J_s, g_s)\}$ in \mathcal{A} possiede maggioranti. Poniamo $H = \bigcup_s J_s$ e definiamo $h \in F(C_H)$ ponendo, per un 'simplesso' $\phi: \Delta \rightarrow C_H$,

$$h(\phi) = \begin{cases} g_s(\phi) & \text{se esiste } s \text{ tale che } \phi(\Delta) \subseteq C_{J_s} \\ 0 & \text{se } \phi(\Delta) \not\subseteq C_{J_s} \forall s, \end{cases}$$

ed il fatto che \mathcal{B} sia una catena garantisce che h è ben definita. Rimane da dimostrare che $h - f_i \in K(C_H \cap U_i)$ per ogni i . Sia adesso $i \in I$ fissato; per ogni $x \in U_i \cap C_H$ scegliamo un intorno $x \in W$ tale che $W \cap C_j \neq \emptyset$ per al più un numero finito di indici $j \in H$. Ma allora esiste J_s nella catena che contiene tali indici, quindi $W \cap C_H = W \cap C_{J_s}$ e $h - f_i = g_s - f_i \in K(W \cap C_H \cap U_i)$. Dato che x è un punto qualsiasi di $U_i \cap C_H$ si ottiene $h - f_i = g_s - f_i \in K(C_H \cap U_i)$.

Sia dunque $(H, h) \in \mathcal{A}$ un elemento massimale e dimostriamo che $H = I$. Assumiamo per assurdo che esista $i \notin H$. Per il Lemma 4.9.1 possiamo trovare:

- (1) un elemento $q \in K(U_i)$ tale che $q|_{C_H \cap U_i} = h - f_i$;
- (2) un elemento $\tilde{k} \in F(C_H \cup U_i)$ tale che $\tilde{k}|_{C_H} = h$ e $\tilde{k}|_{U_i} = f_i + q$.

Denotiamo $M = H \cup \{i\}$ e $k = \tilde{k}|_{C_M}$ e dimostriamo che $(M, k) \in \mathcal{A}$ in modo da avere una contraddizione. Occorre provare che per ogni j si ha $k - f_j \in K(C_M \cap U_j)$; Preso un punto $x \in C_M \cap U_j$, sono possibili due casi: $x \notin C_i$ e $x \in C_i$.

Se $x \notin C_i$ allora basta prendere un aperto $x \in W \subseteq U_j$ tale che $W \cap C_i = \emptyset$. Allora $C_M \cap W = C_H \cap W$ e qui la restrizione di $k - f_j$ a $C_M \cap W$ è una sezione di K . Se $x \in C_i$ prendiamo come intorno $x \in W = U_i \cap U_j$, allora $(k - f_j)|_{C_M \cap W}$ è la restrizione di $(\tilde{k} - f_j)|_W$ che però è uguale alla $f_i + q - f_j$ che appartiene a $K(W)$.

Abbiamo dunque provato che \mathcal{P} è un fascio. Per dimostrare che \mathcal{P} è fine, sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X rispetto al quale vogliamo trovare una partizione dell'identità e scegliamo un ricoprimento $(C_i)_{i \in I}$ chiuso e localmente finito di X tale che $C_i \subseteq U_i$ per ogni i : tale ricoprimento esiste per il teorema di restringimento. Fissiamo un punto $o \in \Delta$ e scegliamo un'applicazione $s: X \rightarrow I$ tale che $x \in C_{s(x)}$ per ogni $x \in X$.

Per ogni $i \in I$ definiamo l'omomorfismo $p_i: S(X) \rightarrow S(X)$ che negli elementi della base $\phi \in \Delta(X)$ vale:

$$p_i(\phi) = \begin{cases} \phi & \text{se } s(\phi(o)) = i, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È chiaro dalla definizione che $p_i(S(V)) \subseteq S(V)$ per ogni $i \in I$ ed ogni aperto $V \subseteq X$, e che per ogni $c \in S(X)$ si ha $p_i(c) \neq 0$ per finiti indici i e $\sum_i p_i(c) = c$.

I morfismi di prefasci $f_i: F \rightarrow F$, $f_i = p_i^\vee$, preservano le sezioni localmente nulle e si fattorizzano a morfismi di fasci $f_i: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Per ogni aperto U , ogni $\alpha \in F(U)$ ed ogni $\phi: \Delta \rightarrow U$ si ha

$$f_i(\alpha)(\phi) = \begin{cases} \alpha(\phi) & \text{se } s(\phi(o)) = i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $U = X - C_i = \emptyset$ allora $s(\phi(o)) \neq i$ e questo prova che f_i è nullo su U , ossia $\text{Supp}(f_i) \subseteq C_i$. Ha quindi senso considerare la somma $\sum_i f_i: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ed è chiaro dalla definizione che $\sum_i f_i = \text{Id}$. \square

Siamo adesso in grado di studiare le relazioni tra le coomologie singolari, di Čech e di Alexander-Spanier negli spazi PHH. Come sopra, denotiamo con G un gruppo abeliano fissato.

TEOREMA 4.9.3. *Sia X uno spazio topologico PHH che ammette una base della topologia di X formata da aperti contraibili. Allora la coomologia di Čech di X a valori nel fascio costante G_X coincide con la coomologia singolare a coefficienti in G .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto $U \subseteq X$ abbiamo visto nel Teorema 2.6.8 che i gruppi di coomologia singolare $H^p(U, G)$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia del complesso delle cocatene singolari piccole

$$0 \rightarrow \mathcal{P}^0(U, G) \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{P}^1(U, G) \xrightarrow{d^\vee} \dots$$

Dalla definizione di cocatena piccola segue inoltre $\mathcal{P}^0(U, G) = S^0(U, G) = \{f: U \rightarrow G\}$ e possiamo considerare il complesso esteso

$$0 \rightarrow G_X(U) \xrightarrow{i} \mathcal{P}^0(U, G) \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{P}^1(U, G) \xrightarrow{d^\vee} \dots,$$

dove i è l'inclusione naturale, dalle applicazioni localmente costanti alle applicazioni tutte. Il fatto che $d^\vee i = 0$ segue dal fatto che, per motivi di connessione, ogni applicazione localmente costante $U \rightarrow G$ è costante sull'immagine di ogni simpleso singolare. Se U è contraibile sappiamo che $H^0(U, G) = \{f: U \rightarrow G \text{ costanti}\} = G_X(U)$, $H^p(U, G) = 0$ per ogni $p > 0$ e di conseguenza

$$0 \rightarrow G_X(U) \xrightarrow{i} \mathcal{P}^0(U, G) \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{P}^1(U, G) \rightarrow \dots$$

è una successione esatta.

Per ipotesi X è PHH, e per il Teorema 4.9.2 tutti i prefasci \mathcal{P}_G^q , dove $\mathcal{P}_G^q(U) = \mathcal{P}^q(U, G)$, sono fasci fini. Per ipotesi esiste una base della topologia di X formata da aperti contraibili ed il Lemma 3.5.1 implica che

$$0 \rightarrow G_X \xrightarrow{i} \mathcal{P}_G^0 \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{P}_G^1 \rightarrow \dots$$

è una risoluzione fine del fascio costante. Per concludere basta applicare il Corollario 4.8.4. \square

TEOREMA 4.9.4. *Sia X uno spazio topologico PHH. Allora la coomologia di Čech di X a valori nel fascio costante G_X coincide con la coomologia di Alexander–Spanier a coefficienti in G .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U \subseteq X$ un aperto; nella Sezione 2.7 abbiamo definito il complesso di Alexander–Spanier

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^0(U, G) \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^1(U, G) \xrightarrow{\partial} \dots$$

ed abbiamo visto che

$$0 \rightarrow G_X(U) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0(U, G) \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^1(U, G)$$

è una successione esatta, dove i è l'inclusione delle funzioni $U \rightarrow G$ localmente costanti nelle funzioni tutte.

Sempre per il Teorema 4.9.2 tutti i prefasci \mathcal{A}^q , dove $\mathcal{A}^q(U) = \mathcal{A}^q(U, G)$, sono fasci fini. Per concludere, grazie a teorema di de Rham astratto ci basta dimostrare che

$$0 \rightarrow G_X \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{A}^1 \rightarrow \dots$$

è una successione esatta. L'esattezza di $0 \rightarrow G_X \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^1$ segue dall'esattezza a livello di sezioni su ogni aperto e dal Lemma 3.5.1. Rimane da verificare l'esattezza in \mathcal{A}^q per ogni $q > 1$.

Siano quindi $x \in X$ e $\alpha_x \in \mathcal{A}_x^q$ un germe di cocatena tale che $\partial \alpha_x = 0$. Scegliamo un intorno aperto U di x ed una cocatena $\alpha \in \mathcal{A}^q(U, G)$ tali che $\alpha_x = [U, \alpha]$. Allora $\partial \alpha$ si annulla in un intorno di x e quindi, a meno di restringere U , non è restrittivo supporre $\partial \alpha = 0$. Per il Lemma 2.7.3 esiste un aperto $x \in V \subseteq U$ ed una cocatena $\beta \in \mathcal{A}^{q-1}(V, G)$ tale che $\partial \beta = \alpha|_V$. A maggior ragione $\partial \beta_x = \alpha_x$. \square

Come corollario immediato dei precedenti teoremi abbiamo che negli spazi PHH localmente contraibili le coomologie singolare e di Alexander–Spanier coincidono.

Esercizi.

Negli esercizi manterremo le notazioni utilizzate nella sezione.

ESERCIZIO 4.19. Dimostrare che il morfismo di prefasci $F \rightarrow \mathcal{P}$ è un isomorfismo sulle spighe e che esiste un morfismo di prefasci $\mathcal{P} \rightarrow F^+$. Dedurre che se X è PHH allora $\mathcal{P} = F^+$.

ESERCIZIO 4.20. Modificare (leggermente) la dimostrazione del Teorema 4.9.2 per dimostrare che se X è paracompatto di Hausdorff (ma non PHH), allora $F^+ = \mathcal{P}^+$ è un fascio tale che $\mathcal{P}^+(X) = \mathcal{P}(X)$.

Spazi con funzioni

Il concetto di spazio con funzioni è utile per trattare in maniera unificata alcuni oggetti di uso comune in geometria: varietà differenziabili, varietà complesse, varietà algebriche su campi algebricamente chiusi, spazi complessi ridotti ed altri ancora. Esiste la nozione ancora più generale di spazio anellato, necessaria per definire, ad esempio, gli schemi, gli spazi algebrici e gli spazi complessi non ridotti, che però si colloca molto al di fuori del contesto di queste note.

Esistono in letteratura diverse definizioni di spazio con funzioni, che differiscono leggermente l'una dall'altra; noi seguiremo la definizione data da Kempf [28]. Infine, per semplicità terminologica, chiameremo “prevarietà” gli spazi con funzioni, anche se questo termine è estremamente generico e viene utilizzato per indicare una moltitudine di oggetti, anche molto differenti tra loro.

5.1. Fasci di anelli, moduli e spazi vettoriali

Richiamiamo brevemente il concetto di modulo su un anello: salvo avviso contrario, *ogni anello viene considerato commutativo con unità*. Dato un anello A , un A -modulo è un gruppo abeliano $(M, +, 0)$, equipaggiato con un'applicazione

$$A \times M \rightarrow M, \quad (a, m) \mapsto am,$$

che soddisfa le stesse identiche condizioni assiomatiche degli spazi vettoriali. Se M è un A -modulo, un sottogruppo $N \subseteq M$ si dice un sottomodulo se $an \in N$ per ogni $a \in A$ ed ogni $n \in N$.

Ad esempio, per ogni anello A , il prodotto $A \times A \rightarrow A$ definisce su A una struttura di A -modulo i cui sottomoduli sono esattamente gli ideali di A .

ESEMPIO 5.1.1. Per alcuni anelli particolari, la nozione di modulo coincide con altri concetti già incontrati:

- (1) se $A = \mathbb{K}$ è un campo, allora gli A -moduli sono esattamente gli spazi vettoriali su \mathbb{K} ;
- (2) se $A = \mathbb{Z}$, allora gli A -moduli sono esattamente i gruppi abeliani;
- (3) se $A = \mathbb{K}[t]$, allora gli A -moduli sono esattamente gli spazi vettoriali su \mathbb{K} equipaggiati di un endomorfismo \mathbb{K} -lineare (corrispondente alla moltiplicazione per t);
- (4) se $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, allora gli A -moduli sono esattamente gli spazi vettoriali su \mathbb{K} equipaggiati con n endomorfismi \mathbb{K} -lineari che commutano tra loro.

Se M, N sono A -moduli, denotiamo con $\text{Hom}_A(N, M)$ l'insieme dei morfismi di A -moduli $f: N \rightarrow M$, definiti alla stessa maniera delle applicazioni lineari, ossia tali che $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ per ogni $a, b \in A$ e $x, y \in N$.

Anche $\text{Hom}_A(N, M)$ possiede una struttura naturale di A -modulo, dove per $a \in A$ e $f, g \in \text{Hom}_A(N, M)$ si pone:

$$(af)(x) = a(f(x)), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{per ogni } x \in N.$$

Lasciamo al lettore il compito di estendere la nozione di gruppo quoziente (e corrispondenti proprietà universali, ossia i teoremi di isomorfismo dei gruppi) al contesto dei moduli. Una catena di morfismi di A -moduli si dice una successione esatta (risp.: un complesso) se lo è come successione di gruppi abeliani.

Dato un insieme I ed una famiglia di A -moduli $(M_i)_{i \in I}$ si definisce il loro *prodotto diretto*

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i \text{ per ogni } i\}$$

e la loro somma diretta

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i \neq 0 \text{ per al più finiti indici } i \right\}.$$

Per definizione, un A -modulo è libero se è isomorfo ad una somma diretta di copie di A ; ad esempio, sono liberi i moduli

$$A^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A\} = \bigoplus_{i=1}^n A = \prod_{i=1}^n A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lo A -modulo libero generato da un insieme S è

$$\bigoplus_{s \in S} A s = \left\{ \text{combinazioni lineari finite } \sum a_i s_i \text{ con } a_i \in A, s_i \in S \right\}.$$

Dunque la nozione di \mathbb{Z} -modulo libero coincide con quella di gruppo abeliano libero; segue dal teorema di esistenza delle basi che ogni spazio vettoriale su \mathbb{K} è un \mathbb{K} -modulo libero.

Ricordiamo che per **dominio ad ideali principali** si intende un anello commutativo con unità che è un *dominio di integrità ed ogni ideale è generato da un solo elemento*. I tre anelli \mathbb{K} , \mathbb{Z} , e $\mathbb{K}[t]$ dell'Esempio 5.1.1 sono domini ad ideali principali; è ben noto che ogni anello euclideo è un dominio ad ideali principali. L'anello $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ non è un dominio ad ideali principali, sebbene i suoi unici ideali siano (0) , (1) , (2) , mentre l'ideale di $\mathbb{Z}[t]$ formato dai polinomi $p(t)$ tali che $p(0) \in 2\mathbb{Z}$ non è principale.

Per i moduli liberi su domini ad ideali principali vale, con dimostrazione sostanzialmente identica, l'analogo del Teorema 1.1.5.

TEOREMA 5.1.2. *Siano A un dominio ad ideali principali, $M = \bigoplus_{i \in I} A_i$, con $A_i = A$, un A -modulo libero e $N \subseteq M$ un sottomodulo. Allora anche N è un A -modulo libero. Inoltre, se I è un insieme finito, ossia $M \cong A^m$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $N \cong A^n$ con $0 \leq n \leq m$.*

Un A -modulo M si dice **finitamente generato** se è generato da un numero finito di elementi o, equivalentemente, se esiste un omomorfismo surgettivo $A^n \rightarrow M$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Quindi, un gruppo abeliano G è finitamente generato se lo è come \mathbb{Z} -modulo, ossia se esiste un omomorfismo surgettivo di gruppi $\mathbb{Z}^n \rightarrow G$.

LEMMA 5.1.3. *Sia A un dominio ad ideali principali. Allora:*

- (1) *sottomoduli e quozienti di A -moduli finitamente generati sono finitamente generati;*
- (2) *se $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ è una successione esatta di A -moduli, con M, P finitamente generati, allora anche N è finitamente generato.*

Anche in questo caso la dimostrazione è la stessa, mutatis mutandis, del Lemma 2.1.1; i dettagli sono lasciati per esercizio.

Per anelli qualsiasi il Lemma 5.1.3 è generalmente falso (vedi Esercizio 2.1); gli anelli nei quali è vero prendono il nome di *anelli noetheriani*. Rimandiamo al classico testo di Atiyah e Macdonald [3] per una trattazione approfondita degli anelli noetheriani, ed in particolare per la prova che un anello A è noetheriano se e soltanto se ogni suo ideale è finitamente generato.

Esistono molti anelli noetheriani che non sono domini ad ideali principali; ad esempio $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{K}[x, y]$ e più in generale tutti i quozienti di $A[t_1, \dots, t_n]$ con A dominio ad ideali principali.

Dato un gruppo abeliano G ed un A -modulo M , il gruppo abeliano $\text{Hom}(G, M)$ possiede una naturale struttura di A -modulo con il prodotto per scalare definito dalla formula $(af)(x) = af(x)$ per $a \in A$ ed $f \in \text{Hom}(G, M)$.

PROPOSIZIONE 5.1.4. *Siano G un gruppo abeliano finitamente generato, A un dominio ad ideali principali ed M un A -modulo finitamente generato. Allora $\text{Hom}(G, M)$ è un A -modulo finitamente generato.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste un omomorfismo surgettivo di gruppi $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ e da questo segue che l'applicazione trasposta

$$p^\vee: \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M), \quad p^\vee(f) = f \circ p,$$

è un omomorfismo iniettivo di A -moduli. D'altra parte ogni omomorfismo $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ è univocamente determinato dai valori che assume f nella base canonica di \mathbb{Z}^n e quindi si ha un isomorfismo naturale di A -moduli $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M) = \bigoplus_{i=1}^n M$. Dunque, se M è finitamente generato, anche $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, M)$ è finitamente generato e, se A è un dominio ad ideali principali (basterebbe noetheriano), allora per il Lemma 2.1.1 il sottomodulo $\text{Hom}(G, M)$ è finitamente generato. \square

La definizione di (pre)fascio di anelli non presenta grosse sorprese. Un (pre)fascio di anelli \mathcal{A} è un (pre)fascio di gruppi abeliani tale che ogni $\mathcal{A}(U)$ è un anello per ogni aperto U e la funzioni di restrizione sono omomorfismi di anelli. È quasi immediato osservare che ogni spiga possiede un'unica struttura di anello per cui tutti i morfismi $\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}_x$, con $x \in U$, sono omomorfismi di anelli.

Se \mathcal{A} è un (pre)fascio di anelli, un (pre)fascio di sottoanelli di \mathcal{A} è un sotto(pre)fascio $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tale che per ogni aperto U si ha che $\mathcal{B}(U)$ è un sottoanello di $\mathcal{A}(U)$. Analogamente si definiscono i (pre)fasci di ideali.

DEFINIZIONE 5.1.5. Sia \mathcal{A} un fascio di anelli commutativi su X . Un \mathcal{A} -modulo è un fascio di gruppi abeliani \mathcal{F} equipaggiato di un morfismo di fasci $\mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tale che per ogni aperto U il 'prodotto' $\mathcal{A}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ induce una struttura di $\mathcal{A}(U)$ -modulo su $\mathcal{F}(U)$. Un morfismo di \mathcal{A} -moduli è un morfismo di fasci che commuta con i prodotti.

DEFINIZIONE 5.1.6. Siano \mathcal{A} un fascio di anelli commutativi e \mathcal{F} un \mathcal{A} -modulo. Diremo che \mathcal{F} è **libero di rango** n se esistono n sezioni s_1, \dots, s_n tali che il morfismo di fasci

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_i a_i s_i$$

è un isomorfismo (l'espressione $\sum_i a_i s_i$ va ovviamente interpretata cum grano salis). Diremo che \mathcal{F} è **localmente libero di rango** n se ogni punto possiede un intorno aperto U tale che $\mathcal{F}|_U$ è un $\mathcal{A}|_U$ -modulo libero di rango n .

Lasciamo al lettore il semplice compito di immaginare la corretta definizione di fascio di spazi vettoriali su di un campo \mathbb{K} .

Esercizi.

ESERCIZIO 5.1. Siano A un anello commutativo con unità e $I \subseteq A$ un ideale proprio. Provare ogni elemento di $A - I$ è invertibile se e solo se I è l'unico ideale massimale di A .

ESERCIZIO 5.2 (Prodotto tensoriale di A -moduli). Sia A un anello commutativo (non necessariamente con unità); dati due A -moduli M, N indichiamo con $M \otimes N$ il loro prodotto tensoriale come gruppi abeliani. Si consideri il sottogruppo $S \subseteq M \otimes N$ generato da tutti gli elementi del tipo $am \otimes n - m \otimes an$, al variare di $a \in A$, $m \in M$ e $n \in N$. Definiamo $M \otimes_A N = M \otimes N / S$. Dimostrare che:

- (1) esiste un'unica struttura di A -modulo su $M \otimes_A N$ per cui vale $a(m \otimes n) = am \otimes n = m \otimes an$ (sugg.: per ogni $a \in A$, l'applicazione $M \times N \rightarrow M \otimes N$, $(m, n) \mapsto (am) \otimes n$, è \mathbb{Z} -bilineare);
- (2) l'applicazione $M \times N \rightarrow M \otimes_A N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ è A -bilineare;
- (3) (proprietà universale) per ogni applicazione A -bilineare $\phi: M \times N \rightarrow P$ esiste un unico morfismo di A -moduli $f: M \otimes_A N \rightarrow P$ tale che $f(m \otimes n) = \phi(m, n)$.
- (4) ogni coppia di morfismi di A -moduli $M \rightarrow M'$, $N \rightarrow N'$ induce in maniera naturale un morfismo di A -moduli $M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$.

ESERCIZIO 5.3 (Prodotto cup in coomologia di Čech). Siano \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X e \mathcal{A} un prefascio di anelli commutativi su X . Per ogni $p, q \geq 0$ definiamo

$$\cup: C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \times C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow C^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{A}), \quad (f \cup g)_{i_0 \dots i_{p+q}} = f_{i_0 \dots i_p} g_{i_p \dots i_{p+q}},$$

dove il prodotto a destra dell'uguaglianza è inteso come il prodotto in $\mathcal{A}(U_{i_0 \dots i_{p+q}})$ delle restrizioni di $f_{i_0 \dots i_p}$ e $g_{i_p \dots i_{p+q}}$. Dimostrare:

- (1) Il prodotto \cup è associativo.
- (2) Se $f \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ allora $f \cup g = g \cup f$ per ogni $g \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$.

- (3) Se f è una p -cocatena, allora $\delta(f \cup g) = (\delta f) \cup g + (-1)^p f \cup (\delta g)$.
 (4) Il prodotto \cup si fattorizza ad un prodotto associativo in coomologia

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \times H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{A})$$

che commuta con le applicazioni di raffinamento e quindi, passando al colimite, induce un prodotto $\check{H}^p(X, \mathcal{A}) \times \check{H}^q(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\cup} \check{H}^{p+q}(X, \mathcal{A})$.

Nota: abbiamo visto che se $f \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ e $g \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, allora $f \cup g = g \cup f$. In generale, si può dimostrare (non è banale) che se $f \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ e $g \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, allora $f \cup g = (-1)^{pq} g \cup f$.

ESERCIZIO 5.4. Sia $\pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ la proiezione canonica e consideriamo su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ il fascio di anelli \mathcal{A} dato dalle funzioni continue. Per ogni intero n definiamo il fascio \mathcal{F}_n ponendo, per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$

$$\mathcal{F}_n(U) = \{f: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \mid f(tx) = t^n f(x) \forall x \in \pi^{-1}(U), 0 \neq t \in \mathbb{R}\}.$$

- 1) Provare ogni \mathcal{F}_n è un \mathcal{A} -modulo localmente libero di rango 1. Provare inoltre che \mathcal{F}_0 è libero e \mathcal{F}_{-1} non è libero (suggerimento: il rivestimento $S^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ non è banale).
 2) Provare inoltre che per ogni n esiste un isomorfismo di \mathcal{A} -moduli $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+2}$.

Nota: si può fare la stessa costruzione sui numeri complessi e ogni \mathcal{F}_n continua ad essere un \mathcal{A} -modulo localmente libero di rango 1. Si può anche dimostrare (ma non è banale) che di questi solamente \mathcal{F}_0 è libero e \mathcal{F}_i è isomorfo ad \mathcal{F}_j solo se $i = j$.

5.2. Prevarietà

Sia \mathbb{K} un campo, per ogni spazio topologico X denotiamo con \mathbb{K}_X il fascio delle funzioni localmente costanti a valori in \mathbb{K} e con $\mathcal{D}\mathbb{K}_X$ quello delle sue sezioni discontinue, e cioè

$$\mathcal{D}\mathbb{K}_X(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{K}\} = \prod_{x \in U} \mathbb{K}.$$

Entrambi sono fasci di anelli commutativi con unità.

Data un'applicazione continua $F: X \rightarrow Y$, per ogni aperto $U \subseteq Y$ denotiamo

$$F^*: \mathcal{D}\mathbb{K}_Y(U) \rightarrow \mathcal{D}\mathbb{K}_X(F^{-1}(U)), \quad F^*(f) = f \circ F.$$

Si tratta di un omomorfismo di anelli che preserva le unità e le funzioni localmente costanti.

DEFINIZIONE 5.2.1. Una \mathbb{K} -prevarietà, o **spazio con funzioni in \mathbb{K}** , è una coppia (X, \mathcal{A}) con X spazio topologico e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}\mathbb{K}_X$ sottofascio di sottoanelli tale che:

- (1) $\mathbb{K}_X \subseteq \mathcal{A}$,
 (2) per ogni aperto $U \subseteq X$ ed ogni $f \in \mathcal{A}(U)$, l'insieme

$$D(f) := \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$$

è aperto e $1/f \in \mathcal{A}(D(f))$.

Gli elementi di $\mathcal{A}(U)$ si dicono **funzioni regolari** su U ed \mathcal{A} prende il nome di **fascio strutturale** della \mathbb{K} -prevarietà.

È utile osservare che, nella definizione precedente, la condizione (1) è equivalente a ciascuna delle seguenti:

- (1a) Ogni anello $\mathcal{A}(U)$ contiene le funzioni costanti $U \in \mathbb{K}$.
 (1b) Ogni anello $\mathcal{A}(U)$ contiene la funzione costante $f(x) = 1$ ed è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}\mathbb{K}_X(U)$.

L'unica implicazione non banale è (1a) \Rightarrow (1): se $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ è localmente costante, allora esiste un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ tale che $f|_{U_i}$ è costante per ogni i . Ma allora $f|_{U_i} \in \mathcal{A}(U_i)$ per ogni i e, dato che \mathcal{A} è un sottofascio di $\mathcal{D}\mathbb{K}_X$ si ha $f \in \mathcal{A}(U)$.

ESEMPIO 5.2.2. Per i nostri scopi immediati, l'esempio di prevarietà (X, \mathcal{A}) più rilevante è quello in cui X è un aperto di \mathbb{R}^n e $\mathcal{A} = C^\infty$ è il fascio delle funzioni di classe C^∞ a valori reali.

ESEMPIO 5.2.3 (restrizione degli aperti). Una \mathbb{K} -prevarietà (X, \mathcal{A}) determina canonicamente una \mathbb{K} -prevarietà $(U, \mathcal{A}|_U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, dove $\mathcal{A}|_U$ è la restrizione ad U del fascio strutturale \mathcal{A} .

ESEMPIO 5.2.4 (restrizione a sottospazi). Una \mathbb{K} -prevarietà (X, \mathcal{A}) determina canonicamente una \mathbb{K} -prevarietà $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ per ogni sottospazio $Y \subseteq X$. In questo caso il fascio $\mathcal{A}|_Y$ è dato dalle funzioni che sono localmente restrizioni di funzioni in \mathcal{A} . Più precisamente, se U è un aperto di Y diciamo che una funzione $f \in \mathcal{D}\mathbb{K}_Y(U)$ appartiene a $\mathcal{A}|_Y(U)$ se per ogni $x \in U$ esistono un aperto V di X ed una funzione $g \in \mathcal{A}(V)$ tali che $x \in V \cap Y \subseteq U$ e $g|_{V \cap Y} = f|_{V \cap Y}$.

DEFINIZIONE 5.2.5. Nelle notazioni dell'Esempio 5.2.4 diremo che $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ è una **sottoprevarietà** di (X, \mathcal{A}) . Diremo che una sottoprevarietà $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ è aperta (risp.: chiusa, localmente chiusa, compatta, connessa ecc.) se il sottospazio Y è aperto (risp.: chiuso, localmente chiuso, compatto, connesso ecc.).

ESEMPIO 5.2.6 (estensione degli scalari). Se $\mathbb{K} \subseteq F$ è una estensione di campi, vi è un modo naturale di associare ad ogni \mathbb{K} -prevarietà (X, \mathcal{A}) una F -prevarietà (X, \mathcal{A}^F) .

Iniziamo definendo due prefasci di sottoanelli $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{D}F_X$; per ogni aperto $U \subset X$ poniamo

$$\mathcal{A}'(U) = \left\{ \sum_{\text{finite}} a_i f_i \mid a_i \in F, f_i \in \mathcal{A}_X(U) \right\}.$$

Se pensiamo F come uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , allora ogni funzione $g \in \mathcal{A}'(U)$ si scrive in maniera unica come $g = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, con $f_i \in \mathcal{A}(U)$ e gli $a_i \in F$ linearmente indipendenti su \mathbb{K} ; in tal caso $g(x) = 0$ se e solo se $f_i(x) = 0$ per ogni i e quindi $D(g) = \cup_{i=1}^n D(f_i)$ è un aperto. Il secondo sottofascio di anelli è

$$\mathcal{A}''(U) = \{f/g \mid f, g \in \mathcal{A}'(U), g(x) \neq 0 \forall x \in U\}.$$

Per concludere, definiamo $\mathcal{A}^F \subseteq \mathcal{D}F_X$ come il sottofascio delle sezioni che appartengono localmente a \mathcal{A}'' . Lasciamo per esercizio la verifica che (X, \mathcal{A}^F) è una F -prevarietà e che, nel caso dell'estensione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ si ha

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}'' = \mathcal{A}' = \{f + ig \mid f, g \in \mathcal{A}\}.$$

Per semplificare le notazioni, da ora in poi diremo semplicemente prevarietà al posto di \mathbb{K} -prevarietà quando il campo \mathbb{K} è fissato a priori e/o è chiaro dal contesto

DEFINIZIONE 5.2.7. Un **morfismo**, o **applicazione regolare**, di prevarietà (sullo stesso campo \mathbb{K}) $F: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ è un'applicazione continua $F: X \rightarrow Y$ tale che per ogni aperto $U \subseteq Y$ si ha $F^*(\mathcal{A}_Y(U)) \subseteq \mathcal{A}_X(F^{-1}(U))$, ossia se per ogni $f \in \mathcal{A}_Y(U)$ vale $f \circ F \in \mathcal{A}_X(F^{-1}(U))$.

Con un leggero abuso di notazione, scriveremo $F^*\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}_X$ per indicare la condizione espressa nella precedente definizione di morfismo. È immediato osservare che le identità sono morfismi e che composizione di morfismi è ancora un morfismo.

ESEMPIO 5.2.8. Se $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ è una sottoprevarietà di (X, \mathcal{A}) , allora il morfismo di inclusione $Y \hookrightarrow X$ è anche un morfismo di prevarietà.

Un isomorfismo è un morfismo $F: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ tale che F è un omeomorfismo e $F^*: \mathcal{A}_Y(U) \rightarrow \mathcal{A}_X(F^{-1}(U))$ è un isomorfismo di anelli per ogni aperto $U \subseteq Y$. In tal caso F^{-1} è ancora un isomorfismo di prevarietà.

Vediamo come sono fatti, in concreto, i morfismi tra prevarietà come nell'Esempio 5.2.2.

PROPOSIZIONE 5.2.9. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ due aperti e $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ le componenti di un'applicazione continua $F: X \rightarrow Y$. Allora $F: (X, C^\infty) \rightarrow (Y, C^\infty)$ è un morfismo di prevarietà se e solo se $f_i \in C^\infty(X)$ per ogni i , ossia se e solo se F è un'applicazione di classe C^∞ .*

DIMOSTRAZIONE. Se F è un morfismo di prevarietà, ossia se $F^*C^\infty(V) \subseteq C^\infty(F^{-1}(V))$ per ogni aperto $V \subseteq Y$, dato che la restrizione a Y delle funzioni coordinate $x_1, \dots, x_m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sono di classe C^∞ , anche le funzioni $f_i = F^*x_i$ sono di classe C^∞ su $F^{-1}(Y) = X$. Viceversa, se ogni f_i è C^∞ , allora per ogni funzione g di classe C^∞ su un V si ha $F^*g = g(f_1, \dots, f_m)$ che è ancora di classe C^∞ su $F^{-1}(V)$ per i ben noti risultati di analisi. \square

LEMMA 5.2.10. *Siano date due prevarietà (X, \mathcal{A}) , (Y, \mathcal{E}) ed un'applicazione continua $F: X \rightarrow Y$:*

- (1) *date due basi $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ delle topologie di X e Y rispettivamente, F è un morfismo di prevarietà se e solo se per ogni $U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y$ tali che $F(U) \subseteq V$ ed ogni $f \in \mathcal{E}(V)$ vale $(F^*f)|_U \in \mathcal{A}(U)$.*
- (2) *dati due ricoprimenti aperti $X = \cup_{i \in I} U_i, Y = \cup_{j \in J} V_j$ ed una funzione $\gamma: I \rightarrow J$ tale che $F(U_i) \subseteq V_{\gamma(i)}$ per ogni i , F è un morfismo di prevarietà se e solo se per ogni $i \in I$ l'applicazione $F: (U_i, \mathcal{A}|_{U_i}) \rightarrow (V_{\gamma(i)}, \mathcal{E}|_{V_{\gamma(i)}})$ è un morfismo di prevarietà.*

DIMOSTRAZIONE. Entrambe le proprietà seguono facilmente dalle definizioni e dal fatto che \mathcal{A} è un fascio (dettagli per esercizio). \square

Esercizi.

ESERCIZIO 5.5. Siano $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ due prevarietà sullo stesso campo, $(W, \mathcal{B}|_W)$ una sotto-prevarietà di (Y, \mathcal{B}) e $F: X \rightarrow W$ continua. Provare che $F: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (W, \mathcal{B}|_W)$ è un morfismo di prevarietà se e solo se $F: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ è un morfismo di prevarietà.

ESERCIZIO 5.6 (Incollamento di fasci). Sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X . Si supponga che siano dati un fascio \mathcal{F}_i sull'aperto U_i per ogni indice i , e *isomorfismi* di fasci $f_{ij}: \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ per ogni $i, j \in I$. Si supponga inoltre che per ogni terna ordinata $i, j, k \in I$ si abbia un diagramma commutativo di isomorfismi di fasci

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_i|_{U_{ijk}} & \\ f_{ij} \swarrow & & \searrow f_{ik} \\ \mathcal{F}_j|_{U_{ijk}} & \xrightarrow{f_{jk}} & \mathcal{F}_k|_{U_{ijk}} \end{array}$$

In particolare, $f_{ii} = \text{Id}$ (mettere $j = k = i$) e $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ (mettere $i = k$). Definiamo il prefascio \mathcal{F} ponendo, per ogni aperto $U \subseteq X$:

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ (s_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \mid f_{ij}(s_i|_{U_{ij}}) = s_j|_{U_{ij}} \text{ per ogni } i, j \right\}.$$

Dimostrare che \mathcal{F} è un fascio e che esistono isomorfismi di fasci $f_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tali che $f_{ij} = f_j \circ f_i^{-1}$ su U_{ij} , per ogni $i, j \in I$.

Viceversa, sia \mathcal{G} un fascio su X e si assuma che esistano isomorfismi $g_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tali che $f_{ij} = g_j \circ g_i^{-1}$ su U_{ij} , per ogni $i, j \in I$. Dimostrare che \mathcal{G} è isomorfo a \mathcal{F} .

Spesso, con linguaggio impreciso, ci si riferisce ad \mathcal{F} come al fascio ottenuto 'incollando' i fasci \mathcal{F}_i .

ESERCIZIO 5.7 (Discesa di fasci). Sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e denotiamo con \mathcal{N} la famiglia dei sottoinsiemi finiti e non vuoti $\alpha \subseteq I$ tali che

$$U_\alpha := \bigcap_{i \in \alpha} U_i \neq \emptyset.$$

Si supponga che siano dati un fascio \mathcal{F}_α sull'aperto U_α per ogni $\alpha \in \mathcal{N}$, e *isomorfismi* di fasci $f_{\alpha\beta}: \mathcal{F}_\alpha|_{U_\beta} \rightarrow \mathcal{F}_\beta$ per ogni $\alpha \subseteq \beta \in \mathcal{N}$. Si supponga inoltre che per ogni terna $\alpha \subseteq \beta \subseteq \gamma \in \mathcal{N}$ si abbia un diagramma commutativo di isomorfismi di fasci

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_\alpha|_{U_\gamma} & \\ f_{\alpha\beta} \swarrow & & \searrow f_{\alpha\gamma} \\ \mathcal{F}_\beta|_{U_\gamma} & \xrightarrow{f_{\beta\gamma}} & \mathcal{F}_\gamma \end{array}$$

Dimostrare che esiste un fascio \mathcal{F} su X ed isomorfismi di fasci $f_\alpha: \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$ tali che $f_{\alpha\beta} f_\alpha = f_\beta$ su U_β , per ogni $\alpha \subseteq \beta \in \mathcal{N}$. (Sugg.: per ogni $i, j \in I$ definire $g_{ij} = f_{\{j\}\{i,j\}} f_{\{i\}\{i,j\}}^{-1}$ e usare l'Esercizio 5.6.)

5.3. Prevarietà modellate

Si assuma di aver fissato un insieme \mathcal{M} di prevarietà definite sullo stesso campo. Chiameremo **modelli** gli elementi di \mathcal{M} .

DEFINIZIONE 5.3.1. Diremo che una prevarietà (X, \mathcal{A}) è **modellata su \mathcal{M}** se è localmente isomorfa ad un modello in \mathcal{M} , e cioè se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $x \in U \subseteq X$ tale che la prevarietà $(U, \mathcal{A}|_U)$ sia isomorfa ad un modello in \mathcal{M} .

Se \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 sono due insiemi di modelli tali che ogni elemento di \mathcal{M}_1 è modellato su \mathcal{M}_2 , allora ogni prevarietà modellata su \mathcal{M}_1 è anche modellata su \mathcal{M}_2 .

Un modo tradizionale di costruire prevarietà modellate è mediante gli atlanti. Per semplicità di notazione, se (X, \mathcal{A}) è una prevarietà e $U \subseteq X$ è un aperto, scriveremo (U, \mathcal{A}) per indicare la prevarietà $(U, \mathcal{A}|_U)$

DEFINIZIONE 5.3.2. Sia \mathcal{M} un insieme di modelli. Un **\mathcal{M} -atlante** di uno spazio topologico X è una collezione indicizzata $(U_i, F_i, (V_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$ dove:

- (1) $(U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X ;
- (2) $(V_i, \mathcal{E}_i) \in \mathcal{M}$ per ogni i ;
- (3) $F_i: U_i \rightarrow V_i$ è un omeomorfismo per ogni i .

Per tale collezione deve valere la condizione che, per ogni $i, j \in I$ tali che $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'applicazione

$$(5.1) \quad F_{ij} := (F_j)|_{U_{ij}} \circ (F_i^{-1})|_{V_{ij}}: (V_{ij}, \mathcal{E}_i) \rightarrow (V_{ij}, \mathcal{E}_j), \quad \text{dove } V_{ij} := F_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i,$$

sia un isomorfismo di prevarietà.

TEOREMA 5.3.3. *Ogni \mathcal{M} -atlante $(U_i, F_i, (V_i, \mathcal{E}_i))$ di uno spazio topologico X determina univocamente un fascio strutturale \mathcal{A} che rende (X, \mathcal{A}) una prevarietà e tale che $F_i: (U_i, \mathcal{A}) \rightarrow (V_i, \mathcal{E}_i)$ sia un isomorfismo per ogni i . In particolare, (X, \mathcal{A}) è una prevarietà modellata su \mathcal{M} .*

DIMOSTRAZIONE. Tenendo presente che \mathcal{A} deve essere un sottofascio di $\mathcal{D}\mathbb{K}_X$, per ogni aperto $U \subseteq X$ si deve avere

$$\mathcal{A}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{K} \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{A}(U \cap U_i) \text{ per ogni } i\},$$

mentre la condizione che ogni $F_i: (U_i, \mathcal{A}) \rightarrow (V_i, \mathcal{E}_i)$ sia un isomorfismo impone $\mathcal{A}(U \cap U_i) = F_i^* \mathcal{E}_i(F_i(U \cap U_i))$ per ogni i ; in questo modo abbiamo dimostrato l'unicità di \mathcal{A} .

Per quanto riguarda l'esistenza risulta più agevole lavorare con gli omeomorfismi inversi $G_i := F_i^{-1}: V_i \rightarrow U_i$. Per quanto visto a riguardo dell'unicità, non dobbiamo fare altro che verificare che il prefascio di sottoanelli

$$\mathcal{A}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{K} \mid G_i^*(f|_{U \cap U_i}) \in \mathcal{E}_i(F_i(U \cap U_i)) \text{ per ogni } i\}$$

è il fascio strutturale di una prevarietà che soddisfa le condizioni del teorema.

Siccome una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ è localmente costante se e solo se ogni restrizione $f: U \cap U_i \rightarrow \mathbb{K}$ è localmente costante, si ha $\mathbb{K}_X \subseteq \mathcal{A}$.

Dato che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}\mathbb{K}_X$, per mostrare che \mathcal{A} è un sottofascio basta provare che per ogni unione di aperti $W = \cup_{j \in J} W_j$ ed ogni funzione $f: W \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $f|_{W_j} \in \mathcal{A}(W_j)$ per ogni j si ha $f \in \mathcal{A}(W)$; se

$$G_i^*(f|_{W_j \cap U_i}) \in \mathcal{E}_i(F_i(W_j \cap U_i)),$$

per ogni i, j , allora

$$G_i^*(f|_{W_j \cap U_i}) = G_i^*(f|_{W_h \cap U_i}) \text{ in } F_i(W_j \cap W_h \cap U_i)$$

e dato che \mathcal{E}_i è un fascio esiste $g_i \in \mathcal{E}_i(F_i(W \cap U_i))$ tale che $g_i = G_i^*(f|_{W_j \cap U_i})$ su $F_i(W_j \cap U_i)$ per ogni j . Ma allora $f|_{W \cap U_i} = F_i^*(g_i) \in F_i^* \mathcal{E}_i(F_i(W \cap U_i))$.

Se $f \in \mathcal{A}(U)$ allora $D(f) = \cup_i D(f|_{U \cap U_i})$ ed ogni $D(f|_{U \cap U_i})$ è un aperto in $U \cap U_i$. Inoltre $1/f \in \mathcal{A}(D(f|_{U \cap U_i}))$ per ogni i e quindi $1/f \in \mathcal{A}(D(f))$ per le proprietà di fascio.

Abbiamo quindi provato che (X, \mathcal{A}) è una prevarietà. Sia adesso i un indice fissato e dimostriamo che per ogni aperto $W \subseteq U_i$ si ha $\mathcal{A}(W) = F_i^* \mathcal{E}_i(F_i(W))$. L'inclusione $\mathcal{A}(W) \subseteq F_i^* \mathcal{E}_i(F_i(W))$ segue dalla definizione di \mathcal{A} ; dimostriamo l'inclusione opposta, ossia che per ogni $g \in \mathcal{E}_i(F_i(W))$ si ha $F_i^*(g) \in \mathcal{A}(U)$, ossia che per ogni j vale $F_i^*(g)|_{W \cap U_j} \in F_j^* \mathcal{E}_j(F_j(W \cap U_j))$. Ma questo segue immediatamente dal fatto che F_{ji} è un isomorfismo di prevarietà. \square

Una generalizzazione della costruzione di prevarietà a partire da atlanti è quella che in gergo viene detta ‘incollamento’. Il dato di partenza, detto **dato di incollamento**, è composto da un campo \mathbb{K} e tre collezioni di oggetti che chiameremo rispettivamente base, pezze e cociclo, definiti nel modo seguente:

1) La **base** è una collezione indicizzata di aperti $(U_i)_{i \in I}$ in uno spazio topologico X .

2) Le **pezze** sono delle coppie (Y_i, p_i) , con $i \in I$, dove Y_i è una prevarietà su \mathbb{K} e $p_i: Y_i \rightarrow U_i$ applicazione continua. Date base e pezze, per ogni $i_0, \dots, i_p \in I$ denotiamo

$$Y_{i_0 i_1 \dots i_p} = p_{i_0}^{-1}(U_{i_0 \dots i_p}) \subseteq Y_{i_0}$$

considerata come sottoprevarietà aperta di Y_{i_0} .

3) Il **cociclo** è una collezione di isomorfismi di \mathbb{K} -prevarietà

$$f_{ij}: Y_{ji} \rightarrow Y_{ij}, \quad i, j \in I,$$

tali che

$$(5.2) \quad p_i f_{ij} = p_j \text{ su } Y_{ji} \quad \forall i, j \in I,$$

$$(5.3) \quad f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij} = \text{Id} \text{ su } Y_{jik} \quad \forall i, j, k \in I.$$

Gli isomorfismi f_{ij} vengono usualmente detti *funzioni di incollamento* e la condizione (5.3) *condizione di cociclo*. È immediato verificare che la condizione di cociclo è del tutto equivalente a

$$(5.4) \quad \begin{cases} f_{ii} = \text{Id} & \text{per ogni } i \in I, \\ f_{ij} = f_{ji}^{-1} & \text{per ogni } i, j \in I, \\ f_{ij} = f_{ik} f_{kj} & \text{per ogni } i, j, k \in I. \end{cases}$$

Infatti dalle $f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij} = \text{Id}$ segue (per $i = j = k$) $f_{ii} = \text{Id}$ per ogni i , poi (per $i = k$) che $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ ed infine che $f_{ij} = f_{ik} f_{kj}^{-1} = f_{ik} f_{kj}$.

TEOREMA 5.3.4 (di incollamento). *Siano date la base $(U_i)_{i \in I}$, le pezze $p_i: Y_i \rightarrow U_i$ e le funzioni di incollamento f_{ij} come sopra. Allora esiste una prevarietà Y assieme ad un'applicazione continua $p: Y \rightarrow X$ e isomorfismi $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ tali che $p q_i = p_i$ per ogni i e $f_{ij} = q_i^{-1} q_j|_{Y_{ji}}$ per ogni $i, j \in I$.*

Inoltre, se X e ogni Y_i sono di Hausdorff, anche Y è di Hausdorff.

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con il costruire Y come spazio topologico e $p: Y \rightarrow X$ come applicazione continua. Denotiamo con $W = \coprod Y_i$ l'unione disgiunta degli spazi topologici Y_i : nella topologia dell'unione disgiunta un sottoinsieme $U \subset W$ è aperto se e solo se $U \cap Y_i$ è aperto per ogni i ; in particolare ciascun Y_i è aperto in W . Dati $x, y \in W$ definiamo $x \sim y$ se, detti $i, j \in I$ gli indici tali che $x \in Y_i, y \in Y_j$ si ha $p_i(x) = p_j(y) \in U_i \cap U_j$ e $f_{ij}(y) = x$.

La relazione \sim è di equivalenza: le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva seguono facilmente dalle condizioni $f_{ii} = \text{Id}$, $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ e $f_{ij} = f_{ik} f_{kj}$. Definiamo $Y = W / \sim$ (quoziente topologico) e denotiamo con

$$q: W \rightarrow Y = W / \sim$$

la proiezione al quoziente. Per la proprietà universale delle identificazioni, l'applicazione continua

$$W \rightarrow X, \quad x \mapsto p_i(x) \quad \text{se } x \in Y_i,$$

si fattorizza ad un'applicazione continua $p: Y \rightarrow X$.

Per ogni $i \in I$ denotiamo con $q_i: Y_i \rightarrow Y$ la restrizione di q a Y_i : per costruzione $p q_i = p_i: Y_i \rightarrow U_i$ per ogni i e, dati $x \in Y_i, y \in Y_j$ si ha $q_i(x) = q_j(y)$ se e solo se $x \in Y_{ij}, y \in Y_{ji}$ e $x = f_{ij}(y)$.

Proviamo adesso che le applicazioni continue $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ sono omeomorfismi, ossia aperte e bigettive. Per dimostrare che q_i è aperta bisogna provare che per ogni j ed ogni aperto $V \subset Y_i$ si ha $q^{-1}(q_i(V)) \cap Y_j$ aperto in Y_j ; ciò è vero in quanto

$$q^{-1}(q_i(V)) \cap Y_j = \{y \in Y_j \mid \exists x \in V, f_{ij}(y) = x\} = f_{ji}(V \cap Y_{ij}).$$

Sempre per definizione di \sim dati due punti $x, y \in Y_i$ si ha $q_i(x) = q_i(y)$ se e solo se $x = f_{ii}(y)$ ossia se e solo se $x = y$. Per finire, sia $u \in p^{-1}(U_i)$ e prendiamo $w \in W$ tale che $q(w) = u$. Se $w \in Y_j$ allora $p(u) = p_j(w) \in U_i \cap U_j$, dunque $u = q(w) = q_i(f_{ij}(w))$. Abbiamo quindi dimostrato, nell'ordine, che $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ è continua, aperta, iniettiva e surgettiva.

Se X ed ogni Y_i sono di Hausdorff, dati $x, y \in Y$, $x \neq y$, se $p(x) \neq p(y)$, siccome X è di Hausdorff e p è continua ne segue che x, y hanno intorni disgiunti in Y . Se invece $p(x) = p(y) \in U_i$ allora x, y appartengono entrambi all'aperto $p^{-1}(U_i)$ che è di Hausdorff. Dunque anche Y è di Hausdorff.

Per concludere, basta osservare che se prendiamo come insieme dei modelli $\mathcal{M} = \{Y_i\}_{i \in I}$, allora $\{(p^{-1}(U_i), q_i^{-1}, Y_i)\}_{i \in I}$ è un \mathcal{M} -atlante e quindi determina una struttura di prevarietà su Y . \square

Osserviamo che il dato (Y, p, q_i) costruito nel teorema di incollamento è unico a meno di isomorfismo: se Z è una prevarietà dotata di un'applicazione continua $r: Z \rightarrow X$ e isomorfismi $s_i: Y_i \rightarrow r^{-1}(U_i)$ tali che $rs_i = p_i$ per ogni i e $f_{ij} = s_i^{-1}s_j$ per ogni i, j , allora le applicazioni $s_i q_i^{-1}$ si incollano ad un isomorfismo $\varphi: Y \rightarrow Z$ tale che $r\varphi = p$.

5.4. Spazi tangente e cotangente di Zariski

Ricordiamo dai corsi di algebra che un anello commutativo si dice **locale** se possiede un unico ideale massimale. Ad esempio, ogni campo è un anello locale (con 0 unico ideale massimale). Equivalentemente, l'anello A è locale se esiste un ideale proprio $I \subseteq A$ tale che ogni elemento di $A - I$ è invertibile.

LEMMA 5.4.1. *Sia (X, \mathcal{A}) una \mathbb{K} -prevarietà. Allora per ogni $x \in X$, la spiga \mathcal{A}_x del fascio \mathcal{A} nel punto x , oltre ad essere uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{A}_x \mid f(x) = 0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. L'ideale \mathfrak{m}_x è proprio poiché $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{A}_x$ (germi di funzioni costanti) e $\mathbb{K} \cap \mathfrak{m}_x = 0$. Se $f_x \in \mathcal{A}_x - \mathfrak{m}_x$, allora f_x è rappresentato da una funzione $f \in \mathcal{A}(U)$ tale che $x \in U$ e $f(x) \neq 0$. Ma allora $x \in D(f) = \{y \in U \mid f(y) \neq 0\}$ e $(V, 1/f)$ è l'inverso di f_x in \mathcal{A}_x . \square

DEFINIZIONE 5.4.2. Per ogni punto x in una \mathbb{K} -prevarietà (X, \mathcal{A}) il \mathbb{K} -spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ viene detto **spazio cotangente di Zariski** di X nel punto x . L'applicazione lineare

$$d: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \quad df = f - f(x) \pmod{\mathfrak{m}_x^2},$$

viene detta **differenziale di de Rham** nel punto x .

Ricordiamo che, per definizione, \mathfrak{m}_x^2 è l'ideale formato dalle somme finite di elementi del tipo fg , con $f, g \in \mathfrak{m}_x$.

Per definire d abbiamo usato il fatto che \mathcal{A}_x contiene i germi di funzioni costanti. Se f è il germe di una funzione costante allora $df = 0$, e per ogni $f, g \in \mathcal{A}_x$ vale la formula di Leibniz

$$\begin{aligned} d(fg) &= fg - fg(x) = (f - f(x))(g - g(x)) + (f - f(x))g(x) + f(x)(g - g(x)) \\ &= dfg(x) + f(x)dg \pmod{\mathfrak{m}_x^2}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 5.4.3. Il duale del cotangente

$$T_x X := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \mathbb{K})$$

viene detto **spazio tangente di Zariski** di X nel punto x .

È utile dare una diversa interpretazione dello spazio tangente di Zariski in termini di derivazioni nell'anello dei germi \mathcal{A}_x .

Diremo che un'applicazione $\alpha: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{K}$ è una **\mathbb{K} -derivazione** se:

- (1) α è \mathbb{K} -lineare;
- (2) per ogni $f, g \in \mathcal{A}_x$ vale la **regola di Leibniz**:

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(x) + f(x)\alpha(g).$$

Le \mathbb{K} -derivazioni $\mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{K}$ formano uno spazio vettoriale che denoteremo $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_x, \mathbb{K})$.

TEOREMA 5.4.4. *Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\theta: \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_x, \mathbb{K}) \rightarrow T_x X$ univocamente determinato dalla condizione $\theta(\alpha)(df) = \alpha(f)$ per ogni $f \in \mathcal{A}_x$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per ogni \mathbb{K} -derivazione $\alpha: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{K}$ si ha $\alpha(\mathbb{K}) = \alpha(\mathfrak{m}_x^2) = 0$.

Infatti, per la regola di Leibniz $\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1) + \alpha(1)$ da cui segue $\alpha(1) = 0$ e per \mathbb{K} -linearità $\alpha(c) = 0$ per ogni $c \in \mathbb{K}$. Se $f, g \in \mathfrak{m}_x$, per la regola di Leibniz

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(x) + f(x)\alpha(g)$$

e siccome $f(x) = g(x) = 0$ si ha $\alpha(fg) = 0$. Inoltre, se $f \in \mathfrak{m}_x$, il suo differenziale df coincide con la sua classe al quoziente $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ e quindi risulta ben definito

$$\theta(\alpha) \in T_x X, \quad \theta(\alpha)(df) = \alpha(f) \text{ per ogni } f \in \mathfrak{m}_x.$$

L'applicazione θ è lineare; resta da dimostrare che vale $\theta(\alpha)(df) = \alpha(f)$ per ogni $f \in \mathcal{A}_x$ e provare che esiste θ^{-1} . Per ogni $f \in \mathcal{A}_x$ ed ogni $\alpha \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_x, \mathbb{K})$, siccome $\alpha(f(x)) = 0$ si ha

$$\alpha(f) = \alpha(f - f(x)) = \theta(\alpha)(d(f - f(x))) = \theta(\alpha)(df).$$

L'uguaglianza $\theta(\alpha)(df) = \alpha(f)$ implica immediatamente che θ è iniettiva. Per concludere, rimane da dimostrare che per ogni applicazione lineare $\beta: \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \mathbb{K}$, l'applicazione

$$\alpha: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(f) = \beta(df),$$

è una \mathbb{K} -derivazione. La \mathbb{K} -linearità di α è chiara. Date $f, g \in \mathcal{A}$ si ha

$$\alpha(fg) = \beta(d(fg)) = \beta((df)g(x) + f(x)(dg)) = \alpha(f)g(x) + f(x)\alpha(g).$$

□

Consideriamo adesso un morfismo $F: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{E})$ di prevarietà sullo stesso campo \mathbb{K} . Prendiamo un punto $x \in X$ e denotiamo $y = F(x)$. Possiamo allora definire un omomorfismo di anelli $F^*: \mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{A}_x$; se $f_y \in \mathcal{E}_y$ è il germe di una funzione regolare $f \in \mathcal{E}(U)$, $y \in U$, si definisce $F^*(f_y)$ come il germe in x della funzione regolare $F^*f = f \circ F \in \mathcal{A}(F^{-1}(U))$. È chiaro che $F^*f_y(x) = f_y(y)$ e quindi $F^*(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}_x$. Inoltre, $F^*\mathbb{K} = \mathbb{K}$ e F^* è anche \mathbb{K} -lineare.

Possiamo quindi definire un'applicazione lineare tra gli spazi tangenti di Zariski

$$dF: T_x X \rightarrow T_y Y$$

detta, **differenziale** di F in x , ponendo $dF(\alpha) = \alpha \circ F^*$ per ogni derivazione $\alpha: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{K}$. Lasciamo per esercizio la semplice verifica che $dF(\alpha) \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}_y, \mathbb{K})$ e che, via l'isomorfismo del Teorema 5.4.4, dF è il trasposto di $F^*: \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

ESEMPIO 5.4.5. Consideriamo la prevarietà (\mathbb{R}^2, C^∞) , la sua sottoprevarietà

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

ed il punto $p = (0, 0) \in Y$. Lasciamo per esercizio al lettore la prova che l'applicazione $\mathbb{R} \rightarrow Y$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, è un omeomorfismo.

Vogliamo mostrare che lo spazio tangente $T_p Y$ ha dimensione strettamente maggiore di 1. Sia \mathcal{A} il fascio strutturale di Y ; per definizione di sottoprevarietà la restrizione ad Y di funzioni C^∞ su aperti di \mathbb{R}^2 induce un omomorfismo surgettivo tra le spighe $r^*: C_p^\infty \rightarrow \mathcal{A}_p$. Proviamo che le due derivate parziali

$$\partial_x, \partial_y: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(p), \quad \partial_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y}(p),$$

si annullano entrambe sul nucleo di r^* e quindi si fattorizzano a derivazioni $\partial_x, \partial_y: \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}$. Sia g una funzione di classe C^∞ definita in un intorno di p e tale che $g|_Y = 0$. Dunque per ogni $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo si ha $g(t^2, t^3) = 0$. D'altra parte per la formula di Taylor, in un intorno di p si ha

$$|g(x, y) - \partial_x(g)x - \partial_y(g)y| \leq K(x^2 + y^2),$$

per un'opportuna costante positiva K ; questo implica

$$|\partial_x(g)t^2 + \partial_y(g)t^3| \leq K(t^4 + t^6)$$

e facendo tendere t a 0 si ottiene $\partial_x(g) = \partial_y(g) = 0$. Dal calcolo delle derivazioni $\partial_x, \partial_y \in T_p Y$ sulle funzioni $x|_Y$ e $y|_Y$ segue la loro indipendenza lineare.

(Nota: il conto sarebbe stato più semplice se avessimo potuto usare il fatto, vero ma non dimostrato in queste note, che il nucleo di r^* è uguale all'ideale principale generato dal germe di $y^2 - x^3$.)

Esercizi.

ESERCIZIO 5.8. Provare che, per ogni primo p , il sottoanello $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$, formato dalle frazioni del tipo n/m con m non divisibile per p , è un anello locale. L'inclusione $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ mostra che, in generale, un omomorfismo $A \rightarrow B$ di anelli locali non mappa l'ideale massimale di A dentro l'ideale massimale di B .

Varietà differenziabili

Già potremmo definire una varietà differenziabile come uno spazio localmente euclideo paracompatto di Hausdorff che possiede atlanti di classe C^∞ . Tuttavia, nell'ottica di rendere le successive considerazioni coomologiche più chiare, è più opportuno vedere le varietà differenziabili come particolari esempi di prevarietà modellate.

Chi preferisce mantenere un approccio più tradizionale può consultare le centinaia di testi disponibili in letteratura, come ad esempio [4, 16, 22, 30, 49, 51], solo per citarne alcuni.

6.1. Varietà differenziabili

Non esiste una nozione generale di varietà ma esistono varie nozioni di varietà modellate ottenute aggiungendo di volta in volta ipotesi sulla topologia e/o sull'insieme dei modelli e/o sui morfismi dai modelli alla varietà.

Nello specifico delle varietà differenziabili si prende $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e come insieme dei modelli $\mathcal{M} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$, dove \mathcal{M}_n è la famiglia di tutti gli aperti di \mathbb{R}^n dotati del fascio delle funzioni C^∞ . Ogni prevarietà modellata su \mathcal{M} risulta automaticamente uno spazio localmente euclideo; per come abbiamo definito \mathcal{M} , ogni sottoprevarietà aperta di un modello è ancora un modello.

DEFINIZIONE 6.1.1. Sia \mathcal{M} come sopra, una prevarietà (X, \mathcal{E}) modellata su \mathcal{M} si dice una **varietà differenziabile** se X è paracompatto di Hausdorff. Se è modellata su \mathcal{M}_n diremo che (X, \mathcal{E}) ha dimensione n e si scrive $\dim X = n$.

In particolare, ogni modello di \mathcal{M}_n è una varietà differenziabile di dimensione n .

Giova ricordare che, per il teorema di invarianza della dimensione, un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^m solo se $n = m$. Da questo segue che ogni componente connessa di una varietà differenziabile ha una sua dimensione ben definita che dipende solo dalla struttura topologica e non dal fascio strutturale. Per la Proposizione 4.5.10, nella Definizione 6.1.1 la condizione di paracompattatezza può essere equivalentemente sostituita con l'ipotesi che ogni componente connessa sia a base numerabile, oppure che ogni componente connessa sia unione numerabile di compatti. Per la medesima proposizione, ogni sottoprevarietà aperta di una varietà differenziabile è ancora paracompatta di Hausdorff e modellata su \mathcal{M} , e quindi una varietà differenziabile.

OSSERVAZIONE 6.1.2. In letteratura si trova spesso una definizione più restrittiva di varietà differenziabile, in cui la condizione di paracompattatezza è sostituita con il secondo assioma di numerabilità; le due definizioni differiscono solo nel caso in cui ci sia una quantità più che numerabile di componenti connesse. In queste note abbiamo optato per l'ipotesi di paracompattatezza al fine di rendere immediatamente applicabile la teoria coomologica di Čech.

Nel contesto delle varietà differenziabili, i morfismi vengono detti **applicazioni differenziabili**, gli isomorfismi sono detti **diffeomorfismi** e gli \mathcal{M} -atlanti $(U_i, F_i, (V_i, C^\infty))$ sono detti **atlanti differenziabili**.

La traduzione della Proposizione 5.2.9 in questa nuova terminologia assume un aspetto molto rassicurante e ci descrive completamente le applicazioni differenziabili tra i modelli di \mathcal{M} .

PROPOSIZIONE 6.1.3. Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti e $F: X \rightarrow Y$ continua con componenti f_1, \dots, f_m . Allora F è un'applicazione differenziabile se e solo se ogni f_i è una funzione C^∞ su X .

ESEMPIO 6.1.4. Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile e $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(X)$. Allora l'applicazione

$$F = (f_1, \dots, f_m): X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

è differenziabile. Dato che ogni f_i è continua, anche F è continua. Basta allora verificare che è differenziabile la restrizione di F ad ogni aperto di un atlante differenziabile fissato, e questo segue immediatamente dalla Proposizione 6.1.3.

DEFINIZIONE 6.1.5. Siano U un aperto in una varietà differenziabile (X, \mathcal{E}) di dimensione n e $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}(U)$; abbiamo dunque un'applicazione differenziabile $F = (x_1, \dots, x_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diremo che x_1, \dots, x_n sono **coordinate locali** in U se $F(U)$ è aperto e $F: U \rightarrow F(U)$ è un diffeomorfismo.

Ogni punto possiede un intorno aperto dotato di coordinate locali; basta infatti prendere un elemento $(U, F, (V, C^\infty))$ di un atlante differenziabile tale che $x \in U$ e come funzioni x_i le componenti di F , ossia $x_i = F^*y_i$ dove y_1, \dots, y_n sono le restrizioni a V delle funzioni coordinate in \mathbb{R}^n .

ESEMPIO 6.1.6 (Le sfere). Consideriamo $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ come sottoparietà di \mathbb{R}^{n+1} , ossia con fascio strutturale \mathcal{E} dato delle funzioni che sono localmente restrizione di funzioni C^∞ su aperti di \mathbb{R}^{n+1} , cf. Esempio 5.2.4, e proviamo che (S^n, \mathcal{E}) è una varietà differenziabile di dimensione n , ossia che ogni punto $x = (x_0, \dots, x_n)$ possiede un intorno aperto diffeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n . A meno di permutazioni di indici non è restrittivo supporre $x_0 \neq 0$ e supponiamo inoltre, per fissare le idee, che $x_0 > 0$ (il caso $x_0 < 0$ si tratta alla stessa maniera). Allora $U = \{x \in S^n \mid x_0 > 0\}$ è un intorno aperto di x in S^n e la proiezione

$$p: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p(x_0, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

definisce un omeomorfismo tra U e la palla aperta $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ con inverso

$$q: B \rightarrow U, \quad q(x_1, \dots, x_n) = \left(\sqrt{1 - \sum_i x_i^2}, x_1, \dots, x_n \right).$$

Dato che q è di classe C^∞ come applicazione da B ad \mathbb{R}^{n+1} , l'operatore q^* trasforma le restrizioni ad S^n di funzioni C^∞ su aperti \mathbb{R}^{n+1} in funzioni C^∞ su aperti di B ; questo prova che q è un'applicazione differenziabile. Viceversa, se $V \subseteq B$ aperto e $f \in C^\infty(V)$ allora $p^*(f)$ è la restrizione a S^n della funzione $g(x_0, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ che è di classe C^∞ su $\mathbb{R} \times V$; questo prova che anche p è un'applicazione differenziabile.

ESEMPIO 6.1.7 (Il gruppo speciale ortogonale). Sia $SO_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n,n}(\mathbb{R})$ il chiuso delle matrici ortogonali a determinante 1. Proviamo che, con la struttura di prevarietà ereditata da $M_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ è una varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$. Dato che il gruppo ortogonale agisce per diffeomorfismi su $M_{n,n}(\mathbb{R})$ e transitivamente su se stesso, basta dimostrare che la matrice identità possiede in $SO_n(\mathbb{R})$ un intorno diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. La prima carta locale che viene in mente è indubbiamente quella formata dall'esponenziale di matrici antisimmetriche; per differenziarci ed aggiungere un pezzettino di conoscenza seguiremo un'altra strada, e più precisamente useremo la cosiddetta **trasformata di Cayley** (1846).

Denotiamo con $Q \subseteq M_{n,n}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche e con $W \subseteq M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'aperto delle matrici che non hanno -1 come autovalore. Iniziamo con l'analizzare le proprietà dell'applicazione differenziabile

$$F: W \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R}), \quad F(A) = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

- (1) Per ogni $A \in W$ si ha $F(A) = (I + A)^{-1}(I - A)$, infatti $(I + A)^{-1}$ commuta con $I + A$ e quindi anche con tutte le matrici del tipo $A + \lambda I$.
- (2) Si ha $F(W) \subseteq W$. Infatti per ogni $A \in W$ la matrice

$$I + F(A) = I + (I - A)(I + A)^{-1} = ((I + A) + (I - A))(I + A)^{-1} = 2(I + A)^{-1}$$

è invertibile con inversa $(I + F(A))^{-1} = (I + A)/2$.

- (3) $F \circ F = \text{Id}$, infatti per ogni $A \in W$ si ha

$$\begin{aligned} F(F(A)) &= (I - F(A))(I + F(A))^{-1} = (I - (I - A)(I + A)^{-1})(I + A)/2 \\ &= ((I + A) - (I - A))(I + A)^{-1} \frac{(I + A)}{2} = A. \end{aligned}$$

Dunque F è un diffeomorfismo di W in sé. Per concludere basta dimostrare che una matrice A è speciale ortogonale se e solo se $F(A)$ è antisimmetrica; in questo modo abbiamo trovato un diffeomorfismo tra $W \cap SO_n(\mathbb{R})$ (aperto di $SO_n(\mathbb{R})$) e $W \cap Q$ (aperto di Q).

Sia $A \in W$ antisimmetrica; allora $\det(I + A) = \det((I + A)^T) = \det(I - A)$ e questo prova che $F(A)$ ha determinante $+1$ e

$$F(A)^T = ((I + A)^{-1})^T (I - A)^T = ((I + A)^T)^{-1} (I + A) = (I - A)^{-1} (I + A) = F(A)^{-1}.$$

Dunque $F(Q \cap W) \subseteq W \cap SO_n(\mathbb{R})$ e per concludere basta provare che se $E \in W$ è ortogonale, allora $F(E)$ è antisimmetrica.

$$\begin{aligned} F(E)^T &= ((I + E)^{-1})^T (I - E)^T = (I + E^{-1})^{-1} (I - E^{-1}) \\ &= (E^{-1}(E + I))^{-1} (E^{-1}(E - I)) = (E + I)^{-1} (E - I) = -F(E). \end{aligned}$$

Il conto precedente mostra implicitamente che se E è ortogonale e $\det(I + E) \neq 0$ allora $\det(E) = 1$; questo può essere dimostato direttamente osservando che

$$\det(I + E) = \det(I + E^T) = \det((E + I)E^T) = \det(I + E) \det(E^T).$$

La trasformata di Cayley ha senso su ogni campo di caratteristica diversa da 2; l'unica differenza sui reali è che in questo caso si ha $Q \subseteq W$.

ESEMPIO 6.1.8 (Spazi proiettivi reali). Sia

$$p: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \quad p(z_0, \dots, z_n) = [z_0, \dots, z_n],$$

la proiezione naturale. Ricordiamo dai corsi di topologia che \mathbb{P}^n è compatto di Hausdorff e che p è una identificazione aperta; in particolare, per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{P}^n$ ed ogni spazio topologico X , un'applicazione $f: U \rightarrow X$ è continua se e solo se $fp: p^{-1}(U) \rightarrow X$ è continua.

Definiamo il fascio di sottoanelli $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\mathbb{R}_{\mathbb{P}^n}$ ponendo, per ogni aperto U ,

$$\mathcal{E}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid fp \in C^\infty(p^{-1}(U))\}$$

e proviamo che la prevarietà $(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ è una varietà differenziabile di dimensione n , mostrando che per ogni $i = 0, \dots, n$ l'applicazione

$$F_i: U_i = \{[z] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F_i[z] = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

è un isomorfismo. Osserviamo preliminarmente che ogni endomorfismo lineare invertibile di \mathbb{R}^{n+1} è anche un diffeomorfismo; da questo e dalla definizione di \mathcal{E} segue immediatamente che ogni proiettività è un isomorfismo di prevarietà.

Basta quindi dimostrare che F_0 è un isomorfismo. L'applicazione bigettiva F_0 è continua in quanto lo è $F_0 p$; la sua inversa F_0^{-1} è continua in quanto composizione di p e

$$i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad i(x_1, \dots, x_n) = (1, x_1, \dots, x_n).$$

Per definizione di \mathcal{E} , l'applicazione p è un morfismo di prevarietà, lo stesso vale per i e quindi anche $F_0^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow U_0$ è un morfismo di prevarietà. Sempre dalla definizione di \mathcal{E} e dal fatto che

$$F_0 p: \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è differenziabile, segue che anche F_0 è un morfismo di prevarietà.

Da scrivere: altri esempi di varietà, e.g. matrici di rango costante

ESEMPIO 6.1.9. Non tutte le sottoprevarietà di (\mathbb{R}^n, C^∞) sono varietà differenziabili; ad esempio, l'unione degli assi coordinati di \mathbb{R}^2 non è una varietà differenziabile (esercizio: perché?).

Un altro esempio, meno banale, è dato dal chiuso $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ che, seppur omeomorfo a \mathbb{R} (l'applicazione $\mathbb{R} \rightarrow Y$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, è un omeomorfismo), con la struttura di sottoprevarietà di \mathbb{R}^2 non è una varietà differenziabile. Per dimostrare questo occorre però attendere i risultati della Sezione 6.3.

OSSERVAZIONE 6.1.10. È stato dimostrato che in dimensione ≤ 3 ogni varietà topologica possiede una struttura differenziabile unica a meno di diffeomorfismo. Fino al 1956 era un problema aperto se due varietà differenziabili omeomorfe fossero anche diffeomorfe (non chiediamo se ogni omeomorfismo è anche un diffeomorfismo, palesamente falso, ma una cosa diversa).

Poi, nel 1956 arriva John Milnor (aveva 25 anni) e prova che sulla sfera S^7 esistono 28 strutture differenziabili tra loro non diffeomorfe (quella standard e altre 27 dette esotiche). A

Milnor hanno dato la Medaglia Fields e da allora si sono trovati molti altri esempi di varietà omeomorfe ma non diffeomorfe.

Sorprendentemente, alcune sfere esotiche sono di semplice descrizione; ad esempio, per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo, il chiuso $X \subseteq \mathbb{C}^6 \simeq \mathbb{R}^{12}$ definito dalle equazioni

$$z_6^3 = \sum_{i=1}^5 z_i^2, \quad \|z\| = r,$$

è una varietà differenziabile omeomorfa ma non diffeomorfa a S^9 . Come potete immaginare, la dimostrazione non è né banale né elementare [40].

Fino al 1982 tutti gli esempi di strutture esotiche erano in dimensione ≥ 5 , dato che in dimensione 4 manca uno strumento di indagine fondamentale in questo tipo di problematiche, il *teorema di h-cobordismo*. Nel 1982, il dottorando Simon Donaldson (25 anni pure lui) studia le varietà in dimensione 4 usando idee derivanti dalla fisica teorica (equazione di Yang–Mills) ed i suoi risultati sulla struttura del prodotto di intersezione in coomologia intera, uniti a precedenti risultati di Freedman e Casson, dimostrarono che esistono varietà topologiche di dimensione 4 che non possiedono alcuna struttura differenziabile, e che esistono varietà differenziabili omeomorfe ma non diffeomorfe a \mathbb{R}^4 . Da notare che per $n \neq 4$ è dimostrato che tutte le strutture differenziabili su \mathbb{R}^n sono tra loro diffeomorfe, mentre dovrebbe essere ancora irrisolta la questione se esistono S^4 esotiche.

Nel 1994, buona parte della teoria di Donaldson [6], piuttosto complessa dal punto di vista matematico, è stata semplificata da Edward Witten che ha sostituito l'equazione di Yang–Mills con l'equazione di monopolo (sebbene mai osservati in natura, i monopoli magnetici sono studiati perché l'esistenza di uno solo di essi nell'intero universo spiegherebbe la natura discreta della carica elettrica [26]; se ho capito bene, ma non garantisco nulla, perché sono compatibili solo con la versione quantistica delle equazioni di Maxwell). Witten è un fisico e le sue 'dimostrazioni' erano alquanto esoteriche (l'ho sentito personalmente parlare di limite all'infrarosso e limite all'ultravioletto in teoria di gauge!) ma sono state rese rigorose e comprensibili, vedi [42]. A Witten la Medaglia Fields non l'hanno data, ma solo perché l'aveva già presa nel 1990 per altri contributi.

L'angolo dell'ego: nel 1997 pure io ho dato un piccolo, e nemmeno minimamente comparabile, contributo a questo tipo di problematiche trovando esempi di varietà compatte di dimensione 4 il cui insieme di strutture complesse è sconnesso (era un problema aperto).

Esercizi.

ESERCIZIO 6.1. Provare che la restrizione a S^n di ogni operatore ortogonale di \mathbb{R}^{n+1} è un diffeomorfismo.

ESERCIZIO 6.2. Sia $p = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$. Provare che la proiezione stereografica

$$f: S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \dots, x_n),$$

è un diffeomorfismo.

ESERCIZIO 6.3. Provare che le proiettività sono diffeomorfismi dello spazio proiettivo in sé.

6.2. Bernocchi e partizioni dell'unità

Con l'obiettivo primario, ma non esclusivo, di dimostrare che il fascio strutturale di ogni varietà differenziabile, pensato come fascio di gruppi e non di anelli, è un fascio fine, partiamo scegliendo una qualsiasi funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ di classe C^∞ tale che $h(t) > 0$ se e solo se $t > 0$; ad esempio possiamo prendere

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Poi, per ogni coppia di numeri reali $r < R$ consideriamo la funzione, ancora di classe C^∞

$$h_{r,R}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad h_{r,R}(t) = \frac{h(R-t)}{h(R-t) + h(t-r)}$$

che soddisfa le condizioni:

- (1) $h_{r,R}(t) = 1$ se e solo se $t \leq r$,
- (2) $h_{r,R}(t) = 0$ se e solo se $t \geq R$.

Fissato un intero $n > 0$, consideriamo le funzioni $\phi_{p,r,R}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, dette **bernoccoli** o **funzioni bump**, definite al variare di $p \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r < R$ come

$$(6.1) \quad \phi_{p,r,R}(y) = h_{r,R}(\|p - y\|)$$

che sono di classe C^∞ e tali che:

- (1) $\phi_{p,r,R}(y) = 1$ se e solo se $\|p - y\| \leq r$,
- (2) $\phi_{p,r,R}(y) = 0$ se e solo se $\|p - y\| \geq R$.



FIGURA 6.1. La funzione h e relativi bernoccoli

Le funzioni bump sono uno strumento indispensabile nello studio delle varietà differenziabili.

LEMMA 6.2.1. *Siano X una varietà differenziabile, $x \in X$ un punto, $U \subseteq X$ un intorno aperto di x . Esiste allora una funzione $f: X \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ che vale 1 in un intorno di x e $\text{Supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ è un sottospazio compatto di U .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta locale (W, V, ψ) in un intorno di x , ossia $x \in W \subseteq X$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, e $\psi: W \rightarrow V$ diffeomorfismo. Denotiamo $p = \psi(x) \in V$ e scegliamo due numeri reali positivi $0 < r < R$ con l'unica condizione da rispettare

$$\overline{B(p, R)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|p - y\| \leq R\} \subseteq \psi(U \cap W).$$

Quindi $K := \psi^{-1}(\overline{B(0, R)})$ è un sottospazio compatto di $U \cap W$; dato che X è di Hausdorff il sottospazio K è chiuso in X .

Per concludere basta definire

$$f(y) = \begin{cases} \phi_{p,r,R}(\psi(y)) & \text{se } y \in W, \\ 0 & \text{se } y \in X - K. \end{cases}$$

□

DEFINIZIONE 6.2.2 (partizione dell'unità). Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di una varietà differenziabile X . Chiameremo **partizione dell'unità** subordinata ad \mathcal{U} una collezione $(f_i)_{i \in I}$ di funzioni differenziabili su X tali che:

- (1) $f_i: X \rightarrow [0, 1]$ e $\text{Supp}(f_i) \subseteq U_i$ per ogni i ;
- (2) la famiglia dei supporti $\{\text{Supp}(f_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di X ;
- (3) $\sum_i f_i = 1$.

Come nel caso delle partizioni dell'identità per i morfismi dei fasci, non è escluso che per alcuni indici i si abbia $f_i = 0$ e $\text{Supp}(f_i) = \emptyset$.

TEOREMA 6.2.3. *In una varietà differenziabile ogni ricoprimento aperto possiede partizioni dell'unità subordinate.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che le componenti connesse di X sono aperte, è sufficiente dimostrare che per ogni componente connessa X' esiste una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $(X' \cap U_i)_{i \in I}$. Non è quindi restrittivo supporre che X sia connessa e quindi a base numerabile. Per ogni $Y \subseteq X$ denotiamo con $Y^\circ \subseteq Y$ la sua parte interna.

Il Lemma 6.2.1 ci permette di scegliere, per ogni punto $x \in X$, un indice $\gamma(x) \in I$ tale che $x \in U_{\gamma(x)}$ ed una funzione $\phi_x: X \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ tale che:

- (1) ϕ_x vale 1 in un intorno di x ;
- (2) $\text{Supp}(\phi_x) \subseteq U_{\gamma(x)}$.

Il primo dei punti precedenti ci permette di considerare il ricoprimento uniforme $X = \cup_x V_x$, dove $V_x := (\phi_x^{-1}(1))^o$. Dato che X ha una base numerabile di aperti, il ricoprimento $(V_x)_{x \in X}$ possiede un sottoricoprimento numerabile (V_0, V_1, \dots) che si porta appresso una successione (ϕ_0, ϕ_1, \dots) di funzioni differenziabili $\phi_n: X \rightarrow [0, 1]$ ed una funzione di raffinamento $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow I$ tali che ϕ_n vale identicamente 1 su V_n e $\text{Supp}(\phi_n) \subseteq U_{\gamma(n)}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo gli aperti

$$W_n := \{x \in X \mid \phi_n(x) > 0 \text{ e } \phi_i(x) < 1 \text{ per ogni } 0 \leq i < n\}.$$

È chiaro che $W_n \subseteq \phi_n^{-1}(]0, 1])$ e, prendendo le chiusure, che $\overline{W_n} \subseteq \text{Supp}(\phi_n) \subseteq U_{\gamma(n)}$ per ogni n .

Dimostriamo che $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un *ricoprimento aperto localmente finito* di X . Sia $x \in X$, siccome $x \in \cup_n V_n$ l'insieme $M(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi_n(x) = 1\}$ è non vuoto e, se $m(x)$ indica il suo minimo, si ha $x \in W_{m(x)}$. Siccome $\phi_n = 1$ su V_n , si ha che $V_n \cap W_k = \emptyset$ per ogni $k > n$, e quindi ciascun aperto V_n interseca un numero finito di aperti W_k .

In particolare, sono localmente finiti sia il ricoprimento chiuso $(\overline{W_n})_{n \in \mathbb{N}}$ che il ricoprimento aperto

$$(A_i)_{i \in I}, \quad A_i := \bigcup_{\{n \mid \gamma(n)=i\}} W_n.$$

Sia $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ tale che $h(t) > 0$ se e solo se $t > 0$. Per ogni n definiamo $g_n: X \rightarrow [0, 1]$ come il prodotto

$$g_n(x) = h(\phi_n(x))h(1 - \phi_0(x)) \cdots h(1 - \phi_{n-1}(x)),$$

osservando che vale $g_n(x) > 0$ se e solo se $x \in W_n$.

Dunque $g = \sum_n g_n$ è ben definita, di classe C^∞ e sempre positiva. Basta definire

$$f_i = \frac{1}{g} \sum_{\{n \mid \gamma(n)=i\}} g_n, \quad i \in I,$$

e osservare che

$$\text{Supp}(f_i) = \overline{\bigcup_{\{n \mid \gamma(n)=i\}} W_n} = \bigcup_{\{n \mid \gamma(n)=i\}} \overline{W_n} \subseteq U_i$$

per avere una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento. □

COROLLARIO 6.2.4 (funzioni di Urysohn). *Siano A, B chiusi disgiunti di una varietà differenziabile X . Allora esiste $f: X \rightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ tale che $f|_A = 0$ e $f|_B = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo $f = f_0$, dove $f_0, f_1 = 1 - f_0$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $U_0 = X - A$ e $U_1 = X - B$. □

COROLLARIO 6.2.5. *Sia (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile. Allora ogni \mathcal{E} -modulo è un fascio fine.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathcal{F} è un \mathcal{E} -modulo, per ogni ricoprimento aperto $(U_i)_{i \in I}$ di X basta considerare i morfismi di fasci $f_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ottenuti per moltiplicazione con le funzioni di una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento. □

Esercizi.

ESERCIZIO 6.4. Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile e $x \in X$. Provare che l'omomorfismo di anelli $\eta: \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}_x$ è surgettivo.

ESERCIZIO 6.5. Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile e $(Y, \mathcal{E}|_Y)$ una sottoprevarietà chiusa. Provare che l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}|_Y(Y)$ è surgettivo.

6.3. Spazi tangenti

In ogni varietà differenziabile (X, \mathcal{E}) , in quanto prevarietà, possiamo definire gli spazi tangenti di Zariski, da ora in poi chiamati semplicemente spazi tangenti:

$$T_x X = \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_x, \mathbb{R}), \quad x \in X.$$

Osserviamo subito che se $(U, \mathcal{E}|_U)$ è una sottovarietà aperta di X , siccome i fasci \mathcal{E} e $\mathcal{E}|_U$ hanno le stesse spighe nei punti di U , si ha $T_x U = T_x X$ per ogni $x \in U$.

Per iniziare, dimostriamo che se (X, \mathcal{E}) ha dimensione n , allora tutti gli spazi tangenti $T_x X$ sono spazi vettoriali reali di dimensione n . A tal fine, osserviamo che se $F: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ è una carta locale tale che $F(x) = 0$ (una tale carta esiste sempre dato che le traslazioni in \mathbb{R}^n sono diffeomorfismi), il differenziale $dF: T_x X = T_x U \rightarrow T_0 V = T_0 \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Basta quindi provare che lo spazio vettoriale $T_0 \mathbb{R}^n$ ha dimensione n .

LEMMA 6.3.1 (formula di Taylor). *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$ un punto e $f \in C^\infty(U)$. Allora esistono delle funzioni a supporto compatto $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)_0$ ed un numero reale positivo r tali che $B(p, r) \subseteq U$ e*

$$(6.2) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) f_i(x) \quad \text{nell'aperto } B(0, r), \\ f_i(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$ tale che $B(p, \epsilon) \subseteq U$; allora per ogni $x \in B(p, \epsilon)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1 + (1-t)p_1, \dots, tx_n + (1-t)p_n) dt \\ &= f(p) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx + (1-t)p) \frac{d}{dt}(tx_i + (1-t)p_i) dt \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx + (1-t)p) dt. \end{aligned}$$

Quindi, le funzioni

$$g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(p, \epsilon)), \quad g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx + (1-t)p) dt,$$

soddisfano

$$g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) g_i(x) \quad \text{per } x \in B(p, \epsilon).$$

Per finire basta prendere un bernoccolo $\phi_{p,r,R}$ come in (6.1) con $0 < r < R < \epsilon$, e definire $f_i \in C^\infty(U)_0$ come l'estensione a zero della funzione a supporto compatto $g_i \phi_{p,r,R} \in C^\infty(B(p, \epsilon))_0$. \square

Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente $T_p \mathbb{R}^n = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$ contiene le derivazioni $\partial_1, \dots, \partial_n$, definite come

$$\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Vogliamo dimostrare che $\partial_1, \dots, \partial_n$ formano una base. L'indipendenza lineare è facile, basta infatti osservare che

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = \delta_{ij} \quad (\text{delta di Kronecker}).$$

Per vedere che generano sia $\alpha: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ una derivazione, consideriamo gli n numeri reali $a_i = \alpha(x_i)$ e proviamo che $\alpha = \sum_i a_i \partial_i$, ossia che per ogni $f \in C_p^\infty$ vale

$$\alpha(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Segue dalla formula di Taylor (Lemma 6.3.1) che in C_0^∞ vale una relazione del tipo

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) f_i$$

con $f_1, \dots, f_n \in C_p^\infty$ tali che $f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Ma allora, dato che α annulla le costanti $f(p), p_1, \dots, p_n$ e le funzioni $x_i - p_i$ si annullano tutte in p , si ha

$$\alpha(f) = \sum_i \alpha(x_i - p_i) f_i(p) + (x_i(p) - p_i) \alpha(f_i) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Riepilogando, abbiamo dimostrato il seguente risultato.

COROLLARIO 6.3.2 (dimensione dello spazio tangente). *Sia (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile di dimensione n . Allora per ogni $x \in X$ lo spazio tangente*

$$T_x X = \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_x, \mathbb{R})$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

OSSERVAZIONE 6.3.3 (rivolta a chi conosce e apprezza gli anelli Noetheriani). Un'altra conseguenza della formula di Taylor è che l'ideale massimale $\mathfrak{m}_0 \subseteq C_0^\infty$, $0 \in \mathbb{R}^n$, è generato dalle funzioni x_i . Dunque \mathfrak{m}_0^2 è l'ideale generato dalle funzioni $x_i x_j$ e più in generale \mathfrak{m}_0^s è l'ideale generato da tutti i monomi di grado s nelle funzioni coordinate x_1, \dots, x_n . Dunque tutte le potenze dell'ideale massimale sono ideali finitamente generati.

Inoltre, $I = \bigcap_{s=0}^\infty \mathfrak{m}_0^s$ coincide con l'ideale delle funzioni che hanno tutte le derivate, di qualunque ordine, nulle nell'origine. Sempre grazie alla formula di Taylor si dimostra che I non è finitamente generato, e quindi che l'anello dei germi C_0^∞ non è noetheriano: diamo solo una traccia di dimostrazione lasciando i dettagli per esercizio. Supponiamo per assurdo che $g_1, \dots, g_m \in I$ sia un insieme finito di generatori, allora i germi $g_i(t, 0, \dots, 0)$ generano l'ideale dei germi di funzioni nella variabile t che hanno tutte le derivate nulle. Non è quindi restrittivo supporre $n = 1$. Dimostriamo adesso che $g_i = 0$ per ogni i , in contraddizione con il fatto che $I \neq 0$. Per Taylor esistono germi di funzioni h_1, \dots, h_m tali che $g_i(t) = t h_i(t)$ e segue dalla formula di Leibniz che anche $h_i \in I$. Esistono dunque germi di funzioni $a_{ij}(t)$ tali che $h_i(t) = \sum_j a_{ij}(t) g_j(t)$. Per concludere basta osservare che la matrice $I - t(a_{ij}(t))$, a coefficienti nell'anello dei germi, è invertibile.

Nelle prossime versioni delle note il resto di questa sezione sarà spostato al capitolo successivo.

Sia adesso (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile di dimensione n e denotiamo con \mathcal{DT} il fascio discreto di spazi vettoriali su X associato all'applicazione $X \ni x \mapsto T_x X$. Per definizione, dato un aperto $U \subseteq X$, ogni elemento $\alpha \in \mathcal{DT}(U)$ è una collezione di vettori tangenti $\alpha(x) \in T_x X$, $x \in U$. Chiameremo le sezioni di \mathcal{DT} campi di vettori discontinui.

Per ogni aperto $U \subseteq X$ esiste una naturale applicazione bilineare

$$\mathcal{DT}(U) \times \mathcal{E}(U) \xrightarrow{(-, -)} \mathcal{DK}_X(U), \quad (\alpha, f)(x) = \alpha(x)(f_x) \quad \forall x \in U,$$

dove come al solito $f_x \in \mathcal{E}_x$ denota il germe di f in x . Tali applicazioni bilineari commutano con le restrizioni a sottoaperti nella maniera ovvia.

DEFINIZIONE 6.3.4. Un campo di vettori discontinuo $\alpha \in \mathcal{DT}(U)$ si dice regolare, o di classe C^∞ , se per ogni aperto $V \subseteq U$ ed ogni $f \in \mathcal{E}(V)$ si ha $(\alpha|_V, f) \in \mathcal{E}(V)$. I campi di vettori regolari definiscono un sottofascio di \mathcal{DT} denotato \mathfrak{X}_X .

La verifica che \mathfrak{X}_X è un sottofascio di \mathcal{DT} è immediata. È anche immediato verificare che \mathfrak{X}_X è un \mathcal{E} -modulo, dove per $\alpha \in \mathfrak{X}_X(U)$ e $f \in \mathcal{E}(U)$, il prodotto $f\alpha$ è definito nel modo ovvio $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha(x)$.

Per semplicità, diremo campo di vettori intendendo un campo di vettori regolare e scriveremo \mathfrak{X} al posto di \mathfrak{X}_X quando la varietà X è chiara dal contesto. Vediamo come sono fatti in concreto i fasci \mathfrak{X}_X quando X è un aperto di \mathbb{R}^n .

LEMMA 6.3.5. Sia U un aperto di \mathbb{R}^n , con coordinate x_1, \dots, x_n . Per ogni aperto $V \subseteq U$ ed ogni campo di vettori $\alpha \in \mathfrak{X}_U(V)$ esistono, e sono uniche, funzioni regolari $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(V)$ tali che

$$(6.3) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Viceversa, per ogni $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(V)$ la formula (6.3) definisce un campo di vettori su V .

DIMOSTRAZIONE. Dato che le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sono una base di $T_p U$ per ogni $p \in U$, esistono e sono uniche $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}\mathbb{R}(V)$ tali che $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dato che $x_i \in C^\infty(V)$ per ogni i ne segue che anche $f_i = \alpha(x_i)$ è di classe C^∞ . Viceversa, se $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}T(V)$ con le funzioni f_i di classe C^∞ , allora per ogni aperto $W \subseteq V$ ed ogni $g \in C^\infty(W)$ si ha

$$(\alpha|_W, g) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^\infty(W)$$

e quindi $\alpha \in \mathfrak{X}_U(V)$. □

Se $F: X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo, allora $dF: T_x X \rightarrow T_{F(x)} Y$ è un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$. Ne segue che al variare di U tra gli aperti di X le applicazioni

$$dF: \mathcal{D}T(U) \rightarrow \mathcal{D}T(F(U)), \quad (dF\alpha)(y) = dF(\alpha_{F^{-1}(y)}),$$

sono isomorfismi di spazi vettoriali che commutano con le restrizioni a sottoaperti. È chiaro che per definire $dF: \mathcal{D}T(U) \rightarrow \mathcal{D}T(F(U))$ ci basta che F sia regolare e bigettiva, ma in tal caso non è necessariamente un isomorfismo di spazi vettoriali.

LEMMA 6.3.6. Sia $F: X \rightarrow Y$ un diffeomorfismo, allora per ogni aperto $U \subseteq X$ si ha $dF(\mathfrak{X}(U)) = \mathfrak{X}(F(U))$ e vale la formula $dF(F^*(f)\alpha) = fdF(\alpha)$ per ogni $\alpha \in \mathfrak{X}(U)$ e f funzione C^∞ su $F(U)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha \in \mathfrak{X}(U)$, $W \subseteq F(U)$ un aperto e $g \in \mathcal{E}(W)$. Dobbiamo dimostrare che la funzione $h(y) = (dF\alpha|_W, g)(y)$ è di classe C^∞ su W ; dato che F è un diffeomorfismo ciò equivale a dire che $h \circ F$ è di classe C^∞ su $F^{-1}(W)$.

Per ogni $x \in F^{-1}(W)$ si ha

$$hF(x) = ((dF\alpha)|_W, g)(F(x)) = (dF\alpha(x))(g_{F(x)}) = \alpha(x)(F^*g_x)$$

e quindi $hF = (\alpha|_{F^{-1}(W)}, F^*g) \in \mathcal{E}(F^{-1}(W))$. □

Tutto questo ci porta a concludere che se x_1, \dots, x_n sono coordinate locali in un aperto U di una varietà differenziabile, allora esistono unici dei campi di vettori in $\mathfrak{X}(U)$, che denoteremo $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ tali che

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij} \text{ per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Se $F: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ è il diffeomorfismo di componenti x_1, \dots, x_n , basta definire $\frac{\partial}{\partial x_i}$ come l'unico campo di vettori tale che $dF(\frac{\partial}{\partial x_i})$ è la derivazione rispetto alla i -esima coordinata.

Per ogni $\alpha \in \mathfrak{X}(U)$ vale

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Infatti, i campi di vettori $\frac{\partial}{\partial x_i}$ formano una base in ogni spazio tangente e quindi esistono $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Ma allora $\alpha(x_j) = \sum_i f_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = f_j$.

6.4. Sottovarietà e dipendenza analitica

Sia (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile. Abbiamo visto che ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ possiede una naturale struttura di prevarietà $(Y, \mathcal{E}|_Y)$, con $\mathcal{E}|_Y$ fascio delle funzioni localmente restrizioni ad Y di funzioni differenziabili su X .

DEFINIZIONE 6.4.1. Nelle notazioni precedenti, diremo che Y è una **sottovarietà** di X se la prevarietà $(Y, \mathcal{E}|_Y)$ è una varietà differenziabile. Diremo inoltre che Y è una sottovarietà chiusa (resp.: aperta) se in aggiunta Y è chiuso (resp.: aperto) in X .

A differenza del caso delle sottoprevarietà non diamo la definizione di sottovarietà localmente chiusa perché tra poco dimostreremo che tutte le sottovarietà sono localmente chiuse.

ESEMPIO 6.4.2. Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile e $(Y, \mathcal{E}|_Y)$ una sottovarietà di X . Siccome $(\mathcal{E}|_Y)|_Z = \mathcal{E}|_Z$ per ogni $Z \subseteq Y$, si ha che Z è una sottovarietà di X se e solo se è una sottovarietà di Y .

ESEMPIO 6.4.3. Ogni sottoprevarietà aperta di una varietà differenziabile è una sottovarietà aperta. Questo perché ogni sottoprevarietà aperta di una varietà modello è ancora un modello.

Questo implica in particolare che la proprietà di essere una sottovarietà è locale, nel senso che Y è una sottovarietà di X se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste un intorno aperto $y \in U \subseteq X$ tale che $Y \cap U$ sia una sottovarietà di U .

ESEMPIO 6.4.4. Ogni sottospazio affine $H \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà diffeomorfa a \mathbb{R}^m , dove m è la dimensione di H . Infatti, siccome le affinità di \mathbb{R}^n sono diffeomorfismi, non è restrittivo supporre $H = \{x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$. Siccome le applicazioni

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n, & f(x_1, \dots, x_m) &= (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \\ g: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m, & g(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

sono differenziabili, per definizione di sottoprevarietà risultano regolari sia la corestrizione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow H$ che la restrizione $g|_H: H \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tali applicazioni sono una l'inversa dell'altra e determinano un isomorfismo tra H e \mathbb{R}^m .

ESEMPIO 6.4.5. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ due aperti e $F: U \rightarrow V$ un'applicazione differenziabile. Allora il grafico di F è una sottovarietà chiusa del prodotto $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. Basta dimostrare che il grafico è una sottovarietà chiusa di $U \times \mathbb{R}^m$; il diffeomorfismo

$$f: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U \times \mathbb{R}^m, \quad f(x, y) = (x, y - F(x)),$$

con inverso $f^{-1}(x, y) = (x, y + F(x))$ trasforma il grafico di F in un aperto del sottospazio affine di \mathbb{R}^{n+m} di equazione $y = 0$.

Per dimostrare che ogni sottovarietà è localmente chiusa introduciamo la nozione di (in)dipendenza analitica. Sebbene ciò abbia senso nel contesto delle prevarietà, per semplicità di esposizione trattiamo direttamente il caso delle varietà differenziabili, dove risulterà strettamente collegato all'importante teorema del Dini.

Sia (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile; via l'identificazione naturale dello spazio cotangente di Zariski con il duale dello spazio tangente (questo perché entrambi sono spazi di dimensione finita), abbiamo che il differenziale di de Rham di un germe $f \in \mathcal{E}_x$ può essere interpretato come l'applicazione lineare

$$df: T_x X \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(\alpha) = \alpha(f) \text{ per ogni } \alpha \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_x, \mathbb{R}).$$

DEFINIZIONE 6.4.6. Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile e $U \subseteq X$ un aperto. Diremo che $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$ sono **analiticamente dipendenti** nel punto $x \in U$ se i differenziali df_1, \dots, df_m sono linearmente dipendenti come vettori nel duale di $T_x X$. Diremo che sono analiticamente dipendenti in un sottoinsieme $C \subseteq U$ se lo sono in ogni punto $x \in C$.

Conseguentemente, nelle notazioni della Definizione 6.4.6 diremo che f_1, \dots, f_m sono analiticamente indipendenti in x se i funzionali df_1, \dots, df_m sono linearmente indipendenti nel duale di $T_x X$. Se X ha dimensione n , per i ben noti fatti di algebra lineare, l'indipendenza analitica di f_1, \dots, f_m nel punto x equivale a dire che il sottospazio vettoriale $\bigcap_{i=1}^m \ker df_i \subseteq T_x X$ ha dimensione $n - m$.

TEOREMA 6.4.7 (di invertibilità locale). *Siano U e V due aperti di \mathbb{R}^n ,*

$$F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow V$$

un'applicazione di classe C^∞ e $p \in U$. Se il determinante Jacobiano di F nel punto p è diverso da 0, ossia se

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(p) \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora esistono un intorno aperto $W \subseteq U$ di p e un intorno aperto $Z \subseteq V$ di $F(p)$ tali che $F|_W: W \rightarrow Z$ è un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Vedi, ad esempio, [1, Thm. 13.6]. \square

COROLLARIO 6.4.8. *Siano U e V due aperti di \mathbb{R}^n . Allora, un'applicazione differenziabile $F: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo se e solo se è bigettiva ed ha determinante Jacobiano diverso da 0 in ogni punto.*

DIMOSTRAZIONE. Un diffeomorfismo ha determinante Jacobiano mai nullo, dove definito. Infatti, dato che la Jacobiana della composizione di due funzioni è la composizione (ovvero il prodotto, in termini matriciali) delle loro Jacobiane, si ha che se F è un diffeomorfismo la Jacobiana di F^{-1} nel punto $F(p)$ è la matrice inversa della Jacobiana di F nel punto p .

Viceversa, per l'ipotesi di biunivocità di F , sappiamo che è ben definita $F^{-1}: V \rightarrow U$; quello che ci resta da verificare è che sia di classe C^∞ . Possiamo applicare in ogni punto $p \in U$ il Teorema 6.4.7; per ogni $p \in U$ esistono un intorno aperto $W \subseteq U$ di p e un intorno aperto $Z \subseteq V$ di $F(p)$ tali che $F|_W: W \rightarrow Z$ sia un diffeomorfismo, e quindi con $F|_Z^{-1}: Z \rightarrow W$ sia di classe C^∞ . È sufficiente ora osservare che la proprietà di essere C^∞ è per definizione una proprietà locale, e che tutti i possibili Z che otteniamo ricoprono V . \square

TEOREMA 6.4.9 (del Dini o delle funzioni implicite). *Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile di dimensione n , $U \subseteq X$ un aperto, $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$ analiticamente indipendenti in un punto $p \in U$. Allora, esistono un intorno aperto $W \subseteq U$ di p , un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ e un diffeomorfismo $g: V \rightarrow W$ tali che $f_i(g(x_1, \dots, x_n)) = x_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$ ed ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che l'enunciato riguarda solamente un intorno di p non è restrittivo supporre U dentro una carta locale e quindi, a meno di diffeomorfismi, possiamo supporre U un aperto dello spazio \mathbb{R}^n , con coordinate x_1, \dots, x_n . Prendendo come base degli spazi tangenti $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ la condizione che $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$ siano analiticamente indipendenti in p equivale a dire che la matrice $m \times n$ di coefficienti $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ha rango m nel punto p . Agendo, se necessario, con una permutazione delle coordinate in \mathbb{R}^n possiamo supporre che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da 0. Per il Teorema 6.4.7 di invertibilità locale basta allora prendere come diffeomorfismo g l'inverso delle restrizione di

$$(f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ad un intorno aperto $p \in W \subseteq U$ sufficientemente piccolo. \square

TEOREMA 6.4.10 (di struttura locale delle sottovarietà). *Siano (X, \mathcal{E}) una varietà differenziabile di dimensione n e $Y \subseteq X$. Allora Y è una sottovarietà di dimensione $n - m$ se e solo se per ogni $p \in Y$ esistono un intorno aperto $p \in U \subseteq X$ e $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$ analiticamente indipendenti in p tali che*

$$Y \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}.$$

In particolare, ogni sottovarietà di X è localmente chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima l'implicazione "se". Dobbiamo verificare che per ogni $p \in Y$ esiste un aperto $p \in U \subseteq X$ tale che la sottoparietà $Y \cap U$ sia isomorfa ad un aperto di \mathbb{R}^{n-m} . Per ipotesi esistono $p \in U \subseteq X$ aperto e $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$ analiticamente indipendenti in p tali che $Y \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$. Per il Teorema 6.4.9, a meno di restringere U ad un intorno più piccolo di p , esiste un aperto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ed un diffeomorfismo $g: Z \rightarrow U$ tale che $f_i \circ g = x_i$. In particolare, g^{-1} induce un isomorfismo di prevarietà tra $Y \cap U$ e $Z \cap \{x_1 = \dots = x_m = 0\}$ che può essere visto come una sottovarietà aperta di \mathbb{R}^{n-m} , ossia un modello.

Viceversa, supponiamo che Y sia una sottovarietà di dimensione $n - m$ e fissiamo $p \in Y$. Denotiamo con $\mathcal{A} = \mathcal{E}|_Y$ il fascio strutturale di Y , allora il morfismo surgettivo di restrizione $r: \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{A}_p$ permette di identificare $T_p Y$ con il sottospazio di $T_p X$ formato dalle derivazioni nulle sul nucleo di r .

Sia $f_1, \dots, f_s \in \ker r$ un insieme massimale di germi analiticamente indipendenti nel punto p e dimostriamo che $T_p Y$ coincide con il sottospazio delle derivazioni che annullano f_1, \dots, f_s : se $\alpha \in T_p X$ annulla i germi f_1, \dots, f_s e se $\alpha(g) \neq 0$ per un qualche $g \in \ker r$, allora f_1, \dots, f_s, g sarebbero analiticamente indipendenti in p . Quindi $T_p Y = \bigcap_{i=1}^s \ker df_i$ ed, in particolare, $s = m$. Sia $U \subseteq X$ un intorno aperto di p tale che f_1, \dots, f_m siano definiti da funzioni in $\mathcal{E}(U)$; dato che il germe in p di ogni restrizione $f_i|_{Y \cap U}$ è nullo, a meno di restringere U possiamo supporre $f_i|_{Y \cap U} = 0$ per ogni i .

Siccome f_1, \dots, f_s sono analiticamente indipendenti in p , per il Teorema del Dini, a meno di restringere ulteriormente U , si ha che $W = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$ è una sottovarietà di U di dimensione $n - m$, il morfismo di inclusione $Y \cap U \rightarrow W$ è differenziabile e induce un isomorfismo tra gli spazi tangenti in p . Per il teorema di invertibilità locale, l'inclusione $Y \cap U \rightarrow W$ è un diffeomorfismo in un intorno di p e, restringendo se necessario U si ottiene $Y \cap U = W$. \square

Vediamo una diversa formulazione (cf. [1, Thm. 13.7]) del teorema delle funzioni implicite, con ipotesi e tesi leggermente diverse dal quelle del Teorema 6.4.9, che risulta più comoda in certe situazioni.

TEOREMA 6.4.11 (del Dini o delle funzioni implicite). *Siano $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ due aperti e*

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f_i = f_i(x, y) \in C^\infty(U \times V),$$

un'applicazione C^∞ tale che $f(0, 0) = 0$ e con la matrice quadrata

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0, 0) \right)_{i,j=1,\dots,m}$$

invertibile. Allora, a meno di restringere U e V , il chiuso $f^{-1}(0)$ è il grafico di un'applicazione $r: U \rightarrow V$ di classe C^∞ . In particolare, $f^{-1}(0)$ è una sottovarietà di $U \times V$ e la proiezione $f^{-1}(0) \rightarrow U$ è un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$g: U \times V \rightarrow U \times \mathbb{R}^m, \quad g(x, y) = (x, f(x, y))$$

ha matrice Jacobiana invertibile in $(0, 0)$; per il teorema di invertibilità locale, possibilmente restringendo U e V ad aperti più piccoli, si ha un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$g: U \times V \xrightarrow{\cong} g(U \times V) \subset U \times \mathbb{R}^n$$

che commuta con le proiezioni sul primo fattore. Si consideri l'aperto

$$U' = \{x \in U \mid (x, 0) \in g(U \times V)\};$$

siccome $(0, 0) = g(0, 0) \in g(U \times V)$ si ha $0 \in U'$. A meno di sostituire U con U' possiamo quindi supporre che $U \times \{0\} \subset g(U \times V) \subset U \times \mathbb{R}^m$ e quindi che $f^{-1}(0) = g^{-1}(U \times \{0\})$ è una sottovarietà regolare chiusa di $U \times V$ ed è il grafico dell'applicazione $r: U \rightarrow V$ definita dalla formula $(x, r(x)) = g^{-1}(x, 0)$. \square

ESEMPIO 6.4.12 (Intorni tubolari). Diamo adesso una interessante applicazione del teorema del Dini. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una sottovarietà compatta e denotiamo con $\iota = (\iota_1, \dots, \iota_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ il morfismo di inclusione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ consideriamo la funzione

$$\phi_x: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_x(p) = \|p - x\|^2 = \|x - \iota(p)\|^2,$$

osservando che la distanza euclidea di x da M è uguale a

$$d(x, M) = \min_{p \in M} \sqrt{\phi_x(p)}.$$

È facile dimostrare che l'applicazione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, M)$ è continua e quindi, per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme

$$T_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \epsilon\}$$

è un intorno aperto di M , chiamato *intorno tubolare*.

TEOREMA 6.4.13. *Nelle notazioni precedenti esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $x \in T_\epsilon$ esiste un **unico** punto $r(x) \in M$ tale che*

$$d(x, M) = \|x - r(x)\| \iff \phi_x(r(x)) = \min_M \phi_x.$$

Inoltre, l'applicazione $r: T_\epsilon \rightarrow M$ è differenziabile.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi $H, \Sigma \subset M \times \mathbb{R}^n$:

$$H = \{(p, x) \mid \|x - p\| = d(x, M)\}, \quad \Sigma = \{(p, x) \mid p \text{ punto critico di } \phi_x\}.$$

Siccome ogni punto di minimo assoluto è anche un punto critico si ha $H \subset \Sigma$.

Sia $p \in M$ un punto e sia $V \subset M$ una carta locale con coordinate $y_i: V \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m = \dim M$, $y_i(p) = 0$ per ogni i . Allora

$$\begin{aligned} \Sigma \cap V \times \mathbb{R}^n &= \left\{ (y, x) \mid \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_j (\iota_j(y) - x_j)^2 = 0 \forall i \right\} \\ &= \{(y, x) \mid f_1(y, x) = \dots = f_m(y, x) = 0\} \end{aligned}$$

dove per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha

$$f_i(y, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_j (x_j - \iota_j(y))^2 = \sum_{j=1}^n (\iota_j(y) - x_j) \frac{\partial \iota_j}{\partial y_i}(y).$$

Nel punto (p, p) si ha $y = 0$ e $x = \iota(y)$ per cui

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_h}(p, p) = \sum_j \frac{\partial \iota_j}{\partial y_h}(p) \frac{\partial \iota_j}{\partial y_i}(p)$$

e tale matrice è data dagli m^2 prodotti scalari di m vettori di \mathbb{R}^n linearmente indipendenti: dunque tale matrice è simmetrica definita positiva ed in particolare invertibile.

Per il Teorema del Dini, esistono due intorni aperti $p \in V_p \subset V$ e $p \in U_p \subset \mathbb{R}^n$, tali che $\Sigma \cap V_p \times U_p$ è il grafico di una funzione $r: U_p \rightarrow V_p$ di classe C^∞ .

Sia $\delta = d(p, M - V_p)/2 > 0$, allora a meno di intersecare U_p con la palla aperta di centro p e raggio δ possiamo supporre che $d(x, q) > d(x, p)$ per ogni $x \in U_p$ ed ogni $q \in M - V_p$. Infatti, se fosse $d(x, q) \leq d(x, p)$ si avrebbe la disuguaglianza contraddittoria $d(p, q) \leq 2d(x, p) < 2\delta = d(p, M - V_p)$.

Sia adesso $\epsilon > 0$ il minimo su M della funzione continua $M \ni q \mapsto d(q, C)$, dove C è il complementare dell'unione degli aperti U_p , al variare di $p \in M$.

Se $x \in T_\epsilon$ allora $x \notin C$ e l'insieme non vuoto dei punti di minimo della funzione ϕ_x è esattamente $H \cap M \times \{x\}$. Per ogni $p \in M$ tale che $x \in U_p$ abbiamo visto che $d(x, M) \leq \|x - p\| \leq d(x, M - V_p)$ e quindi

$$\emptyset \neq H \cap M \times \{x\} = H \cap V_p \times \{x\} \subset \Sigma \cap V_p \times \{x\} = (r(x), x).$$

Questo prova che l'applicazione differenziabile $r: U_p \rightarrow M$ restituisce ad ogni x l'unico punto di minimo della funzione ϕ_x . In particolare per ogni $p_1, p_2 \in M$ le due applicazioni $r: U_{p_1} \rightarrow M$ e $r: U_{p_2} \rightarrow M$ coincidono sull'intersezione $U_{p_1} \cap U_{p_2}$ e quindi si incollano ad una funzione differenziabile $r: \bigcup_{p \in M} U_p \rightarrow M$. \square

Esercizi.

ESERCIZIO 6.6. Siano U un aperto in una varietà differenziabile (X, \mathcal{E}) e $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}(U)$. Provare che l'insieme dei punti $x \in U$ dove f_1, \dots, f_m sono analiticamente indipendenti è aperto.

6.5. La prima classe di Stiefel–Whitney

La teoria delle classi caratteristiche, nata dai lavori di Stiefel (1935), Whitney (1935), Pontrjagin (1942) e Chern (1946), è un potentissimo strumento di indagine geometrica ed è alla base di importantissimi teoremi, come ad esempio quello di Hirzebruch–Riemann–Roch. In questa sezione diamo un piccolissimo assaggio introducendo la classe caratteristica più semplice in assoluto, e cioè la prima classe di Stiefel–Whitney di una varietà differenziabile. Chi volesse approfondire teoria ed applicazioni delle classi caratteristiche può consultare [41] (dopo aver seguito un corso di topologia algebrica).

Sia $\mathcal{A} = (U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ un atlante differenziabile di una varietà differenziabile X di dimensione n , ossia il dato di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ e una collezione $(V_i)_{i \in I}$ di aperti di \mathbb{R}^n con diffeomorfismi $F_i: U_i \rightarrow V_i$.

Sia $\mu = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/(2)$ il gruppo (moltiplicativo) delle radici quadrate di 1 e, per ogni $i, j \in I$ consideriamo l'applicazione $c_{ij}: U_{ij} \rightarrow \mu$ definita come

$$c_{ij}(x) = \text{segno del determinante jacobiano di } F_{ij} = F_j \circ F_i^{-1} \text{ in } F_i(x).$$

Dato che ogni F_{ij} è un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n il determinante Jacobiano non si annulla mai e il suo segno è localmente costante. Per ogni $i, j, k \in I$ si ha $F_{ik} = F_{jk} \circ F_{ij}: F_i(U_{ijk}) \rightarrow F_k(U_{ijk})$, segue immediatamente dalla regola di derivazione delle applicazioni composte che $c_{ik} = c_{jk} c_{ij}$ e quindi che $(c_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mu)$; Denotiamo con $w_1(\mathcal{A}) \in H^1(\mathcal{U}, \mu)$ la sua classe di coomologia e con $w_1(X) \in \check{H}^1(X, \mu)$ la sua immagine al colimite.

Dimostriamo che $w_1(X)$ dipende solamente da X e non dall'atlante \mathcal{A} ; preso un secondo atlante $\mathcal{B} = (A_j, G_j, B_j)_{j \in J}$ possiamo prendere come terzo atlante la loro unione disgiunta $\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}$ e segue immediatamente dalle definizioni che $w_1(\mathcal{A})$ e $w_1(\mathcal{B})$ sono le immagini di $w_1(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B})$ tramite le funzioni di raffinamento date dalle inclusioni naturali $I \rightarrow I \amalg J$ e $J \rightarrow I \amalg J$. Ne consegue che $w_1(\mathcal{A}), w_1(\mathcal{B})$ e $w_1(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B})$ rappresentano lo stesso elemento nel gruppo $\check{H}^1(X, \mu)$.

DEFINIZIONE 6.5.1. La classe $w_1(X) \in \check{H}^1(X, \mu) \cong H^1(X, \mathbb{Z}/(2))$ viene detta **prima classe di Stiefel–Whitney** di X .

Le varietà in cui la prima classe di Stiefel–Whitney si annulla sono dette **orientabili**. Dall'iniettività dei morfismi $H^1(\mathcal{U}, \mu) \rightarrow \check{H}^1(X, \mu)$ segue il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 6.5.2. *Una varietà differenziabile X di dimensione n è orientabile se e solo se esiste un atlante differenziabile $\mathcal{A} = (U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ le cui funzioni di transizione F_{ij} hanno tutte determinante jacobiano positivo in ogni punto.*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione “se” segue immediatamente dalla definizione del cociclo che rappresenta $w_1(\mathcal{A})$. Viceversa, supponiamo $w_1(X) = 0$ e prendiamo un qualsiasi atlante $\mathcal{A} = (U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ in cui tutti gli aperti U_i siano connessi. Allora anche $w_1(\mathcal{A}) = 0$ e questo significa che esiste una collezione $(b_i \in \mu)_{i \in I}$ tale che

$$\text{segno del determinante jacobiano di } F_{ij} = b_j/b_i.$$

Basta allora prendere un atlante $\mathcal{B} = (U_i, G_i \circ F_i, W_i)_{i \in I}$ dove $G_i: V_i \rightarrow W_i$ è il diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n ottenuto moltiplicando la prima coordinata per b_i . \square

Esercizi.

ESERCIZIO 6.7. Siano $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e G un sottogruppo abeliano del gruppo delle permutazioni di un insieme F . Ad ogni cociclo $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, G)$ possiamo associare uno spazio topologico Y ed un'applicazione continua $p: Y \rightarrow X$ nel modo seguente (cf. Teorema 5.3.4). Poniamo su F la topologia discreta e sia W l'unione disgiunta degli spazi topologici $U_i \times F$. Definiamo su W la relazione di equivalenza data da

$$U_i \times F \ni (x, a) \sim (y, b) \in U_j \times F \iff x = y, b = g_{ij}(a),$$

e con $Y = W / \sim$. Dimostrare che l'applicazione $p: Y \rightarrow X$, $p[x, a] = x$, è un rivestimento in cui ogni aperto U_i è banalizzante, e che due cococli differiscono per un cobordo se e solo se definiscono rivestimenti isomorfi. In particolare, il rivestimento $p: Y \rightarrow X$ è banale se e solo se (g_{ij}) è un cobordo.

Nota: usando questa costruzione con la prima classe di Stiefel–Whitney si trova che ad ogni varietà differenziabile è associato, a meno di isomorfismo, un rivestimento di grado 2 che risulta banale se e solo se la varietà è orientabile.

ESERCIZIO 6.8. Provare che ogni sottovarietà aperta di una varietà orientabile è ancora orientabile. Provare che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è orientabile se e solo se $n = 0$ oppure n dispari. (Sugg.: se $n > 0$ è pari, dimostrare che non è orientabile il complementare di un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$.)

Bibliografia

- [1] Apostol, T.M.: Mathematical analysis. Second edition (1973).
- [2] Artin, M.: Algebra. Bollati Boringhieri, Torino (1997).
- [3] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G.: Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- [4] Boothby, W.M.: An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry. Academic Press (1975).
- [5] Dold, A.: Lectures on algebraic topology. Second edition, Springer, Berlin Heidelberg New York (1980).
- [6] Donaldson, S., Kronheimer, P.: The Geometry of Four-Manifolds, Clarendon, Oxford, 1990.
- [7] Dugundji, J.: Topology (1966).
- [8] Eilenberg, S.: Singular Homology Theory. Annals of Mathematics, Vol. 45, (1944), pp. 407–447.
- [9] Eilenberg, S., MacLane, S.: General theory of natural equivalences. Trans. Am. Math. Soc. 58, 231–294 (1945).
- [10] Eilenberg, S., Steenrod, N.: Foundations of algebraic topology. Princeton (1952).
- [11] Fulton, W.: Algebraic topology, a first course. Springer (1995).
- [12] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958).
- [13] Greenberg, M., Harper, J.: Algebraic Topology: A First Course. Addison-Wesley (1981).
- [14] Griffiths, P., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. Wiley-Interscience publication (1978).
- [15] Grothendieck, A.: Sur quelques points d’algèbre homologique, I. Tohoku Math. J. **9**, 119–221, (1957).
- [16] Guillemin, V., Pollack, A.: Differential topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1974).
- [17] Gunning, R., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall (1965).
- [18] Halmos, P.R.: Naive set theory. D. Van Nostrand Co. Princeton, N.J. (1960).
- [19] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Springer Verlag GTM **52** (1977).
- [20] Hatcher, A.: Algebraic Topology. (2002).
- [21] Hilton P.J., Stammbach U.: A Course in Homological Algebra. Second Edition, Springer (1997).
- [22] Hirsch, M.W.: Differential Topology. Springer-Verlag GTM **33** (1976).
- [23] Hirzebruch, F.: Topological Methods in Algebraic Geometry. Classics in Mathematics, Springer-Verlag (1978).
- [24] Huybrechts, D.: Complex geometry. Springer Verlag Universitext (2005).
- [25] Jacobson, N.: Basic Algebra II. Freeman and Company (1989).
- [26] Jackson, J.D.: Classical Electrodynamics (1962).
- [27] Kelley, J.L.: General topology. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, (1955).
- [28] Kempf, G. R.: Algebraic varieties. Cambridge University press (1993).
- [29] Kobayashi, S.: Differential geometry of complex vector bundles. Princeton Univ. Press (1987).
- [30] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential geometry, I. (1963).
- [31] Kodaira, K.: On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **39** (1953), 865-868.
- [32] Kodaira, K.: Complex manifolds and deformation of complex structures. Springer-Verlag (1986).
- [33] Kosniowski, C.: A first course in algebraic topology. Cambridge Univ. Press (1980).
- [34] Lang, S.: Algebra. 3rd edition, Springer-Verlag (2002).
- [35] Lefschetz, S.: On singular chains and cycles. Bull. AMS, Vol. 39 (1933), 124–129.
- [36] Lefschetz, S.: Introduction to topology. Princeton University Press (1949).
- [37] Mac Lane, S.: Homology (1963).
- [38] Manetti, M.: Topologia, seconda edizione, Springer (2014).
- [39] Manetti, M.: Topology, second edition, Springer (2023).
- [40] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces (1968).
- [41] Milnor, J., Stasheff, J.: Characteristic classes (1974).
- [42] Morgan, J. W.: The Seiberg–Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds, Mathematical Notes, vol. 44, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1996).
- [43] Morrow, J., Kodaira, K.: Complex manifolds. Holt, Rinehart and Winston (1971).
- [44] Mumford, D., Oda, T.: Algebraic Geometry II (2015).
- [45] Nowaczyk, N.: The Collected Trivialities of Homological Algebra usually left to the Reader as an Exercise. <https://nikno.de/wp-content/uploads/2016/07/coltrivhomol.pdf>
- [46] Quanta Magazine: What are sheaves? <https://www.quantamagazine.org/what-are-sheaves-20240719/>
- [47] Serre, J.P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955). [English translation.](#)
- [48] Spanier, E.H.: Algebraic topology. McGraw-Hill (1966).
- [49] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1. Third edition (1999). <https://luis.impa.br/aulas/anvar/>.
- [50] Tennison, B. R.: Sheaf Theory. Cambridge University Press (1975).
- [51] Tu, Loring W.: An introduction to manifolds. Springer Universitext (2011).
- [52] van der Waerden, B.L.: Algebra I. 7th edition Springer-Verlag (1991).
- [53] van Glabbeek, R. <https://www.math.mcgill.ca/barr/papers/glabbeek.pdf>; unpublished and untitled.

- [54] Vick, J.W.: Homology theory. Springer, Berlin Heidelberg New York (1994).
- [55] Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [56] Wells, R. O.: Differential analysis on complex manifolds. Springer-Verlag (1980).
- [57] Whitney, H.: Complex analytic varieties (1972).