

Geometria Superiore 2019-20

Marco Manetti

versione preliminare, 28 novembre 2020

Avvertenza: Queste dispense, ancora nella fase work in progress, sono state scritte abbastanza di fretta e contengono inevitabilmente molte lacune, imprecisioni ed errori di stampa. Sono distribuite, *senza alcuna garanzia*, per gli usi relativi all'insegnamento di Geometria Superiore 2019-20, Corso di Laurea Magistrale in Matematica, Sapienza Università di Roma.

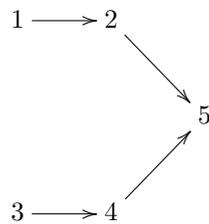


FIGURA 0.1. Diagramma di propedeuticità dei capitoli.

Conoscenze preliminari richieste: Buona conoscenza dei contenuti dei corsi di algebra, geometria 2 e variabile complessa della Laurea triennale in Matematica, nonché delle forme differenziali e della coomologia di de Rham, argomenti usualmente svolti nel corso di istituzioni di geometria superiore.

Indice

Capitolo 1. Funzioni olomorfe di variabili complesse	1
1.1. Richiami sulla convergenza totale	1
1.2. Richiami sulle funzioni olomorfe in una variabile	2
1.3. Funzioni olomorfe in più variabili	4
1.4. Principio del massimo modulo e lemma di Schwarz	9
1.5. Serie di potenze formali	11
1.6. I teoremi di preparazione e di divisione di Weierstrass	13
1.7. Germi e loro fattorizzazione unica	16
1.8. Chiusi analitici e funzioni meromorfe	21
1.9. Biolomorfismi locali e globali	27
Capitolo 2. Varietà complesse	31
2.1. Varietà complesse	31
2.2. Incollamenti e scoppamenti	35
2.3. Chiusi analitici e funzioni meromorfe su varietà	37
2.4. Spazio tangente e sottovarietà	41
2.5. Fibrati e line bundles	43
2.6. Il gruppo di Picard	48
2.7. Finitezza delle sezioni sulle varietà compatte	51
2.8. Indipendenza analitica e teorema di Siegel	56
2.9. I problemi di Cousin	60
Capitolo 3. Fasci	63
3.1. Brevi e grossolani cenni su categorie, funtori e trasformazioni naturali	63
3.2. Prefasci, spighe e morfismi	67
3.3. Fasci, successioni esatte e nucleo	70
3.4. Incollamenti e discesa	75
3.5. I fasci delle sezioni continue e discontinue	77
3.6. Fasci quoziente	79
3.7. Immagini diretta ed inversa di fasci	82
3.8. Piccolo antipastino coomologico	86
Capitolo 4. Coomologia	91
4.1. Elementi di algebra omologica	91
4.2. Risoluzione canonica e coomologia dei fasci	93
4.3. Fasci fiacchi e fasci aciclici	95
4.4. Risoluzioni acicliche e teorema di de Rham	98
4.5. La risoluzione canonica semicosimpliciale	100
4.6. La successione esatta di Mayer-Vietoris	104
4.7. Coomologia di Čech per ricoprimenti	105
4.8. Cocatene di Čech alternanti ed ordinate	107
4.9. Omotopia di complessi e morfismi di raffinamento	110
4.10. Cocatene tutte vs. cocatene alternanti	113
4.11. Coomologia ed applicazioni continue	116
4.12. Invarianza omotopica della coomologia a coefficienti costanti	119
4.13. Esempio: coomologia delle sfere e degli spazi proiettivi complessi	122
Capitolo 5. Coomologia di Dolbeault ed applicazioni	125
5.1. Il lemma di Dolbeault	125

5.2. Applicazioni del lemma di Dolbeault	129
5.3. La successione esponenziale e gruppi di Picard e Neron-Severi	133
5.4. Il gruppo di Picard dello spazio proiettivo	134
5.5. Coomologia di Dolbeault dei fibrati	137
Bibliografia	141

Funzioni oloedorfe di variabili complesse

1.1. Richiami sulla convergenza totale

Iniziamo con un semplice esercizio di Analisi per il lettore. Dato un insieme I ed un'applicazione $a: I \rightarrow [0, +\infty[$, diremo che $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$ se esiste un numero reale M tale che per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$ vale $\sum_{i \in J} a_i < M$. È immediato osservare che ciò è possibile solo se $a_i > 0$ per al più un insieme numerabile di indici.

Data un'applicazione $b: I \rightarrow \mathbb{C}$ diremo che la "serie" $\sum_{i \in I} b_i$ è **assolutamente convergente** se $\sum_{i \in I} |b_i| < +\infty$. In tal caso esiste la somma della serie

$$\sum_{i \in I} b_i = b$$

univocamente determinata dalla proprietà che per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni sottoinsieme finito $H \subset I$ esiste un sottoinsieme finito $H \subset J \subset I$ tale che $|b - \sum_{i \in J} b_i| < \varepsilon$. Si dimostra agevolmente che se $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ è una qualunque catena numerabile di sottoinsiemi finiti di I tali che

$$\{i \in I \mid b_i \neq 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

allora

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in J_n} b_i \right).$$

Siano X uno spazio topologico e denotiamo con $C(X, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Data $f: I \rightarrow C(X, \mathbb{C})$ diremo che la serie $\sum_{i \in I} f_i$ **converge totalmente sui compatti** se per ogni sottoinsieme compatto $K \subset X$ si ha $\sum_{i \in I} \max_{x \in K} |f_i(x)| < +\infty$.

In tal caso, siccome i punti sono compatti, la serie $\sum_{i \in I} f_i$ converge puntualmente ad una funzione f ; per ogni compatto $K \subset X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ tale che

$$\left| f(x) - \sum_{i \in J} f_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in K.$$

Se X è localmente compatto allora la funzione f è continua.

Le stesse considerazioni si applicano, mutatis mutandis, ai prodotti infiniti. Dato un insieme I ed un'applicazione $a: I \rightarrow [0, +\infty[$, se $\sum_{i \in I} a_i = M < +\infty$ allora per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$ segue dalla disuguaglianza $\exp(x) = e^x \geq 1 + x$ e dal teorema del valor medio che

$$\prod_{i \in J} (1 + a_i) - 1 \leq \prod_{i \in J} e^{a_i} - 1 = \exp\left(\sum_{i \in J} a_i\right) - 1 \leq e^M \sum_{i \in J} a_i.$$

Data un'applicazione $b: I \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\sum_{i \in I} |b_i| < +\infty$ possiamo definire il prodotto infinito $\prod_{i \in I} (1 + b_i)$ nel modo seguente: sia $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ una catena di sottoinsiemi di I tali che la successione $\delta_n = \sum_{i \in I - J_n} |b_i|$ sia infinitesima, allora la successione $c_n = \prod_{i \in J_n} (1 + b_i)$ è di Cauchy (esercizio) ed il limite $\prod_{i \in I} (1 + b_i) = \lim_n c_n$ non dipende dalla scelta della catena $\{J_n\}$ (altro esercizio).

1.2. Richiami sulle funzioni ologomorfe in una variabile

Notazione: siano $0 < r < +\infty$ e $p \in \mathbb{C}$. Il **disco aperto** ed il **disco chiuso** di centro p e raggio r sono definiti rispettivamente come

$$\Delta(p, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\}, \quad \bar{\Delta}(p, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| \leq r\}.$$

La differenza tra i due è il bordo del disco

$$\partial\Delta(p, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = r\}.$$

DEFINIZIONE 1.2.1. Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto; una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice ologomorfa se è analitica complessa, ossia se è sviluppabile localmente in una serie di potenze. Più precisamente f è ologomorfa se per ogni $p \in U$ esiste $r > 0$ tale che $\Delta(p, r) \subset U$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n, \quad z \in \Delta(p, r).$$

Dal fatto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ sia convergente quando $|z - p| < r$ segue che per ogni $0 \leq R < r$ si ha $\sum_n |a_n| R^n < \infty$. Viceversa, se $\sum_n |a_n| R^n < \infty$ per una successione $a_n \in \mathbb{C}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ definisce una funzione ologomorfa su $\Delta(p, R)$.

Segue immediatamente dalla definizione e dalla teoria delle serie di potenze che somme e prodotti di funzioni ologomorfe sono ancora ologomorfe. Se $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è ologomorfa e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$, allora anche $1/f$ è ologomorfa: se $p \in U$ si può scrivere

$$\frac{f(z)}{f(p)} = 1 - g(z), \quad g(p) = 0$$

ed esiste un intorno $p \in V \subset U$ tale che $|g(z)| < 1/2$ per ogni $z \in V$. Allora

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(p)} \sum_{n=0}^{\infty} g(z)^n, \quad z \in V.$$

ESEMPIO 1.2.2. Data una qualunque funzione continua $g: \partial\Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$, la funzione

$$f: \Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

è ologomorfa, con sviluppo in serie

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

Infatti, basta osservare che per ogni $z \in \Delta(0, r)$ ed ogni $\xi \in \partial\Delta(0, r)$ si ha

$$\left| \frac{z}{\xi} \right| < 1, \quad \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right) z^n.$$

Si noti che se M è il massimo su $\partial\Delta$ di $|g(\xi)|$, allora $|a_n| \leq M/r^n$ per ogni n e quindi la serie $\sum a_n z^n$ ha raggio di convergenza $\geq r$.

Per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}$ denotiamo

$$\mathcal{O}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ ologomorfa}\},$$

avendo già osservato che si tratta di un anello commutativo con unità ed uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Tramite l'identificazione naturale $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$, possiamo pensare ogni aperto $U \subset \mathbb{C}$ come un aperto di \mathbb{R}^2 ed ivi considerare lo spazio delle p -forme differenziali $A^p(U)$, $0 \leq p \leq 2$, a valori complessi:

$$A^0(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ di classe } C^\infty\},$$

$$A^1(U) = \{f dx + g dy \mid f, g \in A^0(U)\},$$

$$A^2(U) = \{f dx \wedge dy \mid f \in A^0(U)\}.$$

Risulta molto utile rappresentare le forme differenziali nella base $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$, per cui

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}, \quad dz \wedge d\bar{z} = -2i \, dx \wedge dy,$$

e quindi

$$\begin{aligned} A^0(U) &= \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ di classe } C^\infty\}, \\ A^1(U) &= \{f dz + g d\bar{z} \mid f, g \in A^0(U)\}, \\ A^2(U) &= \{f dz \wedge d\bar{z} \mid f \in A^0(U)\}. \end{aligned}$$

In tale rappresentazione il differenziale di una funzione $f \in A^0(U)$ si scrive

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Ogni funzione olomorfa è analitica reale e quindi di classe C^∞ , ossia $\mathcal{O}(U) \subset A^0(U)$. Inoltre ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

Infatti per ogni $p \in U$ si può scrivere in un suo intorno $f(z) = f(p) + (z - p)g(z)$ da cui, per la formula di Leibniz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial z - p}{\partial x}(p)g(p) = g(p), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial z - p}{\partial y}(p)g(p) = ig(p).$$

Vale anche il viceversa, ossia che ogni funzione di classe C^∞ (ma basta C^1 ed anche meno) che soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann è olomorfa. Per uso futuro è utile far vedere come questo segue dalla formula di Stokes per forme differenziali su domini di \mathbb{R}^2 con bordo regolare.

LEMMA 1.2.3 (Formula di Cauchy generalizzata). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un intorno aperto del disco chiuso $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(0, r)$ e sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ . Allora per ogni $z \in \Delta(0, r)$ vale la formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\bar{\Delta}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}(\xi) \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}.$$

Prima della dimostrazione urge chiarire che per ogni disco chiuso $D = \bar{\Delta}(p, r)$ e per ogni funzione continua $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ l'integrale doppio

$$\iint_D f(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - p}$$

è ben definito e limitato. Infatti passando ad un sistema di coordinate polari u, v centrate in p , ossia ponendo $z = p + ue^{iv}$, si ottiene

$$\begin{aligned} dz &= due^{iv} + iue^{iv} dv, & d\bar{z} &= due^{-iv} - iue^{-iv} dv, \\ \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - p} &= -2e^{-iv} du \wedge dv, \end{aligned}$$

e l'integrale doppio diventa

$$-2 \int_{u=0}^r \int_{v=0}^{2\pi} f(p + ue^{iv}) e^{-iv} du \wedge dv.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia z un punto fissato, allora la 1-forma differenziale $\frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ è C^∞ al di fuori di z ed il suo differenziale è

$$d \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\bar{\xi} \wedge d\xi = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}(\xi) \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}.$$

Sia $0 < \epsilon < r - |z|$; la formula di Stokes sulla varietà con bordo $D_\epsilon = \bar{\Delta}(0, r) - \Delta(z, \epsilon)$ dà

$$\int_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \iint_{D_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}(\xi) \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}.$$

Per concludere basta adesso fare il limite per $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Data una $f \in A^0(U)$ tale che $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, per ogni polidisco chiuso $\bar{\Delta} \subset U$ ed ogni $z \in \Delta$ vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

e quindi f è olomorfa per l'Esempio 1.2.2.

TEOREMA 1.2.4 (Formula di Cauchy). *Sia f una funzione olomorfa definita in un intorno aperto del disco chiuso $\bar{\Delta}(p, r)$. Allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \Delta(p, r).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che ogni funzione olomorfa soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ e dalla formula di Cauchy generalizzata 1.2.3. \square

Data $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $p \in U$, diremo che f ha uno zero di ordine k in p se

$$f(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i (z-p)^i, \quad a_k \neq 0.$$

Equivalentemente, l'ordine di zero in p è il più grande intero k tale che $f(z)/(z-p)^k$ è olomorfa su U .

Per finire, riportiamo senza dimostrazione il celebre teorema di estensione di Riemann.

TEOREMA 1.2.5 (di estensione di Riemann). *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $T \subset U$ sottoinsieme discreto; equivalentemente per ogni $p \in T$ esiste un $r > 0$ tale che $\Delta(p, r) \cap T = \{p\}$.*

Allora ogni funzione $f: U - T \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e limitata si estende in maniera unica ad una funzione olomorfa \tilde{f} su U .

Notiamo che l'unicità dell'estensione di f è garantita dal fatto che $U - T$ è denso in U o, se preferite, dalla formula di Cauchy: infatti per ogni $t \in T$ si deve avere

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-p|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi,$$

dove $r > 0$ è tale che $\bar{\Delta}(t, r) \subset U$ e $\partial \Delta(t, r) \cap T = \emptyset$.

1.3. Funzioni olomorfe in più variabili

Sia \mathbb{C}^n lo spazio vettoriale complesso n -dimensionale. Indichiamo con $z = (z_1, \dots, z_n)$ il vettore di \mathbb{C}^n di coordinate z_1, \dots, z_n . Salvo avviso contrario considereremo su \mathbb{C}^n la topologia classica, ossia quella indotta dalla norma Euclidea $\|z\| = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$, ed anche dalla norma policilindrica, ad essa equivalente, che per semplicità denoteremo

$$|z| = \max_i |z_i|.$$

Chiamiamo **poliraggio** l' n -upla $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $r_i > 0$, e chiamiamo **polidisco aperto** di centro $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ e poliraggio r il sottoinsieme di \mathbb{C}^n dato da

$$\Delta(w, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - w_i| < r_i \forall i\} = \Delta(w_1, r_1) \times \dots \times \Delta(w_n, r_n).$$

Dato un tale polidisco, definiamo il suo **bordo di Shilov** come

$$\partial_0 \Delta(w, r) = \partial \Delta(w_1, r_1) \times \dots \times \partial \Delta(w_n, r_n),$$

da non confondersi con il bordo topologico $\partial \Delta(w, r)$.

Similmente chiameremo $\bar{\Delta}(w, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - w_i| \leq r_i \forall i\}$ **polidisco chiuso** di centro w e poliraggio r .

DEFINIZIONE 1.3.1. Sia V un aperto di \mathbb{C}^n , una funzione $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** se è analitica complessa, ossia se per ogni $w \in V$ esiste un intorno U di w dove f è sviluppabile in serie di potenze. Ossia:

$$f(z) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1, \dots, \nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - w_n)^{\nu_n}$$

per ogni $z \in U$: la convergenza della serie al secondo membro deve essere interpretata come nella Sezione 1.1. Definiamo, inoltre

$$\mathcal{O}(V) = \{f: V \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa in } V\}.$$

L'olomorfia di una funzione $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ è una proprietà locale: con questo si intende che:

- se $f \in \mathcal{O}(V)$ allora per ogni aperto $U \subset V$ si ha $f|_U \in \mathcal{O}(U)$;
- se $V = \cup U_i$ è un ricoprimento aperto e $f|_{U_i} \in \mathcal{O}(U_i)$ per ogni i , allora $f \in \mathcal{O}(V)$.

È chiaro che le funzioni olomorfe godono della proprietà di incollamento: sia $U = \cup U_i$, $i \in I$, una unione qualsiasi di aperti di \mathbb{C}^n e sia data, per ogni indice i , una funzione olomorfa $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Se accade che per ogni coppia di indici i, j le funzioni f_i ed f_j coincidono in $U_i \cap U_j$, allora le f_i si incollano ad una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni i , che per quanto appena osservato risulta essere olomorfa, $f \in \mathcal{O}(U)$.

OSSERVAZIONE 1.3.2. Gli stessi argomenti usati nello studio delle funzioni di una variabile mostrano che data una polisuccessione

$$a_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{C}, \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N},$$

ed un poliraggio $r = (r_1, \dots, r_n)$, se

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} |a_{i_1 \dots i_n}| r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n} < \infty$$

allora la serie

$$(1.1) \quad \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$$

converge totalmente ed assolutamente sui compatti di $\Delta(0, r)$ e definisce quindi una funzione olomorfa

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \in \mathcal{O}(\Delta(0, r)).$$

Viceversa, se la serie (1.1) è convergente nel polidisco $\Delta(0, r)$, allora

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} |a_{i_1 \dots i_n}| R_1^{i_1} \cdots R_n^{i_n} < \infty$$

per ogni $R < r$ (si intende $R_i < r_i$ per ogni i).

Diremo che una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è **olomorfa nella variabile** z_j se per ogni $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$ la funzione di una variabile complessa

$$z_j \mapsto f(p_1, \dots, p_{j-1}, z_j, p_{j+1}, \dots, p_n)$$

è olomorfa in un intorno di p_i . Diremo che una funzione è **separatamente olomorfa** se è olomorfa in ogni variabile. È chiaro che ogni funzione olomorfa è anche separatamente olomorfa.

PROPOSIZIONE 1.3.3. *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è continua¹ e separatamente olomorfa.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo l'implicazione non banale. Sia $w \in U$ e fissiamo un poliraggio $r = (r_1, \dots, r_n)$ tale che $\bar{\Delta}(w, r) \subset U$. Sia ora $z \in \Delta(w, r)$. Dato che f è olomorfa rispetto a z_1 , applicando la formula di Cauchy otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - w_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

¹Molti testi concordano nel dire che esiste un teorema non banale secondo il quale l'ipotesi di continuità può essere omessa.

Ripetendo lo stesso ragionamento rispetto alle altre variabili, partendo da z_2

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|\zeta_1 - w_1| = r_1} \int_{|\zeta_2 - w_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

si arriva, dopo n trattamenti, alla cosiddetta **formula di Cauchy** per polidischi:

$$(1.2) \quad f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Da notare che l'integrale è fatto sulla frontiera di Shilov, il che rende complicato estendere la formula di Cauchy a domini che non siano polidischi. Dal momento che per ogni $k = 1, \dots, n$ vale $|\zeta_k - w_k| > |z_k - w_k|$, abbiamo

$$\frac{1}{\zeta_k - z_k} = \frac{1}{\zeta_k - w_k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_k - w_k}{\zeta_k - w_k}} = \frac{1}{\zeta_k - w_k} \sum_{i_k=0}^{\infty} \left(\frac{z_k - w_k}{\zeta_k - w_k}\right)^{i_k}.$$

Sostituendo queste espressioni in quella precedentemente ricavata, si ottiene

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n},$$

dove

$$a_{i_1 \dots i_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - w_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - w_n)^{i_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Detto M il massimo di $|f|$ su $\partial_0 \Delta(w, r)$, si ha $|a_{i_1 \dots i_n}| \leq \frac{M}{r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}}$, il che garantisce la convergenza assoluta della serie in $\Delta(w, r)$. \square

OSSERVAZIONE 1.3.4. È immediato dalla definizione che $\mathcal{O}(U)$ è un sottoanello dell'anello delle funzioni continue su U . Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$, allora la funzione $1/f$ è ancora olomorfa: questo si dimostra subito usando la Proposizione 1.3.3 e l'analogo risultato per funzioni in una variabile.

Per quanto riguarda invece gli aspetti topologici di $\mathcal{O}(U)$ è possibile dimostrare agevolmente che la topologia della convergenza uniforme sui compatti è indotta da una struttura di spazio di Fréchet: procediamo con ordine.

Per ogni compatto $K \subset U$ ed ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ denotiamo $\|f\|_K = \max_K |f|$. Nella topologia della convergenza uniforme sui compatti, un sottoinsieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(U)$ è aperto se e solo se per ogni $f \in \mathcal{A}$ esistono un compatto $K \subset U$ ed un numero reale positivo ϵ tali che

$$\{g \in \mathcal{O}(U) \mid \|g - f\|_K < \epsilon\} \subset \mathcal{A}.$$

Per definizione, dire che lo spazio vettoriale $\mathcal{O}(U)$ dotato di con tale topologia, è uno spazio di Fréchet significa dire che:

- (1) ogni punto possiede un sistema fondamentale di interni convessi;
- (2) la topologia è indotta da una metrica completa ed invariante per traslazioni.

Senza entrare in dettagli tecnici di topologia ed analisi funzionale, la completezza segue sostanzialmente dalla seguente applicazione della formula di Cauchy, che poi è esattamente quello di cui abbiamo bisogno in queste note.

TEOREMA 1.3.5. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $f_i \in \mathcal{O}(U)$ una successione di funzioni olomorfe. Si assuma che per ogni compatto $K \subset U$ ed ogni $\epsilon > 0$ esista un intero $N = N(K, \epsilon)$ tale che $\|f_i - f_j\|_K < \epsilon$ per ogni $i, j \geq N$ (in particolare la successione $f_i(z)$ è di Cauchy per ogni $z \in U$). Allora il limite puntuale $f(z) = \lim_i f_i(z)$ è una funzione olomorfa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in U$ qualsiasi e sia r un poliraggio tale che $\overline{\Delta}(p, r) \subset U$; vogliamo dimostrare che f è olomorfa in $\Delta(p, r)$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ ed ogni $z \in \Delta(p, r)$ vale la formula di Cauchy

$$f_i(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 \Delta(p, r)} \frac{f_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Siccome il bordo di Shilov $\partial_0\Delta(p, r)$ è un compatto contenuto in U possiamo passare il limite sotto il segno di integrale ed ottenere

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0\Delta(p, r)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Abbiamo già dimostrato che la formula di Cauchy per i polidischi è equivalente all'olomorfia. \square

COROLLARIO 1.3.6. *Siano $U \subset K \subset \mathbb{C}^n$ con U aperto e K compatto. Sia $g_i: V_i \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni olomorfe tali che $K \subset V_i$ e $\|g_i\|_K \leq 2^{-i}$ per ogni i . Allora $\sum_i g_i \in \mathcal{O}(U)$.*

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni $f_i = \sum_{j=1}^i g_j \in \mathcal{O}(U)$ soddisfano le ipotesi del Teorema 1.3.5. \square

ESEMPIO 1.3.7. Sia $\Delta = \Delta(0, r)$ un polidisco aperto. Allora i polinomi sono densi in $\mathcal{O}(\Delta)$. Siano infatti $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, $K \subset \Delta$ compatto ed $\epsilon > 0$. Se $r = (r_1, \dots, r_n)$ allora $R_i := \max_K |z_i| < r_i$ per ogni i . Abbiamo visto che f possiede uno sviluppo in serie

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$$

tale che $\sum_{i_1, \dots, i_n} |a_{i_1 \dots i_n}| R_1^{i_1} \cdots R_n^{i_n} < \infty$. Basta allora prendere la somma parziale di un numero sufficientemente alto di termini nello sviluppo in serie di $f(z)$ per avere un polinomio $p(z)$ tale che $\|f - p\|_K < \epsilon$.

Le funzioni olomorfe, in quanto analitiche complesse sono anche differenziabili in senso complesso, ciò significa che se $f \in \mathcal{O}(U)$ con $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, allora per ogni $x \in U$ esiste un'applicazione lineare $df(x): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale che per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$f(x + tv) = f(x) + tdf(x)(v) + o(|t|), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x + tv \in U.$$

In particolare $dz_i(x)(v) = v_i$ (coordinata i -esima) ed un semplice conto, identico al caso reale, mostra che

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}(x) dz_i,$$

dove $\frac{\partial f}{\partial z_h}(x)$ è la derivata complessa della funzione olomorfa di una variabile $t \mapsto f(x_1, \dots, x_h + t, \dots, x_n)$. Vale inoltre la formula di Leibniz:

$$d(fg)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x), \quad f, g \in \mathcal{O}(U).$$

Gli stessi argomenti usati per le funzioni olomorfe in una variabile mostrano che se nel polidisco $\Delta(w, r)$ la funzione f ha lo sviluppo in serie

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}$$

allora nel medesimo polidisco le derivate parziali hanno gli sviluppi in serie

$$\frac{\partial f}{\partial z_h}(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n} \frac{i_h}{z_h - w_h} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}.$$

Dunque pure le derivate parziali sono funzioni olomorfe e per un chiaro effetto ricorsivo le funzioni olomorfe sono derivabili infinite volte in senso complesso. Se f si estende in maniera continua al polidisco chiuso $\bar{\Delta}(w, r)$, derivando la Formula (1.2) segue la formula generale di Cauchy per le derivate di ogni ordine e grado:

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1! \cdots k_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial_0\Delta} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{k_n+1}}.$$

TEOREMA 1.3.8 (Principio di identità). *Siano $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto connesso e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se f si annulla in un aperto non vuoto di U , allora $f = 0$ su tutto U .*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato vale più in generale per tutte le funzioni analitiche reali, ossia per le funzioni che sono localmente uguali al proprio sviluppo di Taylor.

Quindi, siano $U \subset \mathbb{R}^k$ un aperto connesso, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica reale e denotiamo $E \subset U$ il luogo dei punti dove si annullano f e tutte le sue derivate parziali di ogni ordine e grado. L'insieme E è intersezione di chiusi (ciascuno dove si annulla una determinata derivata) e quindi chiuso, ed è anche aperto perché f analitica coincide localmente con il suo sviluppo di Taylor. Se $f \equiv 0$ su un aperto non vuoto $V \subset U$, lo stesso vale per la derivate parziali e quindi $V \subset E$. Dunque E è chiuso, aperto e non vuoto in U connesso. \square

COROLLARIO 1.3.9. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni oloomorfe. Se $f(z) = g(z)$ su un aperto non vuoto, allora $f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il principio di identità alla funzione $f - g$. \square

COROLLARIO 1.3.10. *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, allora $\mathcal{O}(U)$ è un dominio di integrità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g: V \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni oloomorfe tali che $fg(z) = f(z)g(z) = 0$ per ogni z . Allora U è unione dei due chiusi $F = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$, $G = \{z \in U \mid g(z) = 0\}$. Se $F = U$ allora f è la funzione nulla, se $F \neq U$ allora g si annulla nell'aperto non vuoto $U - F$ e per il principio di identità g si annulla ovunque. \square

TEOREMA 1.3.11 (di estensione di Hartogs). *Siano $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ un polidisco aperto e $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 0$, un aperto connesso così che il loro prodotto $U = \Delta \times D$ è un aperto connesso di \mathbb{C}^{2+n} . Sia poi $H \subset U$ un sottoinsieme chiuso tale che:*

- (1) $U - H$ è connesso,
- (2) esiste un compatto $K \subset \Delta$ tale che $H \subset K \times D$.

Allora ogni funzione oloomorfa $f \in \mathcal{O}(U - H)$ si estende in modo unico ad una funzione oloomorfa $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità dell'estensione segue dalla connessione di U e dal principio di identità: infatti siccome $K \neq \Delta$, l'aperto $U - H$ contiene $(\Delta - K) \times D$ ed è quindi non vuoto.

Dimostriamo l'esistenza. Non è restrittivo supporre Δ centrato in 0 e quindi $\Delta = \Delta(0, r)$ per un poliraggio $r = (r_1, r_2)$. Essendo K compatto possiamo trovare due numeri reali δ_1, δ_2 tali che

$$k_1 = \max_{z \in K} |z_1| < \delta_1 < r_1, \quad k_2 = \max_{z \in K} |z_2| < \delta_2 < r_2.$$

Denotando

$$V = \Delta(0, \delta_1) \times \Delta(0, r_2) \times D,$$

si osserva che $H \subset K \times D \subset V$, ossia $U = V \cup (U - H)$, e che $V - H = V \cap (U - H)$ è un aperto connesso: infatti H è chiuso in U ed a maggior ragione è chiuso anche in V , mentre per la connessione basta osservare che possiamo definire un'applicazione continua e surgettiva

$$p: U - H \rightarrow V - H, \quad p(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n) = (\phi(|z_1|)z_1, z_2, w_1, \dots, w_n),$$

dove

$$\phi(t) = \min \left(1, 1 - \frac{t - k_1}{r_1 - k_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{r_1} \right) \right).$$

La funzione

$$g: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta_1} \frac{f(\zeta, z_2, w_1, \dots, w_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta,$$

è oloomorfa e per la formula di Cauchy si ha:

$$\Delta(0, \delta_1) \times \{z_2\} \subset \Delta - K \implies g(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n) = f(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n).$$

In particolare

$$\delta_2 < |z_2| < r_2 \implies g(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n) = f(z_1, z_2, w_1, \dots, w_n)$$

e quindi f, g coincidono in un aperto nonvuoto di $V - H = V \cap (U - H)$. Per il principio di identità f, g coincidono su tutto $V - H$ e basta incollare f e g per avere l'estensione cercata. \square

COROLLARIO 1.3.12. *Siano $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con $n \geq 2$, $H \subset U$ sottospazio discreto ed f una funzione olomorfa su $U - H$ allora f si può estendere ad una funzione olomorfa su tutto U .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in H$ sia $\Delta_p \subset U$ un polidisco tale che $H \cap \Delta_p = \{p\}$. Per il teorema di Hartogs 1.3.11 la funzione f si estende ad una funzione olomorfa $f_p: \Delta_p \rightarrow \mathbb{C}$. Siccome per ogni $p \neq q$ si ha $\Delta_p \cap \Delta_q \cap H = \emptyset$, le funzioni f e f_p , $p \in K$, coincidono sulle intersezioni dei domini e quindi si incollano ad una funzione su U . \square

Il significato del Corollario 1.3.12 è tanto evidente quanto importante: se $n \geq 2$ le funzioni su un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ olomorfe ovunque tranne che in un punto non possono che avere una singolarità eliminabile.

Esiste anche l'analogo del teorema di estensione di Riemann 1.2.5 per funzioni olomorfe in più variabili, che però dimostreremo più avanti (Teorema 1.8.5) in quanto nell'enunciato entrano nozioni non banali e non ancora introdotte.

ESERCIZIO 1.3.13. Siano $f: \Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $d \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(e^{i\theta} z) = e^{id\theta} f(z), \quad \forall z \in \Delta(0, r), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Provare che $d \in \mathbb{N}$ e f è un polinomio omogeneo di grado d .

1.4. Principio del massimo modulo e lemma di Schwarz

Richiamiamo e dimostriamo il principio del massimo modulo per funzioni di una variabile complessa.

TEOREMA 1.4.1 (Principio del massimo modulo). *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora $|f|$ possiede un punto di massimo locale se e solo se f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $w \in U$ un punto di massimo locale per la funzione $|f(z)|$. Per il principio di identità basta provare che f è costante in un intorno di w ; a meno di restringere U non è restrittivo supporre che w sia un punto di massimo globale. Sia $R > 0$ tale che $\Delta(w, R) \subset U$: per ogni $0 < r < R$ si ha

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^1 f(w + re^{2\pi i t}) dt.$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$|f(w)| \leq \int_0^1 |f(w + re^{2\pi i t})| dt,$$

e siccome $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z ne segue $|f(z)| = |f(w)|$ per ogni $z \in \partial\Delta(w, r)$.

Si consideri adesso la funzione $g(z) = f(z) + f(w)$. Allora per ogni z vale

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |f(w)| \leq 2|f(w)| = |2f(w)| = |g(w)|$$

e lo stesso argomento di sopra mostra che $|g(z)| = |g(w)|$ per ogni $z \in \partial\Delta(w, r)$. Basta adesso osservare che per un qualunque $z \in \partial\Delta(w, r)$ si ha

$$f(z) = f(w) \iff |f(z)| = |f(w)| \text{ e } |f(z) + f(w)| = 2|f(w)|.$$

Variando r da 0 ad R si ottiene la costanza di f su $\Delta(w, R)$. \square

La generalizzazione a più variabili è immediata:

COROLLARIO 1.4.2. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto connesso $U \subset \mathbb{C}^n$. Allora $|f|$ possiede un punto di massimo locale se e solo se f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $w \in U$ tale che $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z in un intorno di w e dimostriamo che $f(z) = f(w)$ per ogni $z \in U$. Sia $r > 0$ tale che

$$B := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - w\| = \sqrt{\sum |z_i - w_i|^2} < r\} \subset U;$$

per il principio di identità basta provare che f è costante sulla palla aperta B . Se $L \subset \mathbb{C}^n$ è una retta affine passante per w , allora $B \cap L$ è un disco aperto: più precisamente, se L è uguale all'immagine dell'applicazione affine

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi(t) = w + th, \quad 0 \neq h \in \mathbb{C}^n,$$

allora $\varphi^{-1}(B) = \{t \in \mathbb{C} \mid \|th\| < r\} = \Delta(0, r/\|h\|)$.

Per il principio del massimo in una variabile, $f(z) = f(w)$ per ogni $z \in L \cap B$; variando L tra tutte le rette passanti per w ottiene $f(z) = f(w)$ per ogni $z \in B$. \square

Consideriamo lo sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa f in un intorno del punto $w = (w_1, \dots, w_n)$:

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}$$

Siccome in questo intorno la serie risulta essere assolutamente convergente, possiamo raccogliere i termini della serie in una serie di polinomi omogenei nel modo seguente:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1, \dots, i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z).$$

Se p_k è il polinomio di grado minimo che non è identicamente nullo in w allora f si dice di **molteplicità** k in w e si scrive

$$k = \nu_w(f) = \text{molteplicità di } f \text{ nel punto } w.$$

Se $f(z)$ è identicamente nulla in un intorno di w allora diremo che f ha molteplicità $+\infty$.

ESERCIZIO 1.4.3. Data f olomorfa in un intorno di $0 \in \mathbb{C}^n$ e $0 < k < n$ un intero, denotiamo con g la restrizione di f al sottospazio vettoriale di equazione $z_1 = \dots = z_k = 0$, ossia $g(z_{k+1}, \dots, z_n) = f(0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_n)$. Dimostrare che

$$\nu_0(f) = \min \left(\nu_0(g), \nu_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right) + 1, \dots, \nu_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \right) + 1 \right).$$

In particolare $\nu_0(g) \geq \nu_0(f)$ e l'uguaglianza vale se $\nu_0 \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \geq \nu_0(f)$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

COROLLARIO 1.4.4 (Lemma di Schwarz). Sia f olomorfa in un intorno del polidisco chiuso $\bar{\Delta}(0, r)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Supponiamo, inoltre, che f abbia molteplicità k nel punto $z = 0$ e che $|f(z)| \leq M$ in $\bar{\Delta}(0, r)$. Allora

$$|f(z)| \leq M \max_i \left| \frac{z_i}{r_i} \right|^k \quad \text{per ogni } z \in \bar{\Delta}(0, r).$$

DIMOSTRAZIONE. Per $k = 0$ il risultato è vuoto e non c'è nulla da dimostrare. Se $k > 0$ allora $f(z) = 0$ e possiamo supporre $z \neq 0$. Sia $0 \neq z \in \bar{\Delta}(0, r)$ fissato e denotiamo

$$0 < \rho = \min_{\{i|z_i \neq 0\}} \frac{r_i}{|z_i|} \iff 0 < \rho^{-1} = \max_i \left| \frac{z_i}{r_i} \right|.$$

Notiamo che per un numero complesso $t \in \mathbb{C}$ si ha

$$tz \in \bar{\Delta}(0, r) \iff |t| |z_i| \leq r_i \forall i \iff |t| \leq \min_{\{i|z_i \neq 0\}} \frac{r_i}{|z_i|} \iff |t| \leq \rho.$$

La funzione olomorfa in una variabile $t \mapsto f(tz)$ ha uno zero di ordine $\geq k$ per $t = 0$; risulta quindi ben definita ed olomorfa in un intorno del disco chiuso di raggio ρ la funzione:

$$g(t) = \frac{f(tz)}{t^k}.$$

Per il principio del massimo, la funzione $|g(t)|$ assume il valore massimo su $\bar{\Delta}(0, \rho)$ in un punto t_0 del bordo, $|t_0| = \rho$. In particolare $|g(1)| \leq |g(t_0)|$ e quindi

$$|f(z)| = |g(1)| \leq |g(t_0)| = \frac{|f(t_0 z)|}{\rho^k} \leq M \rho^{-k}.$$

\square

1.5. Serie di potenze formali

Sia A un anello commutativo con unità fissato. Una **serie formale** a coefficienti in A nelle indeterminate x_1, \dots, x_n è una espressione del tipo

$$\phi = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I x^I, \quad a_{i_1 \dots i_n} \in A,$$

dove nell'espressione semplificata a destra si sono usate le convenzioni:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}, \quad I = (i_1, \dots, i_n), \quad a_I = a_{i_1 \dots i_n}, \quad x^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}.$$

La n -upla $I = (i_1, \dots, i_n)$ viene detta multiindice e per definizione il suo **grado** è uguale a $|I| = i_1 + \dots + i_n$. Spesso è utile accoppiare i termini di una serie formale relativi a multiindici dello stesso grado e scrivere

$$\phi = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I x^I = \sum_{k \geq 0} \sum_{|I|=k} a_I x^I = \sum_{k \geq 0} \phi_k, \quad \phi_k \in A[x_1, \dots, x_n] \text{ omogeneo di grado } k.$$

Chiaramente un polinomio a coefficienti in A può essere pensato come una serie formale in cui i coefficienti sono diversi da 0 per al più un numero finito di multiindici.

DEFINIZIONE 1.5.1. La **molteplicità** $\nu(\phi)$ di una serie formale ϕ è il più piccolo grado dei monomi che vi fanno parte con coefficiente non nullo:

$$\nu(\sum a_I x^I) = \min\{|I| \mid a_I \neq 0\}.$$

Per convenzione $\nu(0) = +\infty$.

Con le ben note regole di somma e di prodotto di Cauchy:

$$\sum a_I x^I + \sum b_I x^I = \sum (a_I + b_I) x^I, \quad (\sum a_I x^I)(\sum b_I x^I) = \sum_H (\sum_{I+J=H} a_I b_J) x^H,$$

le serie formali formano un anello commutativo denotato con $A[[x_1, \dots, x_n]]$. È ben definito un omomorfismo surgettivo di anelli

$$A[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow A, \quad \phi = \sum_I a_I x^I \mapsto \phi(0) = a_{0 \dots 0} \quad (\text{valutazione in } x = 0).$$

Si noti che per ogni $f, g \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ valgono le formule:

$$\nu(f + g) \geq \min(\nu(f), \nu(g)), \quad \nu(fg) \geq \nu(f) + \nu(g).$$

Se A è un dominio di integrità vale $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$.

Data una successione $\phi_n, n \in \mathbb{N}$, di serie formali, in generale non è possibile dare un senso alla sommatoria $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n$. Tuttavia si ha il seguente:

LEMMA 1.5.2. Sia $\phi_n \in A[[x_1, \dots, x_n]]$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di serie formali. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\phi_n) = +\infty$$

allora risulta ben definita ed “assolutamente convergente” la serie

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \in A[[x_1, \dots, x_n]],$$

univocamente determinata dalla condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\phi - \sum_{i=0}^n \phi_i\right) = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che ogni monomio x^I compare con coefficiente non nullo in un numero finito di serie ϕ_n . Con “assolutamente convergente” si intende che il valore della serie non cambia a seguito di permutazioni degli indici e che il tutto si comporta bene rispetto alla somma ed al prodotto, ossia che se $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\psi_n) = +\infty$ allora

$$\sum \phi_n + \sum \psi_n = \sum (\phi_n + \psi_n), \quad (\sum \phi_n)(\sum \psi_n) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} \phi_i \psi_j \right).$$

□

Come prima applicazione del Lemma 1.5.2 mostriamo che una serie $\phi \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ è invertibile se e solo se $\phi(0)$ è invertibile in A . Infatti, se esiste $\psi \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ tale che $\phi\psi = 1$, a maggior ragione $\phi(0)\psi(0) = 1$. Viceversa, se esiste $a \in A$ tale che $a\phi(0) = 1$, allora si può scrivere $a\phi = 1 - \theta$ con $\nu(\theta) > 0$ e quindi

$$\frac{1}{\phi} = \frac{a}{a\phi} = \frac{a}{1 - \theta} = a \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i,$$

con la sommatoria a destra ben definita poiché $\nu(\theta^i) \geq i$ per ogni i .

TEOREMA 1.5.3 (delle contrazioni formali). *Sia $H: A[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]]$ un omomorfismo di gruppi abeliani² tale che $\nu(H(f)) > \nu(f)$ per ogni $f \neq 0$. Allora valgono le seguenti proposizioni:*

(1) *l'applicazione*

$$I - H: A[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]], \quad f \mapsto f - H(f),$$

è bigettiva.

(2) *per ogni $f \in A[[x_1, \dots, x_n]]$, l'applicazione*

$$H_f: A[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]], \quad H_f(g) = H(g + f),$$

ha un unico punto fisso.

Inoltre per ogni $f \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ si ha $(I - H)^{-1}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(f)$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'equivalenza delle due proposizioni. Vale (1) se e solo se per ogni f esiste unico x tale che $x - H(x) = f$; ponendo $g = x - f$ si deduce che vale (1) se e solo se per ogni f esiste unico g tale che $g + f - H(f + g) = f$, ossia $g = H(f + g)$, ossia se e solo se vale (2).

Per dimostrare (2), proviamo che la serie $g = \sum_{i=1}^{\infty} H^i(f)$, che è ben definita per le ipotesi su H , è l'unico punto fisso di H_f . Per l'unicità basta osservare che se $g = H(f + g)$ e $k = H(f + k)$, allora

$$g - k = H(f + g) - H(f + k) = H(g - k)$$

in contraddizione con l'ipotesi $\nu(H(g - k)) > \nu(g - k)$ qualora $g \neq k$. Inoltre

$$H_f(g) = H(f + g) = H(f) + H(g) = H(f) + H\left(\sum_{n=1}^{\infty} H^n(f)\right)$$

e per concludere che g è un punto fisso basta provare che $\nu(g - H(f + g)) \geq N$ per ogni $N > 0$. Sia $m > 0$ tale che $\nu(H^i(f)) \geq N$ per ogni $i > m$, allora

$$\nu\left(g - \sum_{i=1}^m H^i(f)\right) \geq N, \quad \nu\left(g - \sum_{i=1}^{m+1} H^i(f)\right) \geq N.$$

Dalla prima disuguaglianza segue che

$$\nu(H(f + g) - \sum_{i=1}^{m+1} H^i(f)) = \nu(H(g) - \sum_{i=2}^{m+1} H^i(f)) = \nu(H(g - \sum_{i=1}^m H^i(f))) > N,$$

e facendo la differenza con la seconda

$$\nu(g - H(f + g)) \geq \min\left(\nu\left(g - \sum_{i=1}^{m+1} H^i(f)\right), \nu\left(H(f + g) - \sum_{i=1}^{m+1} H^i(f)\right)\right) \geq N.$$

Per finire notiamo che i conti precedenti mostrano che $x = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(f)$ è l'unico elemento tale che $x - H(x) = f$. \square

OSSERVAZIONE 1.5.4. Una diversa dimostrazione del teorema delle contrazioni formali può essere fatta osservando che con la distanza $d(f, g) = 2^{-\nu(f-g)}$ l'anello delle serie formali diventa uno spazio metrico completo (esercizio!), e poi usare il teorema delle contrazioni usuale.

²Stiamo considerando solo la struttura additiva dell'anello $A[[x_1, \dots, x_n]]$.

OSSERVAZIONE 1.5.5. Il teorema delle contrazioni formali vale, con la stessa dimostrazione, se la molteplicità viene sostituita con un **peso**: fissiamo un vettore $w = (w_1, \dots, w_n)$, dove ogni coordinata w_i è un numero reale positivo e definiamo il peso di una serie formale come

$$w\left(\sum a_I x^I\right) = \min\{w \cdot I = w_1 i_1 + \dots + w_n i_n \mid a_I \neq 0\}.$$

Infatti, per ogni f, g continuano a valere le formule $w(f \pm g) \geq \min(w(f), w(g))$, $w(fg) \geq w(f) + w(g)$ e per ogni $R \in \mathbb{R}$ esistono al più finiti monomi di peso $\leq R$. È ovvio che la molteplicità corrisponde al peso quando $w = (1, 1, \dots, 1)$.

1.6. I teoremi di preparazione e di divisione di Weierstrass

DEFINIZIONE 1.6.1. Un campo normato è una coppia $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, dove \mathbb{K} è un campo e $|\cdot|: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione, detta norma, che soddisfa le seguenti proprietà:

- (1) $|a| \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{K}$;
- (2) $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$;
- (3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ (disuguaglianza triangolare);
- (4) $|ab| = |a||b|$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$.

Si noti che $|1| = |-1| = 1$ e che ogni campo normato ha una struttura di spazio metrico con distanza $d(a, b) = |a - b|$. Il campo normato $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ si dice completo se lo spazio metrico (\mathbb{K}, d) è completo.

ESEMPIO 1.6.2. Se \mathbb{K} è un sottocampo di \mathbb{C} , allora il valore assoluto usuale induce una norma su \mathbb{K} . Tale norma viene talvolta indicata con $|\cdot|_\infty$, rispetto alla quale gli unici sottocampi completi sono $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

ESEMPIO 1.6.3. Sia \mathbb{K} un campo qualsiasi, la funzione $|0| = 0$, $|a| = 1$ per ogni $a \neq 0$, è una norma che induce la topologia discreta.

ESEMPIO 1.6.4. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e sia p un numero primo. La norma p -adica $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce nel modo seguente: se $a = p^r \frac{b}{c}$ con $b, c, r \in \mathbb{Z}$ e b, c non divisibili per p , si pone $|a|_p = p^{-r}$. Non è arduo dimostrare che si tratta di una norma.

Se $r = (r_1, \dots, r_n)$ è un multiraggio, $0 < r_i < +\infty$, e $I = (i_1, \dots, i_n)$ un multiindice si pone $r^I = r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_n^{i_n}$.

Consideriamo adesso l'anello delle serie formali $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ a coefficienti in un campo normato $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ fissato: **non** si richiede che la norma sia completa.

DEFINIZIONE 1.6.5. Per ogni multiraggio r ed ogni serie formale $\phi = \sum a_I x^I \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_k]]$ denotiamo

$$\|\phi\|_r = \left\| \sum a_I x^I \right\|_r = \sum_I |a_I| r^I \in [0, +\infty],$$

$$B_r = \{\phi \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_k]] \mid \|\phi\|_r < \infty\}.$$

Una serie formale $\phi \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_k]]$ si dice **convergente** (rispetto alla norma $|\cdot|$) se esiste un multiraggio r tale che $\phi \in B_r$. Il sottoinsieme delle serie convergenti è denotato

$$\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_k\} = \cup_r B_r \subset \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_k]].$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $|\cdot|$ è la norma usuale, questa definizione coincide con la classica nozione di serie convergente. Rispetto alla norma dell'Esempio 1.6.3 ogni serie formale è convergente (prendere $r = (1/2, \dots, 1/2)$).

LEMMA 1.6.6. Sia r un multiraggio fissato. Allora per ogni $\phi, \psi \in B_r$ vale:

- (1) $\|\phi + \psi\|_r \leq \|\phi\|_r + \|\psi\|_r$;
- (2) $\|\phi\psi\|_r \leq \|\phi\|_r \|\psi\|_r$;
- (3) se ϕ ha molteplicità k , per ogni $0 < t \leq 1$ si ha

$$\|\phi\|_{tr} \leq t^k \|\phi\|_r, \quad \text{dove } t(r_1, \dots, r_n) = (tr_1, \dots, tr_n).$$

In particolare gli insiemi $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ e B_r sono sottoanelli di $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$.

DIMOSTRAZIONE. 1) è immediata conseguenza della disuguaglianza triangolare $|a + b| \leq |a| + |b|$. Per lo stesso motivo, se ϕ_n è una successione di serie formali tali che $\nu(\phi_n) \rightarrow \infty$, allora vale la disuguaglianza

$$\left\| \sum_n \phi_n \right\|_r \leq \sum_n \|\phi_n\|_r.$$

2) Se ψ è un monomio segue immediatamente dall'uguaglianza $|ab| = |a||b|$ che $\|\phi\psi\|_r = \|\phi\|_r \|\psi\|_r$ e quindi se ψ è un polinomio il punto 2) segue immediatamente da 1). Dunque se $\psi = \sum_k \psi_k$, con ψ_k polinomio omogeneo di grado k si ha $\nu(\phi\psi_k) \rightarrow \infty$, $\phi\psi = \sum_k \phi\psi_k$ e quindi

$$\|\phi\psi\|_r \leq \sum_k \|\phi\psi_k\|_r \leq \sum_k \|\phi\|_r \|\psi_k\|_r = \|\phi\|_r \sum_k \|\psi_k\|_r = \|\phi\|_r \|\psi\|_r.$$

Per la 3) scriviamo ϕ come somma di polinomi omogenei ϕ_i di grado i : $\phi = \sum_{i=k}^{\infty} \phi_i$. È chiaro che $\|\phi_i\|_{tr} = t^i \|\phi_i\|_r$ e quindi, siccome $t \leq 1$ vale

$$\|\phi\|_{tr} = \sum_{i=k}^{\infty} \|\phi_i\|_{tr} = \sum_{i=k}^{\infty} t^i \|\phi_i\|_r \leq t^k \sum_{i=k}^{\infty} \|\phi_i\|_r = t^k \|\phi\|_r.$$

□

Nelle prossime pagine studieremo serie di potenze in cui una indeterminata gioca un ruolo privilegiato rispetto alle altre: per esaltare tale differenza indicheremo con t l'indeterminata "nobile" e con x_1, \dots, x_n le indeterminate "plebaglia".

Dato di partenza: Sia

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(x) t^i \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]]$$

una serie fissata e si assuma che esista un intero $N \geq 0$ tale che $\phi_i(0) = 0$ per ogni $i < N$ e $\phi_N(0) = 1$. Equivalentemente

$$\phi(0, \dots, 0, t) = t^N + a_{N+1} t^{N+1} + a_{N+2} t^{N+2} + \dots$$

Si considerino le applicazioni (dipendenti da ϕ)

$$L: \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]] \rightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]], \quad L(\sum_{i \geq 0} f_i(x) t^i) = \sum_{i \geq N} f_i(x) t^{i-N}$$

$$V: \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]] \rightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]], \quad V(f) = L(\phi f).$$

LEMMA 1.6.7. *Nelle notazioni precedenti, se $\phi \in B_r$ per un multiraggio r , allora $V(B_r) \subset B_r$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $r = (p, q) = (p_1, \dots, p_n, q)$ e $f = \sum f_i(x) t^i$ si ha

$$\|f\|_r = \left\| \sum_i f_i(x) t^i \right\|_r = \sum_{i \geq 0} \|f_i\|_p q^i,$$

e quindi

$$\|L(f)\|_r = \left\| \sum_{i \geq N} f_i(x) t^{i-N} \right\|_r = \sum_{i \geq N} \|f_i\|_p q^{i-N} \leq \frac{\|f\|_r}{q^N},$$

$$\|V(f)\|_r = \|L(\phi f)\|_r \leq \frac{1}{q^N} \|\phi f\|_r \leq \frac{\|\phi\|_r}{q^N} \|f\|_r.$$

□

Dati due multiraggi $r = (r_1, \dots, r_n)$ e $R = (R_1, \dots, R_n)$, scriveremo $R \leq r$ (risp.: $R < r$) se vale $R_i \leq r_i$ (risp.: $R_i < r_i$) per ogni i . È evidente che se $R \leq r$ allora $\|f\|_R \leq \|f\|_r$ per ogni f .

LEMMA 1.6.8. *Nelle notazioni precedenti, se $\phi \in B_r$, allora esiste un multiraggio $R \leq r$ tale che $V: B_R \rightarrow B_R$ è bigettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Raggruppiamo la plebaglia $x = (x_1, \dots, x_n)$ e scriviamo la serie ϕ nella forma

$$\phi = t^N + t^N e(x, t) + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) t^{N-i}, \quad \phi_i(x) \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]],$$

con $e(0, 0) = \phi_i(0) = 0$ e dimostriamo preliminarmente che

$$V: \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]] \rightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n, t]]$$

è bigettiva.

Come nel Teorema 1.5.3, ponendo $H = \text{Id} - V$, basta dimostrare che con il peso

$$w = (N + 1, N + 1, \dots, N + 1, 1),$$

per ogni serie formale f si ha $w(H(f)) > w(f)$: si noti che vale

$$w\left(\sum f_i(x) t^i\right) = \min_i (i + (N + 1)\nu(f_i)),$$

ed abbiamo già osservato che $w(fg) = w(f) + w(g)$, $w(f + g) \geq \min(w(f), w(g))$. Si ha

$$H(g) = g - V(g) = g - L(\phi g) = -eg - \sum_{i=1}^N L(\phi_i t^{N-i} g) :$$

(1) siccome $e(0) = 0$ si ha $w(eg) \geq w(e) + 1$;

(2) se $g = \sum_h g_h(x) t^h$ si ha $L(t^{N-i} g) = \sum_{h \geq i} g_h(x) t^{h-i}$ da cui $w(L(t^{N-i} g)) \geq w(g) - i$ e siccome $\nu(\phi_i) > 0$ si ha

$$w(L(\phi_i t^{N-i} g)) \geq N + 1 - i + w(g) \geq w(g) + 1.$$

In conclusione

$$w(H(g)) = w\left(-eg - \sum_{i=1}^N L(\phi_i t^{N-i} g)\right) \geq \min_i (w(eg), w(L(\phi_i t^{N-i} g))) \geq w(g) + 1.$$

Dunque V è bigettiva a livello di serie formali. Dimostriamo adesso che esiste un multiraggio $R \leq r$ tale che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} H^k(g)$ ha senso in B_R , ad esempio mostrando che per ogni $g \in B_R$ vale $\|H(g)\|_R \leq \|g\|_R/2$.

Sia $\varepsilon = \frac{1}{2(N+1)}$, siccome e ha molteplicità positiva si ha $\|e\|_{tr} \leq t\|e\|_r$ per ogni $0 < t \leq 1$; a meno di moltiplicare r per un numero reale $0 < \alpha \leq 1$ si può supporre $\|e\|_r < \varepsilon$. Sia $r = (p, q) = (p_1, \dots, p_n, q)$ il nuovo r ; adesso ci teniamo fisso q e rimpiccioliamo i p_i secondo necessità. Anche le serie ϕ_i hanno molteplicità positiva, per ogni $0 < t < 1$ si ha

$$\|\phi_i\|_{tp} \leq t\|\phi_i\|_p$$

e quindi a meno di rimpicciolire p si può supporre $\|\phi_i\|_p \leq \varepsilon q^i$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Siccome $\|L(t^{N-i} g)\|_r \leq q^{-i} \|g\|_r$ si ha

$$\|H(g)\|_r = \|g - V(g)\|_r = \|L(\phi g) - g\|_r \leq \|eg\|_r + \sum_{i=1}^N \|\phi_i\|_p \|L(t^{N-i} g)\|_r \leq (N+1)\varepsilon \|g\|_r = \frac{1}{2} \|g\|_r.$$

□

Da ora in poi supponiamo che la serie ϕ del dato di partenza sia convergente, ossia $\phi \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n, t\}$.

TEOREMA 1.6.9 (di divisione). *Siano ϕ ed N come sopra. Allora, per ogni serie convergente $f \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ esistono unici $g \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ e $r \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}[t]$ di grado $< N$ in t tali che*

$$f = \phi g + r.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di serie convergente esiste un multiraggio R tale che $f, \phi \in B_R$ e per il lemma precedente, a meno di restringere in modo opportuno R , esiste g convergente tale che $L(f) = V(g) = L(\phi g)$. Quindi $r = f - \phi g$ ha grado $< N$ in t . Viceversa se $f = \phi g + r$, allora $L(f) = L(\phi g)$ e g è unica per l'iniettività di V . □

Nota: il teorema di divisione è generalmente noto come il teorema di divisione di Weierstrass, nonostante il primo a dimostrarlo sia stato Stickelberger nel 1887.

TEOREMA 1.6.10 (di preparazione di Weierstrass). *Siano ϕ, N come sopra, allora esiste unica $e \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ invertibile tale che*

$$\phi e = t^N + \sum_{i=1}^N \psi_i(x) t^{N-i}, \quad \psi_i(0) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di divisione esiste unica una serie di potenze convergente e tale che $t^N = e\phi + r$ con r polinomio in t di grado $< N$, basta quindi dimostrare che $e(0) \neq 0$, $r(0, t) = 0$. Siccome $\phi(0, t) = t^N + \text{roba di ordine superiore}$ si ha $e(0, t)\phi(0, t) = e(0)t^N + \sum_{i>N} a_i t^i$ e quindi necessariamente $e(0) = 1$ e $\psi_i(0) = 0$ per ogni i . \square

1.7. Germi e loro fattorizzazione unica

Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $x \in U$. L'anello dei **germi di funzioni oloomorfe** in x è definito come il quoziente

$$\mathcal{O}_{U,x} = \frac{\{(V, f) \mid x \in V \text{ aperto}, f \in \mathcal{O}(V)\}}{\sim},$$

dove

$$(V, f) \sim (W, g) \iff \exists H \text{ aperto tale che } 0 \in H \subset W \cap V \text{ e } f|_H = g|_H.$$

Lasciamo al lettore la semplice verifica che \sim è una relazione di equivalenza e che le operazioni

$$(V, f) + (W, g) = (U \cap W, f + g), \quad (V, f)(W, g) = (U \cap W, fg)$$

inducono al quoziente una struttura di anello commutativo con unità. Tale struttura è univocamente determinata dal fatto che per ogni aperto $V \subset U$ l'applicazione naturale

$$\mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}, \quad f \mapsto f_x := (V, f) \pmod{\sim},$$

è un omomorfismo di anelli (iniettivo se V è connesso per il principio di identità); chiameremo l'elemento $f_x \in \mathcal{O}_{U,x}$ il germe di f nel punto x .

È chiaro che $\mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ per ogni $x \in U \subset \mathbb{C}^n$ e considerando la composizione di funzioni oloomorfe con traslazioni di \mathbb{C}^n , si ottengono degli isomorfismi di anelli $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Possiamo interpretare lo sviluppo di Taylor nell'origine (di Maclaurin per i puristi) come un omomorfismo iniettivo di anelli

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \longrightarrow \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]],$$

la cui immagine è il sottoanello $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ delle serie convergenti (rispetto alla norma Euclidea su \mathbb{C}). Infatti se una serie formale $\sum a_I z^I$ è lo sviluppo di Taylor di una funzione oloomorfa f definita in U aperto, e r è un poliraggio tale che $\overline{\Delta}(0, r) \subset U$, dalla formula di Cauchy segue $\sum |a_I| R^I < \infty$ per ogni $R < r$ e quindi $\sum a_I z^I \in B_R \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Viceversa, se $\sum a_I z^I \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, per definizione esiste un poliraggio R tale che $\sum a_I z^I \in B_R$; dalla completezza di \mathbb{C} rispetto alla norma, segue che $\sum a_I z^I$ è totalmente convergente sui compatti del polidisco $\Delta(0, R)$ e definisce quindi una funzione f che è oloomorfa per definizione.

In definitiva, per ogni $n > 0$ si ha un isomorfismo naturale

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

Abbiamo già osservato che la valutazione in $z_1 = \dots = z_n = 0$ dà un omomorfismo surgettivo di anelli

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(0),$$

il cui nucleo

$$\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \mid f(0) = 0\}$$

è un ideale massimale (perché \mathbb{C} è un campo).

LEMMA 1.7.1. *Nelle notazioni precedenti, \mathfrak{m} è l'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta vedere che \mathfrak{m} contiene ogni ideale proprio, o equivalentemente che ogni $f \notin \mathfrak{m}$ è invertibile. Ma se f è definita in un aperto U , e $f(0) \neq 0$, a meno di restringere U possiamo supporre $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$ e quindi l'inverso $1/f$ è ben definito ed oloomorfo. \square

DEFINIZIONE 1.7.2. Un anello che possiede un unico ideale massimale si dice un **anello locale**.

Quindi $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è un dominio locale: dominio è l'abbreviazione di dominio di integrità (è un sottoanello del dominio delle serie formali). Veniamo adesso con questa mia a dirvi il teorema più importante della presente sezione:

TEOREMA 1.7.3. *Gli anelli $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, $n \geq 0$, sono domini a fattorizzazione unica.*

Prima di fare la dimostrazione è utile richiamare, dai corsi di algebra, alcuni concetti base riguardanti il concetto di fattorizzazione unica su anelli commutativi più generali di \mathbb{Z} e $\mathbb{K}[t]$: per maggiori dettagli e dimostrazioni si può consultare ad esempio [2, Capitolo 11].

Nel seguito tutti gli anelli sono intesi commutativi e con unità e la scrittura $a|b$ significa che a divide b .

- (1) Un elemento $a \neq 0$ in un anello si dice:
 - (a) **irriducibile** se non è invertibile e se $a = bc$ implica che uno tra b e c è invertibile.
 - (b) **primo** se non è invertibile e se $a|bc$ implica che $a|b$ oppure $a|c$.
 In un dominio di integrità ogni primo è irriducibile, ma il viceversa è generalmente falso, vedi Esercizio 1.7.7.
- (2) un insieme a_1, \dots, a_n di elementi in un anello A si dice **senza fattori comuni** se ogni divisore comune è invertibile, e cioè $b \in A$ divide a_1, \dots, a_n solo se b è invertibile. Un polinomio in $A[t]$ si dice **primitivo** se è diverso da 0 e se i suoi coefficienti non hanno fattori comuni.
- (3) Un dominio di integrità si dice a **fattorizzazione unica** se:
 - (a) ogni elemento non nullo e non invertibile è un prodotto finito di irriducibili;
 - (b) ogni irriducibile è primo.

Grossolanamente, (a) equivale all'esistenza della fattorizzazione come prodotto di irriducibili e (b) all'unicità, intesa come al solito a meno dell'ordine e di moltiplicazione per invertibili.

- (4) Per ogni campo \mathbb{K} , l'anello $\mathbb{K}[t]$ è un dominio a fattorizzazione unica. (L'esistenza della fattorizzazione è ovvia conseguenza del fatto che il grado del prodotto è uguale alla somma dei gradi, mentre dimostrare che ogni irriducibile è primo richiede l'algoritmo di divisione Euclidea).
- (5) (Lemma di Gauss). Siano A un dominio a fattorizzazione unica e \mathbb{K} il suo campo delle frazioni. Se $p(t), q(t) \in A[t]$ con $p(t)$ primitivo e $p(t)$ divide $q(t)$ in $\mathbb{K}[t]$, allora $p(t)$ divide $q(t)$ in $A[t]$.
- (6) Segue facilmente dal lemma di Gauss che se A è un dominio a fattorizzazione unica allora anche $A[t]$ lo è. Inoltre, due polinomi $p, q \in A[t]$ hanno un fattore comune di grado positivo in t nell'anello $A[t]$ se e solo se lo stesso vale in $\mathbb{K}[t]$.

ESEMPIO 1.7.4. Il germe nell'origine della funzione olomorfa in due variabili $f(x, y) = x^2 - y^3$ è irriducibile. Infatti, se fosse $f = gh$, con $g(0) = h(0) = 0$, guardando le componenti omogenee di grado più basso si deve avere $g = ax + \tilde{g}$, $h = a^{-1}x + \tilde{h}$, con $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ e \tilde{g}, \tilde{h} non nulle e di molteplicità > 1 in 0. A meno di moltiplicare g, h per delle costanti possiamo supporre $a = 1$ e quindi $x^2 - y^3 = x^2 + x(\tilde{g} + \tilde{h}) + \tilde{g}\tilde{h}$. Ma questo è assurdo perché il termine y^3 può comparire solo nel prodotto $\tilde{g}\tilde{h}$ che però ha molteplicità ≥ 4 .

ESERCIZIO 1.7.5. Dimostrare che il germe nell'origine della funzione olomorfa in due variabili $f(x, y) = x^2 - y^k$ è irriducibile se e solo se k è dispari.

ESERCIZIO 1.7.6. Dimostrare che la definizione di dominio a fattorizzazione unica data al precedente punto (3) coincide con quella più tradizionale in cui il punto (b) è sostituito con l'unicità della fattorizzazione, ossia:

- (b') se $f_1 \cdots f_n = g_1 \cdots g_m$ con gli f_i e g_j irriducibili, allora $n = m$ ed a meno di permutazioni degli indici si ha che per ogni i gli elementi f_i e g_i differiscono per moltiplicazione con un invertibile.

ESERCIZIO 1.7.7. Dimostrare che, per ogni intero dispari $\delta \geq 5$, nel sottoanello $\mathbb{Z}[i\sqrt{\delta}] \subset \mathbb{C}$ formato dai numeri complessi del tipo $a + ib\sqrt{\delta}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, il numero 2 è irriducibile ma

non è primo. (Lo stesso vale anche per $\delta = 3$ ma la dimostrazione è più difficile. È invece noto dai corsi di algebra che l'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss è un dominio a fattorizzazione unica, ed infatti $2 = (1+i)(1-i)$ non è irriducibile.)

ESERCIZIO 1.7.8. Sia $A = \mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$ il sottoanello dei polinomi con il coefficiente di t nullo. Provare che A non è un dominio a fattorizzazione unica.

ESERCIZIO 1.7.9. Si consideri il sottoanello $A \subset \mathbb{C}[t] \times \mathbb{C}[t]$ formato dalle coppie $(p(t), q(t))$ tali che $p(0) = q(0)$. Provare che $(t, 0)$ è primo ma non irriducibile in A .

In geometria, la fattorizzazione unica è tanto utile quanto rara: la prossima definizione descrive una proprietà meno rara (vedi e.g. Teorema 1.8.14) e tuttavia dotata di una certa utilità, sebbene inferiore alla fattorizzazione unica.

DEFINIZIONE 1.7.10. Un dominio di integrità A con campo delle frazioni \mathbb{K} si dice **integralmente chiuso** se nessun elemento in $\mathbb{K} - A$ è radice di un polinomio monico a coefficienti in A .

In altri termini A è integralmente chiuso se ogniqualvolta $p(\alpha) = 0$ con $p \in A[t]$ polinomio monico e $\alpha = a/b \in \mathbb{K}$ si ha $\alpha \in A$.

Ogni dominio a fattorizzazione unica A è integralmente chiuso: siano infatti $p(t) = t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_d \in A[t]$ un polinomio monico e $x = a/b$ una frazione tali che $p(x) = 0$. Non è restrittivo prendere a/b in forma ridotta, ossia con a, b senza fattori comuni, in tal caso dalla relazione

$$0 = b^d p(x) = a^d + b \left(\sum \dots \right) = 0$$

segue che b divide a^d e questo è possibile solo se b è invertibile e quindi $x \in A$.

ESERCIZIO 1.7.11. Sia $A \subset \mathbb{C}[x, y]$ il sottoanello dei polinomi $p(x, y)$ tali che $p(x, y) = p(-x, -y)$, e cioè con tutti i monomi di grado pari. Dimostrare che A è un dominio integralmente chiuso che non è a fattorizzazione unica.

La dimostrazione del Teorema 1.7.3 si fa per induzione su n , sebbene per $n = 1$ si può dimostrare un risultato più forte.

PROPOSIZIONE 1.7.12. Ogni ideale non nullo di $\mathbb{C}\{t\}$ è del tipo (t^s) . In particolare $\mathbb{C}\{t\}$ è un dominio ad ideali principali.

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \neq I \subset \mathbb{C}\{t\}$ un ideale e sia $f \in I$ di molteplicità minima $\nu(f) = m$. Siccome t^m divide ogni $g \in I$ basta dimostrare che $t^m \in I$. Si può scrivere $f = t^m \phi$ con $\phi(0) \neq 0$; dato che ϕ è invertibile vale $t^m = f \phi^{-1} \in I$. \square

Sia $n \geq 0$ fissato e supponiamo per induzione di aver già dimostrato che $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è un dominio a fattorizzazione unica. Per semplicità notazionale scriviamo:

$$A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}, \quad A[t] = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[t], \quad B = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\}.$$

DEFINIZIONE 1.7.13. Un elemento $f = \sum_{i=0}^n f_i(z)t^i \in A[t]$ si dice un **polinomio di Weierstrass** di grado n se $f_n = 1$ e $f_i(0) = 0$ per ogni $i < n$.

Ad esempio sono polinomi di Weierstrass

$$zt + t^2, \quad z^3 + t^2, \quad t^3 + zt + z^3 \in \mathbb{C}\{z\}[t],$$

mentre non sono polinomi di Weierstrass $t + t^2$, $t^3 + zt^4$ eccetera.

Con tale terminologia possiamo rinunciare il teorema di preparazione di Weierstrass 1.6.10:

TEOREMA 1.7.14 (di preparazione di Weierstrass). Nelle notazioni precedenti, se $\phi \in B$ e la serie $\phi(0, t)$ è non nulla di molteplicità $N < \infty$, allora esiste unico $e \in B$ tale che $e(0) \neq 0$ ed il prodotto $e\phi \in A[t]$ è un polinomio di Weierstrass di grado N .

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che a meno di moltiplicazione per un numero complesso diverso da 0 la serie ϕ soddisfa le ipotesi del Teorema 1.6.10. \square

LEMMA 1.7.15. Nelle notazioni precedenti, siano $f, g \in A[t]$ con f polinomio di Weierstrass. Se f divide g in B , allora lo divide anche in $A[t]$. In particolare f è invertibile in $A[t]$ se e solo se è invertibile in B .

Si noti che se f non è di Weierstrass il risultato è falso, si consideri ad esempio il caso $n = 0, g = t^3$ e $f = t + t^2$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi

$$f = t^N + \sum_{i=1}^N f_i(z)t^{N-i}, \quad f_i(0) = 0 \quad \forall i, \quad g = \sum_{i=0}^M g_i(z)t^i;$$

ed esiste $h = \sum_{i \geq 0} h_i(z)t^i$ tale che $g = fh$.

Supponiamo, per assurdo, che sia $h_i \neq 0$ per qualche $i > M - N$. Sia $j > M - N$ per cui h_j abbia molteplicità minima, ossia tale che $\nu(h_j) \leq \nu(h_i)$ per ogni $i > M - N$ (ricordiamo che per definizione $\nu(0) = +\infty$).

Così, dall'espressione di g , si ricava $0 = g_{N+j} = h_j + \sum_{i=1}^N f_i h_{j+i}$. Osservando che $\nu(h_j) < \nu(f_i h_{j+i})$ per ogni $i = 1, \dots, N$, per come è stato scelto j , si perviene all'assurdo

$$\nu(h_j) = \nu\left(-\sum f_i h_{j+i}\right) \geq \min_i \nu(f_i h_{j+i}) > \min_i \nu(h_{j+i}) \geq \nu(h_j).$$

Ponendo $g = 1$ si ottiene la parte sull'invertibilità. □

LEMMA 1.7.16. *Nelle notazioni precedenti, sia $f \in A[t]$ polinomio di Weierstrass. Allora f è irriducibile in $A[t]$ se e solo se f è irriducibile in B .*

DIMOSTRAZIONE. Già dimostrato che f è invertibile in $A[t]$ se e solo se è invertibile in B . Supponiamo f irriducibile in $A[t]$ e $f = f_1 f_2$, con $f_1, f_2 \in B$; vogliamo dimostrare che almeno uno degli f_i è invertibile.

Se N è il grado di f come polinomio di Weierstrass, si ha $f_1(0, t)f_2(0, t) = t^N$. Dunque le serie $f_i(0, t)$ non sono identicamente nulle; per il Teorema di preparazione di Weierstrass si ha $f_1 = e_1 g_1, f_2 = e_2 g_2$, dove gli e_i sono invertibili e g_1, g_2 sono polinomi di Weierstrass. Quindi $f = e_1 e_2 g_1 g_2$ e dall'unicità segue $f = g_1 g_2, 1 = e_1 e_2$. Dal momento che f è irriducibile in $A[t]$, almeno uno dei g_i è invertibile in A . Quindi g_i è un polinomio di Weierstrass invertibile, e da ciò si ricava che f_i è invertibile in B .

Viceversa, se f è irriducibile in B e $f = f_1 f_2$, con $f_i \in A[t]$. Siano d_1, d_2 i gradi di f_1 ed f_2 come polinomi nella variabile t , allora $d_1 + d_2 = N$ è il grado di f in t .

Dal momento che f è irriducibile in B , uno degli f_i è invertibile in B , ad esempio f_1 , e così $f_1(0, 0) \neq 0$. Essendo f un polinomio di Weierstrass, si ha $f(0, t) = t^N = f_1(0, t)f_2(0, t)$ e quindi $f_1(0, t) = at^s, f_2(0, t) = a^{-1}t^{N-s}$ e siccome $s \leq d_1, N - s \leq d_2$ ne consegue $s = d_1$. D'altra parte $f_1(0, 0) \neq 0$ e così deve essere $s = 0$. Pertanto f_1 ha grado 0 in t ed essendo $f_1(0) \neq 0$ è invertibile in $A[t]$. □

TEOREMA 1.7.17. *Per ogni $n \geq 0$ l'anello $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è un dominio a fattorizzazione unica.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su n .

Per $n = 0$ otteniamo un campo, per $n = 1$ un dominio ad ideali principali: in entrambi i casi l'enunciato è dimostrato.

Supponiamolo ora vero per $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ e dimostriamolo per $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, z_{n+1}\}$. Sia $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ non invertibile di molteplicità $\nu(f) = m > 0$. Decomponiamo f nella somma delle sue componenti omogenee $f = f_m + f_{m+1} + \dots$, con f_m non identicamente nulla; siano $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ che non annullano il polinomio $z_{n+1} f_m$, che vuol dire $a_{n+1} \neq 0$ e $f_m(a_1, \dots, a_{n+1}) \neq 0$. A meno del cambio lineare di coordinate

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, z_{n+1}\} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\}, \\ z_{n+1} &\mapsto a_{n+1}t, \quad z_i \mapsto z_i + a_i t, \quad a_i \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

possiamo supporre $f_m(0, \dots, 0, 1) \neq 0$ ed a meno di moltiplicare f per una costante possiamo supporre $f_m(0, \dots, 0, 1) = 1$. Notiamo che i cambi lineari di coordinate inducono isomorfismi dell'anello dei germi e quindi non influiscono su esistenza ed unicità delle decomposizioni irriducibili.

Pertanto vale $f(0, \dots, 0, t) = t^m + \sum_{i > m} b_i t^i$ e per il teorema di preparazione di Weierstrass vale $f = eg$, con e invertibile e g polinomio di Weierstrass di grado m in t . Ponendo come sopra $A[t] = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[t]$ si ha $g \in A[t]$ e per l'ipotesi induttiva $A[t]$ è un dominio

a fattorizzazione unica e g si decompone in maniera unica in fattori irriducibili $g = g_1 \cdots g_d$, con $g_i(0, t) = t^{s_i}$ a meno di moltiplicazione per una costante. Così ogni g_i è di Weierstrass e quindi, per il Lemma 1.7.16 g_i è anche irriducibile in B e pertanto $f = e g_1 \cdots g_d$ è una decomposizione in irriducibili in $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Dimostriamo ora l'unicità di una tale decomposizione. Sia $f = f_1 \cdots f_r$ un'altra decomposizione di f in irriducibili. Di nuovo, $f_i(0, t) \mid f(0, t)$, ed applicando il teorema di preparazione di Weierstrass alle f_i si ha $f_i = e_i h_i$; pertanto $f = e_1 \cdots e_r h_1 \cdots h_r$. Essendo le e_i invertibili si ha $g_i \mid h_1 \cdots h_r$. Per il primo dei due lemmi introduttivi $g_i \mid h_1 \cdots h_r$ anche in $A[t]$. Dato che A è a fattorizzazione unica, g_i è primo in $A[t]$ e quindi esiste j tale che $g_i \mid h_j$, da cui $h_j = g_i e_{ij}$, con e_{ij} invertibile. Ciò dà l'unicità della decomposizione. \square

OSSERVAZIONE 1.7.18. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto connesso e non vuoto, il dominio di integrità $\mathcal{O}(U)$ **non è mai** a fattorizzazione unica. Sia infatti $V = \pi(U) \subset \mathbb{C}$ l'immagine di U mediante la proiezione $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sulla prima coordinata, allora V è aperto connesso ed esiste una funzione olomorfa $g \in \mathcal{O}(V)$ non nulla che si annulla in una successione di infiniti punti distinti p_1, p_2, \dots : infatti, siccome \mathbb{C} è connesso si ha $V = \mathbb{C}$ oppure esiste un punto $p \in \bar{V} - V$; nel primo caso possiamo prendere $g(z) = e^{2\pi iz} - 1$ che si annulla sugli interi; nel secondo caso scegliamo una successione $p_i \in V$ di punti distinti tali che $|p_i - p| < 2^{-i}$ per ogni i e consideriamo il prodotto infinito:

$$g(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{z - p_i}{z - p} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p - p_i}{z - p} \right) \in \mathcal{O}(V).$$

Consideriamo adesso $f = g \circ \pi \in \mathcal{O}(U)$ e supponiamo per assurdo che $f = f_1 \cdots f_r$ sia una decomposizione in fattori irriducibili. Per ogni indice i , siccome $z - p_i$ divide g per ogni i , ne segue che $z_1 - p_i$ divide f quindi esiste un fattore f_j che divide $z_1 - p_i$. Per il principio dei cassetti esiste un fattore irriducibile f_h che divide $z_1 - p_i, z_1 - p_j$ con $p_i \neq p_j$. Ma allora f_h divide $p_i - p_j$ e quindi sarebbe invertibile.

In un dominio a fattorizzazione unica ha senso parlare di Massimo Comune Divisore (MCD) di un insieme finito di elementi non nulli, che risulta definito a meno di invertibili. Per indicare che due elementi a, b sono senza fattori comuni si scrive $MCD(a, b) = 1$.

TEOREMA 1.7.19. *Siano $f, g \in \mathcal{O}(U)$ due funzioni olomorfe in un aperto $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Per ogni $x \in U$ denotiamo con $f_x, g_x \in \mathcal{O}_{U,x}$ i germi di f e g nel punto x , ossia gli sviluppi di Taylor di f e g nel punto x . Se $f_x, g_x \neq 0$ per ogni x , allora l'insieme*

$$V = \{x \in U \mid MCD(f_x, g_x) = 1 \text{ in } \mathcal{O}_{U,x}\}$$

è aperto.

DIMOSTRAZIONE. Agendo con traslazioni q.b., basta provare che se $0 \in V$, allora V è un intorno di 0. A meno di cambi lineari di coordinate, possiamo supporre che le serie $f(0, \dots, 0, t), g(0, \dots, 0, t)$ non siano identicamente nulle. A meno di restringere U e moltiplicare f, g per delle funzioni invertibili possiamo supporre f, g polinomi di Weierstrass, ed in particolare monici:

$$f(z, t), g(z, t) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[t] = A[t].$$

Abbiamo visto che in tale situazione, ogni fattore comune di f, g in $A[t]$ è anche fattore comune in $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\}$; per ipotesi f, g non hanno fattori comuni e per il lemma di Gauss lo stesso vale nell'anello ad ideali principali $\mathbb{K}[t]$, dove \mathbb{K} campo delle frazioni di A . Dunque esistono $p, q \in \mathbb{K}[t]$ tali che $pf + qg = \alpha, \alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$: a meno di moltiplicare p, q per un denominatore comune dei coefficienti non è restrittivo assumere che valga:

$$pf + qg = \alpha, \quad p, q \in A[t], \quad \alpha \in A - \{0\}.$$

A meno di restringere U se necessario, possiamo supporre che p, q definiscano funzioni olomorfe su U . Dunque per ogni $y \in U$ sui ha una uguaglianza di germi

$$p_y f_y + q_y g_y = \alpha_y$$

Sia $y = (a, t_0) \in U$, siccome f_y, g_y sono polinomi monici in $t - t_0$ (a coefficienti funzioni olomorfe in z_1, \dots, z_n) se $h \in \mathcal{O}_{U,y}$ è un fattore comune non invertibile, la serie $h(a, t - t_0)$ non è identicamente nulla. A meno di moltiplicare per un invertibile possiamo supporre h

polinomio di Weierstrass di grado positivo, ma in tal caso non può dividere α_y che ha grado 0 in t . \square

ESEMPIO 1.7.20. Il Teorema 1.7.19 potrebbe far pensare erroneamente che per ogni funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$, l'insieme dei punti $p \in U$ dove il germe di f è invertibile oppure irriducibile è un aperto. Si consideri ad esempio il polinomio in tre variabili $f(x, y, z) = x^2 - y^3 - zy^2$ e mostriamo che è irriducibile in $(0, 0, 0)$ e che non è irriducibile in $(0, 0, a)$ per ogni $a \neq 0$.

Se fosse $f = gh$ con $g(0) = h(0) = 0$, a maggior ragione si avrebbe

$$x^2 - y^3 = f(x, y, 0) = g(x, y, 0)h(x, y, 0)$$

in contraddizione con l'irriducibilità di $x^2 - y^3$.

Viceversa, se $a \neq 0$, allora la funzione $z + y$ possiede una radice quadrata in un intorno di $(0, 0, a)$, ed esiste una fattorizzazione

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2(z + y) = (x + y\sqrt{z + y})(x - y\sqrt{z + y}).$$

Terminiamo la sezione con una curiosa applicazione del teorema di preparazione di Weierstrass di cui avremo bisogno nei prossimi capitoli.

LEMMA 1.7.21. Siano $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ e $1 \leq m < n$ che soddisfano la seguente proprietà:

$$(1.3) \quad f \text{ divide } \frac{\partial f}{\partial z_i} \text{ in } \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \quad \forall i = m + 1, \dots, n.$$

Allora esiste $e \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ invertibile tale che $ef \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che ipotesi e tesi sono preservate se moltiplichiamo f per un invertibile. Infatti se f divide $\partial f / \partial z_i$ ed e è invertibile, allora anche ef divide $\partial ef / \partial z_i$. Per induzione basta allora dimostrare il lemma nel caso $m = n - 1$ e quindi che esiste un invertibile e tale che $ef \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$.

Se $f(0) \neq 0$ basta prendere $e = 1/f$, mentre se $f(0) = 0$ scriviamo lo sviluppo di Taylor di f nella forma

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^i, \quad f_0(0) = 0.$$

Se $f_i = 0$ per ogni $i > 0$ non c'è nulla da dimostrare; supponiamo quindi $f(0) = 0$ e $f_i \neq 0$ per qualche $i > 0$. Se fosse $f_0 = 0$ allora la derivata $\partial f / \partial z_n$ avrebbe molteplicità strettamente minore della molteplicità di f e questo è contrario alle ipotesi.

Rimane da considerare il caso $f_0 \neq 0$ e $f(0) = 0$. Ciò è possibile solo se $n > 1$ ed a meno di cambi lineari delle coordinate z_1, \dots, z_{n-1} si può supporre che la serie $f(z_1, 0, \dots, 0) = f_0(z_1, 0, \dots, 0)$ sia non banale. Per il teorema di preparazione di Weierstrass esiste un invertibile $e \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ tale che $ef \in \mathbb{C}\{z_2, \dots, z_n\}[z_1]$ è un polinomio di Weierstrass di grado positivo in z_1 . Siccome ef divide la derivata $\partial ef / \partial z_n$ in $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, per il Lemma 1.7.15 ef divide la derivata $\partial ef / \partial z_n$ anche in $\mathbb{C}\{z_2, \dots, z_n\}[z_1]$ e questo è assurdo perché ef è un polinomio monico e dunque il grado di $\partial ef / \partial z_n$ nella variabile z_1 è strettamente minore di quello di ef . \square

1.8. Chiusi analitici e funzioni meromorfe

Si consideri un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ e sia $\mathcal{O}(U)$ l'anello delle funzioni olomorfe su U . Per ogni sottoinsieme $E \subset \mathcal{O}(U)$, si definisce il luogo degli zeri di E come:

$$V(E) = \{z \in U \mid f(z) = 0, \quad \forall f \in E\}.$$

OSSERVAZIONE 1.8.1. Dalla definizione segue che $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f) = \bigcap_{f \in E} f^{-1}(0)$. Più in generale $V(\cup E_i) = \bigcap V(E_i)$ per ogni famiglia di sottoinsiemi $E_i \subset \mathcal{O}(U)$. D'altra parte, se per $E, F \subset \mathcal{O}(U)$ definiamo

$$E \cdot F = \{f \cdot g \mid f \in E, g \in F\} \subset \mathcal{O}(U),$$

Allora

$$V(E \cdot F) = V(E) \cup V(F).$$

Infatti se $f(x) = 0$ per ogni $f \in E$, a maggior ragione $h(x) = 0$ per ogni $h \in E \cdot F$, quindi $V(E) \subset V(E \cdot F)$ e per simmetria $V(F) \subset V(E \cdot F)$. Viceversa se $x \in U - (V(E) \cup V(F))$ esistono $f \in E$ e $g \in F$ tali che $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ e quindi $fg(x) \neq 0$ da cui $x \notin V(E \cdot F)$.

DEFINIZIONE 1.8.2. Un sottoinsieme $X \subset U$ si dice **chiuso analitico** se per ogni punto $x \in U$ esiste un aperto $W \subset U$, con $x \in W$, e un sottoinsieme **finito**³ $E \subset \mathcal{O}(W)$ per cui vale:

$$(1.4) \quad X \cap W = V(E)$$

Ogni chiuso analitico è anche un chiuso nella topologia classica. Infatti se $X \subset U$ è un chiuso analitico e $x \notin X$, esiste un aperto $x \in W \subset U$ ed un insieme finito $E \subset \mathcal{O}(W)$ tale che $X \cap W = V(E)$ e quindi $x \in W - V(E) \subset U - X$: basta osservare che $W - V(E)$ è aperto in W e quindi pure in U .

In termini più colloquiali, un chiuso analitico può essere descritto come un chiuso che è localmente luogo degli zeri di un numero finito di funzioni oloomorfe.

Nelle notazioni precedenti, valgono le seguenti proprietà:

- (1) $\emptyset = V(1)$ e $U = V(0)$ sono chiusi analitici di U ;
- (2) se $X_1, X_2 \subset U$ sono chiusi analitici $\implies X_1 \cup X_2$ è chiuso analitico;
- (3) se $X_1, X_2 \subset U$ sono chiusi analitici $\implies X_1 \cap X_2$ è chiuso analitico.

Verifichiamo tali proprietà:

- (1) risulta immediata dalla definizione.
- (2) X_1, X_2 chiusi analitici $\implies \forall x \in U$ esistono W_1, W_2 aperti di U e $E_1 \subset \mathcal{O}(W_1), E_2 \subset \mathcal{O}(W_2)$ sottoinsiemi finiti tali che $X_i \cap W_i = V(E_i)$:

Si consideri l'insieme

$$E_1 \cdot E_2 = \{f \cdot g \mid f \in E_1 \text{ e } g \in E_2\} \subset \mathcal{O}(W_1 \cap W_2).$$

Per quanto osservato nella Remark 1.8.1 si ha

$$(X_1 \cup X_2) \cap (W_1 \cap W_2) = V(E_1 \cdot E_2).$$

- (3) Del tutto simile a quella del punto 2 con $E_1 \cup E_2 \subset \mathcal{O}(W_1 \cap W_2)$.

ESERCIZIO 1.8.3. Provare che i chiusi analitici di \mathbb{C} sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e discreti nella topologia classica.

LEMMA 1.8.4. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $X \subset U$ un chiuso analitico. Allora la parte interna di X è aperta e chiusa in U ; in particolare se U è connesso e $X \neq U$, allora X è un chiuso raro, ossia senza parte interna.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = X^\circ$ la parte interna di X e denotiamo con \bar{A} la chiusura di A in U . Per ogni punto $x \in \bar{A} - A$ esiste un aperto $x \in W \subset U$ ed un insieme finito $E \subset \mathcal{O}(W)$ tale che $X \cap W = V(E)$; a meno di restringere W possiamo supporre W aperto connesso. Siccome l'aperto $W \cap A$ è non vuoto, per il principio di identità ogni $f \in E$ si annulla su W , ossia $W \subset X$ e $x \in A$. Abbiamo quindi dimostrato che $A = \bar{A}$.

Se $X \neq U$ a maggior ragione $A = \bar{A} \neq U$ e se U è connesso deve quindi essere $A = \emptyset$. \square

Siamo adesso in grado di enunciare e dimostrare l'analogo pluridimensionale del teorema di estensione di Riemann.

TEOREMA 1.8.5 (di estensione di Riemann). Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso e $X \subset U$ un chiuso analitico proprio. Allora l'aperto complementare $U - X$ è connesso e ogni funzione $f: U - X \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e localmente limitata intorno ad X si estende, in maniera unica, ad una funzione olomorfa $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE. Quando diciamo che f è localmente limitata intorno ad X intendiamo dire che per ogni $x \in X$ esiste un aperto $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $f: V - X \rightarrow \mathbb{C}$ limitata.

Basta dimostrare che ogni funzione olomorfa e limitata si estende ad una funzione olomorfa su U : siccome $U - X$ è denso in U per il Lemma 1.8.4, l'estensione è necessariamente unica. Inoltre, se $U - X$ fosse sconnesso, esisterebbe una funzione localmente costante ma non costante $U - X \rightarrow \{\pm 1\}$, che pur essendo olomorfa e limitata, non può essere estesa con continuità.

³Nota per chi segue anche Geometria Algebrica: la restrizione ad insiemi finiti è tecnicamente utile e conveniente perché gli anelli $\mathcal{O}(U)$ non sono Noetheriani (come per la fattorizzazione unica sono invece Noetheriani gli anelli dei germi, ma questo va al di là degli obiettivi di queste note).

Sempre per il Lemma 1.8.4, se $A, B \subset U$ sono due aperti, allora $A \cap B \neq \emptyset$ se e solo se $A \cap B \cap (U - X) \neq \emptyset$; per il principio di identità basta quindi dimostrare che per ogni $x \in U$ la funzione f si estende ad un intorno aperto e connesso di x .

Non è chiaramente restrittivo supporre $x \in X$, ed a meno di traslazioni che $x = 0 \in \mathbb{C}^n$. Per ipotesi esiste un aperto $0 \in W$ ed una funzione olomorfa non nulla $g \in \mathcal{O}(W)$ tale che $X \cap W \subset V(g)$. A meno di restringere W possiamo assumere che f sia limitata in $W - X$ e a meno di un cambio lineare di coordinate non è restrittivo supporre g non nulla sull'asse z_n . Per il teorema di preparazione di Weierstrass, a meno di restringere ulteriormente W esiste una funzione olomorfa $e \in \mathcal{O}(W)$ tale che $h := eg$ sia un polinomio di Weierstrass in z_n ; è chiaro che $X \cap W \subset V(h)$.

Possiamo quindi scrivere:

$$h = z_n^d + \sum_{i < d} h_i(z_1, \dots, z_n) z_n^i, \quad h_i(0) = 0, \quad (z_1, \dots, z_n) \in W.$$

Sia $r = (r_1, \dots, r_n)$ un poliraggio tale che $\overline{\Delta}(0, r) \subset W$; allora

$$|z_n| = r_n \implies h(0, \dots, 0, z_n) = z_n^d \neq 0.$$

Siccome la proiezione

$$p: \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1})) \times \partial\Delta(0, r_n) \rightarrow \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1}))$$

è un'applicazione chiusa, l'immagine dell'intersezione del dominio con $V(h)$ è un chiuso che non contiene 0, ed a meno di restringere r_1, \dots, r_{n-1} (e lasciare fisso r_n) si ha

$$|z_i| < r_i, \quad \forall 1 \leq i < n, \quad |z_n| = r_n \implies h(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \neq 0.$$

Per ogni $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1}))$ l'insieme $\{z_n \in \Delta(0, r_n) \mid h(z_1, \dots, z_n) = 0\}$ è finito (sono le radici di un polinomio di grado d) e per il teorema di estensione di Riemann in una variabile, sappiamo che la funzione $z_n \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ si estende ad una funzione olomorfa \tilde{f} che per la formula di Cauchy deve necessariamente essere uguale a

$$(1.5) \quad \tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi.$$

Ma la funzione \tilde{f} definita in (1.5) è olomorfa non solo nella variabile z_n ma in tutto il polidisco $\Delta(0, r)$. \square

Un'altra utile applicazione del Lemma 1.8.4 è la dimostrazione che la divisibilità di funzioni olomorfe è una proprietà locale.

PROPOSIZIONE 1.8.6. *Siano f, g funzioni olomorfe su un aperto connesso $U \subset \mathbb{C}^n$. Sono fatti equivalenti:*

- (1) f divide g nell'anello $\mathcal{O}(U)$;
- (2) esiste un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ tale che $f|_{U_i}$ divide $g|_{U_i}$ in $\mathcal{O}(U_i)$ per ogni i ;
- (3) il germe f_x divide il germe g_x in $\mathcal{O}_{U,x}$ per ogni $x \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Per come è definito l'anello dei germi, la condizione 3) è del tutto equivalente a dire che ogni punto $x \in U$ possiede un intorno aperto $x \in V \subset U$ ed una funzione olomorfa $h \in \mathcal{O}(V)$ tale che $g = fh$ in $\mathcal{O}(V)$; dunque le condizioni 2) e 3) sono del tutto equivalenti ed è del tutto ovvio che 1) implica 2). Viceversa, se vale 2) esistono delle funzioni $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $fh_i = g$. Per dimostrare che le h_i si incollano ad una funzione olomorfa su U bisogna vedere che $h_i(x) = h_j(x)$ per ogni $x \in U_i \cap U_j$ ed ogni i, j .

Sia dunque $x \in U_i \cap U_j$ e consideriamo un polidisco aperto $x \in \Delta \subset U_i \cap U_j$. Sappiamo che $V(f)$ è un chiuso raro e quindi $\Delta - V(f)$ è un aperto non vuoto nel quale $h_i = h_j = g/f$; basta adesso invocare il principio di identità per dedurre che $h_i = h_j$ su tutto Δ e nel punto x in particolare. \square

Per uso futuro dimostriamo adesso una interessante applicazione del teorema di preparazione di Weierstrass ai chiusi $V(f)$ e che può essere vista come caso particolare del teorema degli zeri di Rückert [7, Cap. III].

TEOREMA 1.8.7 (degli zeri per ipersuperfici). *Siano $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tali che $0 \in V(f) \subset V(g)$. Allora, nel dominio a fattorizzazione unica $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, ogni fattore irriducibile di f divide g .*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre g diversa da zero e quindi $V(g)$, $V(f)$ chiusi analitici rari. Se f_1, \dots, f_r sono i fattori irriducibili di f in $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ allora, a meno di restringere U non è restrittivo supporre $f_i \in \mathcal{O}(U)$ per ogni i e $V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_r)$; quindi $0 \in V(f_i) \subset V(g)$ per ogni i ed è sufficiente dimostrare il teorema per f irriducibile.

A meno di un cambio lineare di coordinate si può supporre $g(0, \dots, 0, t)$ non identicamente nulla, quindi pure $f(0, \dots, 0, t)$ non identicamente nulla. Per il teorema di preparazione di Weierstrass, a meno di restringere U e moltiplicare f, g per invertibili si può supporre f, g polinomi di Weierstrass nella variabile z_n : diciamo, tanto per fissare le notazioni

$$f(z) = z_n^d + \sum_{i=1}^d f_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{d-i}, \quad f_i(0) = 0.$$

Se $\pi: U \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ denota la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate, allora $\pi(V(f))$ contiene un intorno di 0 : osserviamo preliminarmente che se

$$t^d + \sum_{i=1}^d a_i t^{d-i}, \quad a_i, t \in \mathbb{C}$$

allora $|t| \leq \max_i \sqrt[d+1]{(d+1)|a_i|}$. Infatti se fosse $|t^i| > (d+1)|a_i|$ per ogni i si avrebbe $t \neq 0$ e

$$|t^d| \leq \sum_{i=1}^d |a_i| |t|^{d-i} \leq \sum_{i=1}^d \frac{|t|^d}{d+1} = \frac{d}{d+1} |t^d|.$$

In altri termini, quando tutti i coefficienti, escluso quello direttivo, di un polinomio monico tendono a 0 allora anche tutte le radici tendono a 0 . Siccome le f_i hanno tutte molteplicità positiva, per tutti gli $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ di norma sufficientemente piccola, i coefficienti $f_i(z)$ sono tali da assicurare che per ogni $t \in \mathbb{C}$ tale che $t^d + \sum_{i=1}^d f_i(z)t^{d-i} = 0$ si abbia $(z, t) \in U$ e quindi $(z, t) \in V(f)$.

Se f è irriducibile e, per assurdo, fosse senza fattori comuni con g , le stesse considerazioni fatte nella dimostrazione del Teorema 1.7.19 mostrano che, a meno di restringere ulteriormente U si ha una relazione del tipo $pf+qg = \alpha$ con $p, q \in \mathcal{O}(U)$, e α funzione non nulla nelle variabili z_1, \dots, z_{n-1} . Ma siccome $V(f) \subset V(g)$ si ha anche $V(f) \subset V(\alpha)$ che implica $\alpha = 0$ poiché α dipende dalle prime $n-1$ coordinate e la proiezione di $V(f)$ sulle medesime contiene un aperto. \square

COROLLARIO 1.8.8. *Siano $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto convesso, $t: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ lineare non nulla e $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che $V(f) \subset V(t)$. Allora esiste un intero $d \geq 0$ tale che $f = t^d g$ con $g \in \mathcal{O}(U)$ invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto possiamo estendere t ad un sistema di coordinate lineari t, z_2, \dots, z_n . Dimostriamo preliminarmente che se $f(0) = 0$ allora t divide f in un intorno di 0 . Per il Teorema 1.8.7 ogni fattore irriducibile di f divide t , ma essendo t irriducibile esso stesso, ne segue che, a meno di invertibili, t è l'unica componente irriducibile di f in $\mathbb{C}\{t, z_2, \dots, z_n\}$. In particolare t divide f in un intorno di 0 .

Torniamo adesso a studiare la situazione globale su U . Sia d il massimo intero tale che t^d divide f in U ; chiaramente d è minore od uguale alla molteplicità di f in 0 . Siccome $V(f) = V(f/t^d) \cup V(t^d)$, a meno di sostituire f con f/t^d basta dimostrare che se $\emptyset \neq V(f) \subset V(t)$ allora t divide f . Se esiste $p \in V(f)$, abbiamo dimostrato che t divide f in un intorno di p , e per il principio di identità $f(0, z) = 0$ per ogni $(0, z) \in U$. Sempre per quanto dimostrato per ogni $u \in U$ esiste un polidisco $\Delta(u, s)$ dove t divide f . Dunque per ogni u esiste $g_u \in \mathcal{O}(\Delta(u, s))$ tale che $f = t g_u$ e per la Proposizione 1.8.6 ne consegue che t divide f in $\mathcal{O}(U)$.

Si noti che a posteriori, dal fatto che $f = t^d g$ segue $V(f) = V(t)$. \square

Ricordiamo che un elemento a di un anello commutativo A si dice un **divisore di zero** se l'applicazione

$$a \cdot : A \rightarrow A, \quad b \mapsto ab \quad (\text{moltiplicazione per } a),$$

non è iniettiva, ossia se esiste $b \neq 0$ tale che $ab = 0$. Pertanto A è un dominio di integrità se e solo se A non ha divisori di zero diversi da 0 .

LEMMA 1.8.9. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f è un divisore di 0 nell'anello $\mathcal{O}(U)$ se e solo se il luogo di zeri di f ha parte interna non vuota.*

In particolare, se $f \in \mathcal{O}(U)$ non è un divisore di 0, allora $f|_V \in \mathcal{O}(V)$ non è un divisore di 0 per ogni aperto non vuoto $V \subset U$.

DIMOSTRAZIONE. Se esiste $g \in \mathcal{O}(U)$ non nulla tale che $fg = 0$ allora f si annulla nell'aperto non vuoto $A = \{x \in U \mid g(x) \neq 0\}$ che pertanto è contenuto nella parte interna del luogo di zeri di f . Viceversa, sia $A = V(f)^{\circ} \subset U$ la parte interna del luogo di zeri di f ; per il Lemma 1.8.4 si ha $A = \overline{A}$ (\overline{A} =chiusura di A in U) e dunque $U = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti. Ma allora la funzione g che vale 1 in A e 0 in B è olomorfa e $fg = 0$ e se $A \neq \emptyset$ allora $g \neq 0$ ed f risulta essere un divisore di 0.

Se $f|_V$ è un divisore di zero, per quanto appena dimostrato la funzione f si annulla su un aperto non vuoto di V e quindi $V(f)$ avrebbe parte interna non vuota. \square

Per ogni anello commutativo A con unità $1 \in A$, denotiamo con $S_A \subset A$ l'insieme degli elemento che **non sono** divisori di 0: ossia $a \in S_A$ se e solo se la moltiplicazione per a è iniettiva. È chiaro che $1 \in S_A$ e che se $s, t \in S_A$ allora $st \in S_A$.

Definiamo poi l'anello delle **frazioni globali** di A come

$$D(A) = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S_A \right\} / \sim$$

dove

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \iff sb = ta.$$

Lasciamo per esercizio la semplice verifica che \sim è una relazione di equivalenza (sarà fondamentale che i denominatori non siano divisori di zero), che $D(A)$ è un anello con operazioni

$$\frac{a}{s} \pm \frac{b}{t} = \frac{ta \pm sb}{st}, \quad \frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{ab}{st},$$

e che l'applicazione

$$A \rightarrow D(A), \quad a \mapsto \frac{a}{1},$$

è un omomorfismo iniettivo di anelli. Se A è un dominio di integrità, allora $S_A = A - \{0\}$ e quindi $D(A)$ coincide con il campo delle frazioni di A . Viceversa, se $D(A)$ è un campo, allora A è un dominio di integrità: infatti, dato che esiste un omomorfismo iniettivo di anelli $A \rightarrow D(A)$, se $D(A)$ è un dominio di integrità a maggior ragione anche A è un dominio di integrità.

Nelle notazioni precedenti, per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ abbiamo dimostrato che $S_{\mathcal{O}(U)} = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid V(f)^{\circ} = \emptyset\}$: denotiamo

$$\mathcal{H}(U) = D(\mathcal{O}(U)) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}_X(U), V(g)^{\circ} = \emptyset \right\}.$$

Per ogni aperto non vuoto $V \subset U$, il Lemma 1.8.9 garantisce che l'applicazione di restrizione

$$\mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(V), \quad \frac{f}{g} \mapsto \frac{f|_V}{g|_V},$$

è ben definita ed è un omomorfismo di anelli. Chiameremo $\mathcal{H}(U)$ anello delle **frazioni olomorfe** su U .

Siamo adesso in grado di definire una funzione meromorfa su U come una "funzione" localmente uguale ad una frazione olomorfa. Siccome le frazioni olomorfe non sono delle vere e proprie funzioni, il precedente concetto ha bisogno di essere precisato meglio ed occorre, almeno in prima battuta, essere un po' più pedanti e precisi.

DEFINIZIONE 1.8.10. Una **espressione meromorfa** su un aperto U è il dato di un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ e frazioni meromorfe $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{H}(U_i)$ tali che, per ogni coppia di indici i, j le frazioni olomorfe $\frac{f_i}{g_i}$ e $\frac{f_j}{g_j}$ abbiano la stessa restrizione a $\mathcal{H}(U_i \cap U_j)$, ossia tali che $f_i g_j = f_j g_i$ nell'aperto $U_i \cap U_j$.

Una espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ si dice **normalizzata** (od anche "in forma normale") se per ogni i ed ogni $x \in U_i$ i germi delle funzioni f_i, g_i nel dominio a fattorizzazione unica $\mathcal{O}_{U,x}$ non hanno fattori comuni.

Date due espressioni meromorfe $(U_i, f_i/g_i)$ e $(V_j, h_j/k_j)$ sull'aperto $U = \cup_i U_i = \cup_j V_j$, diremo che sono equivalenti, e scriveremo $(U_i, f_i/g_i) \sim (V_j, h_j/k_j)$, se per ogni coppia i, j si ha

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{h_j}{k_j} \in \mathcal{H}(U_i \cap V_j) \iff f_i k_j = g_i h_j \in \mathcal{O}(U_i \cap V_j).$$

Che \sim sia una relazione di equivalenza non è del tutto ovvio, soprattutto per quanto riguarda la proprietà transitiva. Supponiamo $(U_i, f_i/g_i) \sim (V_j, h_j/k_j)$ e $(V_j, h_j/k_j) \sim (A_l, p_l/q_l)$, vogliamo dimostrare che per ogni i, l si ha $f_i q_l = g_i p_l \in \mathcal{O}(U_i \cap A_l)$. Sia $x \in U_i \cap A_l$, prendiamo un polidisco $\Delta = \Delta(x, r)$ di poliraggio r sufficientemente piccolo tale che $\Delta \subset U_i \cap A_l$ e scegliamo un indice j tale che $x \in V_j$. Ma allora in $\Delta \cap V_j$ si ha

$$q_l f_i k_j = q_l g_i h_j = g_i k_j p_l$$

e siccome k_j non è un divisore di zero $q_l f_i = g_i p_l$ in $\Delta \cap V_j$ e per il principio di identità $q_l f_i = g_i p_l$ in Δ .

Ad esempio, l'espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ è equivalente a (U, h) , con $h \in \mathcal{O}(U)$, se e solo se $f_i = h g_i$ per ogni i .

DEFINIZIONE 1.8.11. Una **funzione meromorfa** su U è una classe di equivalenza di espressioni meromorfe. L'anello delle funzioni meromorfe su U viene denotato $\mathcal{M}(U)$.

La struttura di anello in $\mathcal{M}(U)$ è definita in maniera naturale partendo da quella delle frazioni ologomorfe: A livello di espressioni ologomorfe si vede facilmente che le operazioni

$$\left(U_i, \frac{f_i}{g_i} \right) * \left(V_j, \frac{p_j}{q_j} \right) = \left(U_i \cap V_j, \frac{f_i}{g_i} * \frac{p_j}{q_j} \right), \quad * = +, -, \times,$$

commutano con la relazione \sim ed inducono una struttura di anello commutativo con unità su $\mathcal{M}(U)$.

Vi è un'applicazione naturale

$$\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U), \quad f \mapsto \text{classe dell'espressione } (U, f/1),$$

che si vede subito essere un omomorfismo iniettivo di anelli. Inoltre un'espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ rappresenta una funzione ologomorfa, ossia $(U_i, f_i/g_i) \sim (U, h)$ per qualche $h \in \mathcal{O}(U)$ se e solo se per ogni i la funzione g_i divide f_i nell'anello $\mathcal{O}(U_i)$. Una implicazione è immediata: se $(U_i, f_i/g_i) \sim (U, h)$ per definizione si ha $f_i = h g_i$ per ogni i . Viceversa se esistono delle funzioni $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $f_i = g_i h_i$, allora $h_i g_i g_j = h_j g_i g_j$ in $U_i \cap U_j$. Siccome g_i, g_j non sono un divisori di zero in $U_i \cap U_j$ ne consegue che $h_i = h_j$.

LEMMA 1.8.12. *Ogni funzione meromorfa è rappresentata da un'espressione meromorfa normalizzata.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre dimostrare che ogni espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ è equivalente ad una normalizzata. Per ogni $x \in U = \cup U_i$ possiamo trovare due germi $f_x, g_x \in \mathcal{O}_{U,x}$ senza fattori comuni tali che $f_x/g_x = f_i/g_i$ nell'anello delle frazioni di $\mathcal{O}_{U,x}$ per ogni indice i tale che $x \in U_i$. Basta infatti scegliere un indice i tale che $x \in U_i$ e dividere i germi di f_i e g_i per il loro massimo comun divisore $\delta = MCD(f_i, g_i)$. Se $x \in U_j$ per un altro indice, dividendo per δ l'uguaglianza $f_i g_j = g_i f_j$ si ottiene $f_x/g_x = f_i/g_i$.

Per il Teorema 1.7.19 esiste un intorno aperto $x \in V_x$ dove le funzioni f_x, g_x sono definite e senza fattori comuni in $\mathcal{O}_{V_x,y}$ per ogni y . In conclusione l'espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ è equivalente all'espressione normalizzata $(V_x, f_x/g_x)$. \square

Poiché è ben definita la restrizione ad aperti delle frazioni ologomorfe, lo stesso vale per le funzioni meromorfe: se $V \subset U$ sono aperti di \mathbb{C}^n si ha un morfismo di restrizione

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V), \quad \varphi = \{(U_i, f_i/g_i)\} \mapsto \varphi|_V = \{(U_i \cap V, f_i/g_i)\}.$$

Per quanto visto sopra, un'espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ definisce una funzione ologomorfa nell'aperto V se e solo se g_i divide f_i in $U_i \cap V$ per ogni indice i .

DEFINIZIONE 1.8.13. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Un punto $x \in U$ si dice **regolare** per una funzione meromorfa $\varphi \in \mathcal{M}(U)$ se esiste un intorno aperto $x \in V \subset U$ tale che $\varphi|_V \in \mathcal{O}(V)$. Un punto che non è regolare si dice **singolare**.

È facile vedere che l'insieme S dei punti singolari di una funzione meromorfa $\varphi \in \mathcal{M}(U)$ è un chiuso analitico raro di U . A tale scopo basta dimostrare che se $(U_i, f_i/g_i)$ è un'espressione normalizzata per φ allora vale $S \cap U_i = V(g_i)$ per ogni i .

Sia dunque i un indice fissato e $x \in U_i$. Se $g_i(x) \neq 0$ allora il quoziente f_i/g_i è olomorfo in un intorno di x e questo prova che $x \notin S$. Viceversa se esiste un intorno $x \in V \subset U_i$ ed una funzione olomorfa $h \in V$ tale che $f_i/g_i = h \in \mathcal{H}(V)$, allora $f_i = g_i h$ in $\mathcal{O}(V)$ ed a maggior ragione $f_i = g_i h$ in $\mathcal{O}_{V,x}$. Poiché i germi di f_i e g_i in x non hanno fattori comuni, questo implica che g_i è invertibile, ossia $g_i(x) \neq 0$.

Dunque la restrizione di una funzione meromorfa all'aperto denso dei suoi punti regolari è una funzione olomorfa. Da ciò segue facilmente l'equivalente del principio di identità per le funzioni meromorfe (dettagli lasciati per esercizio al lettore).

TEOREMA 1.8.14. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $\varphi \in \mathcal{M}(U)$ una funzione meromorfa che è radice di un polinomio monico a coefficienti in $\mathcal{O}(U)$. Allora φ è olomorfa.*

In particolare, se U è connesso il dominio di integrità $\mathcal{O}(U)$ è integralmente chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esistono $a_1, \dots, a_d \in \mathcal{O}(U)$ tali che

$$\varphi^d + a_1 \varphi^{d-1} + \dots + a_d = 0.$$

Vogliamo dimostrare che ogni punto di U è regolare per φ . Sia $(U_i, f_i/g_i)$ una espressione di φ ; se $x \in U_i$ allora f_i/g_i è radice di un polinomio monico a coefficienti nell'anello a fattorizzazione unica $\mathcal{O}_{U,x}$ ed abbiamo già osservato ciò è possibile solo se g_i divide f_i in $\mathcal{O}_{U,x}$. Questo è vero per ogni $x \in U_i$ e quindi g_i divide f_i in U_i ; questo è vero per ogni i e quindi φ è olomorfa. \square

1.9. Biolomorfismi locali e globali

DEFINIZIONE 1.9.1. Siano $U \subset \mathbb{C}^n, V \subset \mathbb{C}^m$ aperti. Un'applicazione

$$f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow V$$

si dice **olomorfa** se tutte le sue componenti⁴ $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe.

Per una f come nella precedente definizione, un punto $u \in U$, un vettore colonna $h \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{C}$ in un intorno sufficientemente piccolo di 0 si ha:

$$f_i(u + th) = f_i(u) + t \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(u), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(u) \right) h + t^2(\dots)$$

e quindi

$$f(u + th) = f(u) + t(J_f(u)h) + t^2(\dots)$$

dove $J_f(u)h$ è il prodotto righe per colonne della matrice Jacobiana⁵

$$J_f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n}(u) \end{pmatrix}$$

con il vettore h .

La composizione di applicazioni olomorfe, quando definita, è ancora olomorfa e, esattamente come nel caso reale, vale la regola di derivazione della funzione composta: la matrice Jacobiana della composizione è uguale al prodotto delle matrici Jacobiane.

La controimmagine di un chiuso analitico mediante un'applicazione olomorfa è ancora un chiuso analitico: infatti la controimmagine commuta con le intersezioni e se $g \in \mathcal{O}(V)$, allora per ogni applicazione olomorfa $f: U \rightarrow V$ si ha $V(gf) = f^{-1}(V(g))$. In generale l'immagine di un chiuso analitico non è un chiuso analitico, ed in molti casi nemmeno un chiuso come per la proiezione dell'iperbole $V(xy - 1) \subset \mathbb{C}^2$ sugli assi coordinati.

⁴Anche se per comodità si scrive $f = (f_1, \dots, f_m)$ non bisogna dimenticare che la convenzione standard è considerare gli elementi di \mathbb{C}^n come vettori colonna.

⁵Ricordo, per primo a me stesso, che Karl Jacobi era tedesco, e quindi si pronuncia "iacobi", o meglio ancora "ya'kobi"; dunque J_f è la matrice iacobiana.

ESEMPIO 1.9.2. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ intorno aperti di 0 e $f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ due applicazioni oloomorfe tali che $f(0) = g(0) = 0$. Siano $0 \in \Delta(0, r) \subset U$ e $0 \in \Delta(0, s) \subset V$ due polidiscchi tali che $f(\Delta(0, r)) \subset V$ e $g(\Delta(0, s)) \subset U$. Allora vale

$$fg(x) = x \quad \forall x \in \Delta(0, s) \iff gf(y) = y \quad \forall y \in \Delta(0, r).$$

Supponiamo che fg sia l'identità in $\Delta(0, s)$ allora le matrici Jacobiane di f e g in 0 sono una l'inversa dell'altra e di conseguenza anche la matrice Jacobiana di $gf: \Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}^n$ in 0 è uguale all'identità. Ciò significa che in un intorno di 0 si ha

$$gf(z_1, \dots, z_n) = (z_1 + h_1(z), \dots, z_n + h_n(z))$$

con le h_i serie di potenze di molteplicità in 0 maggiore di 1. Per il principio di identità basta provare che $h_1 = 0$ per ogni i ; dimostriamo che $h_1 = 0$ (lo stesso argomento si applica alle altre funzioni h_i). Supponiamo per assurdo $h_1 \neq 0$ e sia $d \geq 2$ la sua molteplicità in 0, allora $h_1(z) = p(z) + q(z)$ con p polinomio omogeneo di grado d e q serie di molteplicità $> d$. In un intorno sufficientemente piccolo di 0 è definita la composizione gf e se $fg = \text{Id}$ allora $gf = gf$. Ma questo è assurdo perché la prima componente di gf è

$$z_1 + h_1(z) + h_1(gf(z)) = z_1 + 2p(z) + q'(z)$$

con q' di molteplicità $> d$.

Un'applicazione oloomorfa e invertibile, con inversa oloomorfa si dice un **biolomorfismo**, oppure **isomorfismo oloomorfo**. Un isomorfismo oloomorfo da un aperto in sé viene detto **automorfismo oloomorfo**; gli automorfismi oloomorfi formano un gruppo, con il prodotto di composizione.

Il prossimo lemma, conseguenza del principio di identità, mostra che per un'applicazione oloomorfa tra aperti connessi di \mathbb{C}^n , essere un biolomorfismo equivale ad avere un inverso destro o sinistro.

LEMMA 1.9.3. *Per due applicazioni oloomorfe $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow U$, tra aperti connessi di \mathbb{C}^n , le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) f è un biolomorfismo con inverso $f^{-1} = g$;
- (2) $gf = \text{Id}_U$;
- (3) $fg = \text{Id}_V$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione 1) è equivalente a 2) e 3). Occorre quindi dimostrare che 2) e 3) sono equivalenti; ma questo segue immediatamente dal principio di identità e dall'Esempio 1.9.2. \square

ESEMPIO 1.9.4. Consideriamo le due applicazioni oloomorfe $f, g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ le cui componenti f_p, g_p , $1 \leq p \leq n$, sono:

$$f_p(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_p} \quad (\text{funzioni simmetriche elementari})$$

$$g_p(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n z_i^p.$$

Vogliamo provare che esiste un automorfismo oloomorfo $\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tale che $\phi f = g$.

A tal fine definiamo estendiamo la definizione di g_p ad ogni intero positivo p e per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ consideriamo la serie formale

$$\gamma_z(t) = \prod_{i=1}^n (1 + tz_i) = 1 + \sum_{p=1}^n f_p(z) t^p$$

il cui logaritmo si calcola in due modi diversi:

$$\begin{aligned} \log(\gamma_z(t)) &= \sum_{i=1}^n \log(1 + z_i t) = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} z_i^p}{p} t^p = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} g_p(z) t^p \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h} \left(\sum_{p=1}^n f_p(z) t^p \right)^h. \end{aligned}$$

Per ogni $p > 0$ esiste quindi un polinomio $\phi_p \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $g_p(z) = \phi_p(f_1(z), \dots, f_n(z))$ e quindi $g = \phi f$, dove $\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ è l'applicazione di componenti ϕ_1, \dots, ϕ_n . Similmente si ha

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n f_p(z)t^p &= \exp(\log(\gamma_z(t))) - 1 \\ &= \exp\left(\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} g_p(z)t^p\right) - 1 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} g_p(z)t^p\right)^h \end{aligned}$$

ed anche in questo caso per ogni $0 < p \leq n$ esiste un polinomio $\psi_p \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $f_p(z) = \psi_p(g_1(z), \dots, g_n(z))$. Dunque $\psi g = f$ dove $\psi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ha come componenti ψ_1, \dots, ψ_n . Siccome f è surgettiva (teorema fondamentale dell'algebra) si ha $\phi\psi = \text{Id}$. Per il Lemma 1.9.3 ϕ e ψ sono biolomorfismi uno l'inverso dell'altro.

ESEMPIO 1.9.5. Siano $r > 0$ e $u \in \Delta(0, r)$. Allora

$$\rho_u: \Delta(0, r) \rightarrow \Delta(0, r), \quad \rho_u(z) = r^2 \frac{u - z}{r^2 - \bar{u}z},$$

è un automorfismo olomorfo del disco $\Delta(0, r)$ tale che $\rho_u(0) = u$ e $\rho_u \circ \rho_u = \text{Id}$.

È ovvio che $\rho_u(0) = u$, mentre la verifica che $\rho_u(\rho_u(z)) = z$ è noiosa ma del tutto banale e lasciata al lettore. Dimostriamo adesso che $\rho_u(\Delta(0, r)) \subset \Delta(0, r)$. Siccome la funzione olomorfa ρ_u è definita e continua sul disco chiuso $\bar{\Delta}(0, r)$, per il principio del massimo basta dimostrare che $|\rho_u(z)| \leq r$ quando $|z| = r$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\bar{z} = r^2/z$ si ottiene

$$|z| = r \quad \Rightarrow \quad \rho_u(z) = r^2 \frac{u - z}{r^2 - \bar{u}z} = -\bar{z} \frac{u - z}{\bar{u} - \bar{z}}$$

e basta osservare che numeratore e denominatore della frazione sono uno il coniugato dell'altro e quindi con lo stesso modulo. Osserviamo inoltre che per ogni $u, z \in \Delta(0, r)$ vale

$$|\rho_u(z)| \leq |u| + |z| + \frac{|uz|}{r}.$$

Infatti, la funzione $f(z) = \rho_u(z) - u$ è olomorfa in un intorno di $\bar{\Delta}(0, r)$, $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq r + |u|$ per ogni z . Dal lemma di Schwarz segue che

$$|\rho_u(z)| \leq |u| + |f(z)| \leq |u| + \frac{|z|}{r}(r + |u|).$$

ESEMPIO 1.9.6. Il gruppo degli automorfismi olomorfi di un polidisco aperto $\Delta(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ agisce transitivamente: ossia per ogni $x, y \in \Delta(0, r)$ esiste un biolomorfismo $\rho: \Delta(0, r) \rightarrow \Delta(0, r)$ tale che $\rho(x) = y$.

Per $n = 1$ segue dall'esempio precedente considerando $\rho = \rho_y \circ \rho_x$. Per $n > 1$ basta agire separatamente sui fattori.

Come per le funzioni di classe C^1 , le applicazioni olomorfe soddisfano il teorema di invertibilità locale.

TEOREMA 1.9.7 (di invertibilità locale). *Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ aperti e*

$$f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow V$$

applicazione olomorfa. Allora f è localmente un biolomorfismo in $u \in U$ se e solo se la matrice Jacobiana

$$J_f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(u) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(u) \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Dire che f è localmente un biolomorfismo in $u \in U$ significa dire che esistono due aperti $u \in U' \subset U$ e $f(u) \in V' \subset V$ tali che $f: U' \rightarrow V'$ è un biolomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è omessa e rimandiamo ai classici testi sull'argomento [6, 7, 15].

In ogni modo basta traslare al caso oloomorfo la classica dimostrazione per le funzioni di classe C^1 ; alternativamente si dimostra preliminarmente che se la matrice Jacobiana è invertibile allora esiste l'inversa di classe C^1 (usando il teorema usuale) e poi usare le equazioni di Cauchy-Riemann per mostrare che l'inversa è oloomorfa.

Non è difficile dare una dimostrazione come conseguenza del teorema di preparazione di Weierstrass (qui abbozzata nell'Esercizio 1.9.9). □

Un'applicazione oloomorfa $f: U \rightarrow V$ si dice un biolomorfismo locale se è localmente un biolomorfismo in ogni punto di U . Segue dal teorema di invertibilità locale che l'applicazione

$$\exp\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \exp\pi(z) = e^{2\pi iz}$$

è un biolomorfismo locale, così come le elevazioni a potenza

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^n, \quad n \neq 0.$$

Anticipiamo il seguente risultato, che per maggior agevolezza dimostreremo in seguito nel contesto delle varietà complesse.

TEOREMA 1.9.8 (di invertibilità globale). *Sia $f: U \rightarrow V$ un'applicazione oloomorfa e bigettiva tra due aperti di \mathbb{C}^n . Allora f è un biolomorfismo.*

In virtù del teorema di invertibilità locale, il teorema di invertibilità globale è del tutto equivalente a dire che se $f: U \rightarrow V$ un'applicazione oloomorfa e bigettiva tra due aperti di \mathbb{C}^n , allora la matrice Jacobiana di f è ovunque invertibile.

ESERCIZIO 1.9.9. Sia $f(z_1, \dots, z_n)$ funzione oloomorfa in un intorno di 0 tale che $f(0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z_1}(0) \neq 0$ e si consideri la funzione in $n + 1$ variabili

$$g(t, z_1, \dots, z_n) = t - f(z_1, \dots, z_n).$$

Per il Teorema di preparazione di Weierstrass si può scrivere

$$t - f(z_1, \dots, z_n) = e(t, z) \cdot (z_1 - \varphi(t, z_2, \dots, z_n)), \quad e(0, 0) \neq 0, \varphi(0) = 0$$

in modo tale che $t = f(z_1, \dots, z_n)$ se e solo se $z_1 = \varphi(t, z_2, \dots, z_n)$, in un intorno sufficientemente piccolo di 0. Provare che l'applicazione

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (f(z), z_2, \dots, z_n)$$

è un biolomorfismo locale con inverso

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (\varphi(t, y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n).$$

Usare tale fatto per dare una dimostrazione del Teorema 1.9.7: non è restrittivo supporre $u = 0$, $J_f(u) = \text{Id}$ e ragionare per induzione sul numero di indici i tali che $f_i(z) \neq z_i$.

ESERCIZIO 1.9.10. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto connesso limitato e sia $f: U \rightarrow U$ oloomorfa. Si assuma che esista un punto $x \in U$ tale che $f(x) = 0$ e con la matrice Jacobiana di f in x uguale all'identità. Dimostrare che $f = \text{Id}$. (Sugg.: si considerino le potenze f^p , $p \gg 0$; studiare l'argomento usato nella dimostrazione del Lemma 1.9.3 ed usare la formula di Cauchy per dare un limite superiore al modulo delle derivate parziali di f^p in 0 che non dipende da p .)

Varietà complesse

2.1. Varietà complesse

Siamo adesso pronti per definire il concetto di varietà complessa: anche qui si parte da una varietà topologica, e poi tutto segue in maniera analoga al caso delle varietà differenziabili.

Per comodità di chi legge ricordiamo che uno spazio topologico X si dice **varietà topologica di dimensione k** se:

- (1) X è di Hausdorff;
- (2) Ogni punto di X possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^k cioè per ogni $p \in X$ esistono $p \in U \subset X$ aperto, $V \subset \mathbb{R}^k$ aperto e $\varphi: U \rightarrow V$ omeomorfismo. La terna (U, V, φ) si dice **carta**;
- (3a) X è paracompatto.

OSSERVAZIONE 2.1.1. È ben noto (vedi ad esempio [18]) che nella definizione di varietà topologica la condizione di paracompattatezza (3a) può essere sostituita con la

- (3b) ogni componente connessa di X ha base numerabile,

nel senso che se valgono (1) e (2) allora le condizioni (3a) e (3b) sono completamente equivalenti.

Per varietà topologiche di dimensione pari $k = 2n$ in ogni carta (U, V, φ) possiamo considerare V aperto di \mathbb{C}^n .

DEFINIZIONE 2.1.2. Sia X varietà topologica di dimensione $2n$. Chiameremo **atlante complesso** su X una famiglia di carte $(U_i, V_i \subset \mathbb{C}^n, \varphi_i)$ tali che $\bigcup_i U_i = X$.

DEFINIZIONE 2.1.3. Un atlante complesso (U_i, V_i, φ_i) su una varietà X si dice **olomorfo** se per ogni i, j :

$$\begin{array}{ccc}
 & U_i \cap U_j & \\
 \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\
 V_i \supset \varphi_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} & \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j
 \end{array}$$

le **funzioni di transizione** $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono olomorfe.

Sia X una varietà topologica di dimensione pari e consideriamo l'insieme di tutti gli atlanti olomorfi su X :

$$\mathcal{A}_O(X) = \{\mathcal{B} = (U_i, V_i, \varphi_i) \text{ atlante olomorfo su } X\}.$$

Dati due atlanti $\mathcal{B} = (U_i, V_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_O(X)$ e $\mathcal{C} = (W_j, Z_j, \psi_j) \in \mathcal{A}_O(X)$ poniamo

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \in \mathcal{A}_O(X),$$

e le stesse considerazioni del caso degli atlanti differenziabili mostrano che \sim è una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}_O(X)$ e che $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{B} \cup H\mathcal{C} \in \mathcal{A}_O(X)$ per ogni sottofamiglia finita di carte $H \subset \mathcal{C}$.

DEFINIZIONE 2.1.4. Si definisce **varietà complessa di dimensione n** la coppia composta da una varietà topologica X di dimensione $2n$ e una classe di equivalenza di atlanti olomorfi.

DEFINIZIONE 2.1.5. Diremo che $(U \subset X, V \subset \mathbb{C}^n, \varphi)$ è una **carta olomorfa** di una varietà complessa X se appartiene ad almeno un atlante olomorfo fra quelli (tra di loro equivalenti) che inducono la struttura complessa.

Una varietà complessa si dice compatta, connessa ecc. se lo è come spazio topologico.

Diamo alcuni esempi di varietà complesse.

ESEMPIO 2.1.6. Un esempio banale di varietà complessa di dimensione n è dato da un qualunque sottinsieme aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ che ha come atlante olomorfo la carta (U, U, Id) .

ESEMPIO 2.1.7. Se X è varietà complessa, ogni suo aperto non vuoto $U \subset X$ è ancora una varietà complessa della stessa dimensione. Se $\mathcal{B} = (U_i, V_i, \varphi_i)$ è un atlante olomorfo che induce la struttura complessa su X , allora l'atlante

$$\mathcal{B} \cap U = (U_i \cap U, \varphi_i(U \cap U_i) \subset V_i, \varphi_i)$$

induce la struttura complessa su U .

ESEMPIO 2.1.8 (Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$). Ricordiamo la definizione di spazio proiettivo,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim}$$

dove $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$ se esiste $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $w_i = \lambda z_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Dotiamo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ della topologia quoziente: è noto dai corsi di topologia (aka geometria 2) che $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ è compatto, connesso, di Hausdorff ed a base numerabile.

Per ogni $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ denotiamo con $[z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ la corrispondente classe di equivalenza. Gli insiemi aperti

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\}$$

sono tali che $\cup_{i=1}^n U_i = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ mentre le funzioni:

$$\varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n. \quad [z_0, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

sono omeomorfismi (come al solito il cappello dell'invisibilità $\widehat{}$ sovrasta le quantità fantasma). Consideriamo l'atlante complesso $\{(U_i, \mathbb{C}^n, \varphi_i), i = 0, \dots, n\}$ e mostriamo che le funzioni di transizione sono olomorfe: per comodità lo facciamo solo per $\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} & U_0 \cap U_n & \\ \varphi_0 \swarrow & & \searrow \varphi_n \\ \mathbb{C}^n - \{y_n = 0\} & \xrightarrow{\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}} & \mathbb{C}^n - \{w_1 = 0\} \end{array}$$

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right), \quad \varphi_n(z) = \left(\frac{z_0}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n} \right)$$

e quindi

$$\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{y_n}, \frac{y_1}{y_n}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n} \right)$$

è chiaramente olomorfa.

Date due varietà complesse X e Y un'applicazione $F: X \rightarrow Y$ è **olomorfa** se è continua e per ogni coppia di carte olomorfe $(U \subset X, V, \varphi)$ e $(Z \subset Y, W, \psi)$, che portano al diagramma,

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(Z) \cap U & \xrightarrow{F} & Z \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ V \supset \varphi(F^{-1}(Z) \cap U) & \xrightarrow{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} & W \end{array}$$

l'applicazione $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ è una funzione olomorfa tra aperti di \mathbb{C}^n . Le stesse verifiche del caso differenziabile mostrano che basta verificare la precedente condizione per le carte di due atlanti olomorfi fissati, uno per X ed uno per Y .

ESEMPIO 2.1.9. La proiezione al quoziente $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, z \mapsto [z]$, è olomorfa.

Per ogni aperto U in una varietà complessa X denotiamo

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ olomorfa}\}.$$

Per definizione, una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se per ogni carta olomorfa (V, A, ϕ) su X l'applicazione

$$A \cap \phi(U \cap V) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

è olomorfa.

Siano X una varietà complessa di dimensione n e $x \in X$. Per sistema di coordinate olomorfe in x si intende un insieme di funzioni olomorfe z_1, \dots, z_n in un intorno aperto di $x \in U$ tale che l'applicazione

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi(y) = (z_1(y), \dots, z_n(y))$$

sia una carta olomorfa della varietà: con ciò si intende che $\varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$ è aperto e la tripla $(U, \varphi(U), \varphi)$ è una carta olomorfa.

Come conseguenza del teorema di invertibilità locale 1.9.7, se z_1, \dots, z_n sono coordinate locali olomorfe in x , allora una n -upla t_1, \dots, t_n di funzioni olomorfe in un intorno di x sono a loro volta coordinate olomorfe in x se e solo se la matrice $\left(\frac{\partial t_i}{\partial z_j}(x)\right)$ è invertibile.

Chiameremo polidisco centrato in x una qualunque carta olomorfa del tipo

$$X \supset U \xrightarrow{\varphi} \Delta(0, r) \subset \mathbb{C}^n, \quad \varphi(x) = 0.$$

I principi di identità e del massimo modulo si estendono in maniera indolore alle varietà connesse. Come al solito, per una funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}_X(U)$ si definisce il suo luogo di zeri $V(f)$ come

$$V(f) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

TEOREMA 2.1.10. *Siano X una varietà complessa connessa e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.*

- (1) *(identità) il luogo di zeri $V(f)$ ha parte interna non vuota se e solo se f è identicamente nulla;*
- (2) *(massimo modulo) se la funzione $|f|$ possiede un punto di massimo locale, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. 1) si consideri il chiuso $V(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ e sia $A \subset V(f)$ la sua parte interna; se $A \neq \emptyset$, siccome X è connesso esiste $x \in \overline{A} - A$. Basta allora prendere un polidisco Δ centrato in x e osservare che $\Delta \cap A$ è un aperto non vuoto. Per il principio di identità $\Delta \subset V(f)$ e quindi $x \in A$ in contraddizione con l'ipotesi $x \in \overline{A} - A$.

Similmente se $x \in X$ è un punto di massimo locale per $|f|$ allora la restrizione di f ad un polidisco centrato in x è costante e per il principio di identità f è costante. \square

COROLLARIO 2.1.11. *Ogni funzione olomorfa su una varietà complessa connessa e compatta X è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $f \in \mathcal{O}_X(X)$ la funzione continua $|f|$ ammette massimo, quindi f è costante. In altri termini, per ogni varietà X olomorfa, connessa, compatta e non vuota si ha $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$. \square

DEFINIZIONE 2.1.12. Un'applicazione tra due varietà complesse si dice un **biolomorfismo**, od anche un **isomorfismo olomorfo**, se è olomorfa e invertibile con inversa olomorfa.

ESEMPIO 2.1.13 (Scoppiamento di \mathbb{C}^{n+1} nell'origine). Sia $n > 0$ un intero, si consideri il sottoinsieme

$$X = \{(x, [z]) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \mid x, z \text{ linearmente dipendenti}\}$$

e mostriamo che è una varietà complessa di dimensione $n+1$. Per $n = 1$ la proiezione sul primo fattore è bigettiva; consideriamo quindi il caso $n > 1$.

Siano $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\}$ le usuali carte nello spazio proiettivo, allora le carte $\mathbb{C}^{n+1} \times U_i$ formano un atlante olomorfo di $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$. Allora

$$X_i = X \cap \mathbb{C}^{n+1} \times U_i = \{(x, [z]) \in \mathbb{C}^{n+1} \times U_i \mid x_j = \frac{z_j}{z_i} x_i, \quad \forall j\}$$

è un chiuso omeomorfo a \mathbb{C}^{n+1} , con carta

$$\varphi_i: X_i \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \quad \varphi_i(x, [z]) = y, \quad y_i = x_i, \quad y_j = \frac{z_j}{z_i}, \quad j \neq i,$$

ed è facile verificare che la applicazioni $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ sono tutte olomorfe nei loro domini di definizione.

Su ciascuna carta X_i , la proiezione sul primo fattore $\sigma: X \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ si scrive nelle coordinate y come

$$\sigma(y) = (y_0 y_i, \dots, y_{i-1} y_i, y_i, y_{i+1} y_i, \dots, y_n y_i)$$

ed è quindi olomorfa. Si noti che $\sigma^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{P}^n$ e $\sigma^{-1}(x) = (x, [x])$ per ogni $x \neq 0$.

LEMMA 2.1.14. *Sia $f: U \rightarrow V$ un biolomorfismo tra due aperti di \mathbb{C}^{n+1} tale che $0 \in U \cap V$ e $f(0) = 0$. Allora f si solleva, in maniera unica, ad un biolomorfismo $g: \sigma^{-1}(U) \rightarrow \sigma^{-1}(V)$ tale che $\sigma g = f \sigma$.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è chiara in quanto il luogo dove σ è iniettivo, ossia $\sigma^{-1}(U - \{0\})$ è un aperto denso di $\sigma^{-1}(U)$.

Inoltre l'esistenza è chiara se f è la restrizione di un'applicazione lineare invertibile in quanto $g(x, [z]) = (f(x), [f(z)])$ è ben definita e olomorfa.

In generale, a meno di comporre f con un'applicazione lineare invertibile non è restrittivo supporre che f abbia differenziale uguale all'identità nel punto 0, ossia $f(x) = x + h(x)$ con ogni componente di h di molteplicità ≥ 2 nel punto 0.

Per concludere basta adesso dimostrare che l'applicazione

$$g: \sigma^{-1}(U) \rightarrow \sigma^{-1}(V), \quad g(0, [z]) = (0, [z]), \quad g(x, [x]) = (f(x), [f(x)]), \quad x \neq 0,$$

è olomorfa: ripetendo lo stesso argomento per f^{-1} e usando di nuovo l'unicità seguirà che g è un biolomorfismo.

Per dimostrare che g è olomorfa in un intorno di ciascun punto di $\sigma^{-1}(0)$, agendo con cambi lineari di coordinate basta dimostrare che g è olomorfa in un intorno del punto $p = (0, [1, 0, \dots, 0]) \in X_0$. In tale punto abbiamo le coordinate y_i determinate dalle relazioni

$$\varphi_0(x, [z]) = y, \quad y_0 = x_0, \quad y_i = \frac{z_i}{z_0}, \quad z_0 = 1, \quad z_i = y_i, \quad x_i = y_i y_0, \quad i \neq 0.$$

Dunque p è il punto di coordinate $y = 0$ mentre

$$g \varphi_0^{-1}(y) = (f(y_0, y_0 y_1, \dots, y_0 y_n), [f(y_0, y_0 y_1, \dots, y_0 y_n)]).$$

Basta adesso osservare che $\frac{f(y_0, y_0 y_1, \dots, y_0 y_n)}{y_0}$ è olomorfa e non nulla in un intorno di 0. \square

TEOREMA 2.1.15 (di invertibilità globale). *Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione olomorfa e bigettiva tra due varietà complesse della stessa dimensione. Allora f è un biolomorfismo.*

Riportiamo, nella sostanza, la dimostrazione esposta in [6]. È sufficiente dimostrare che ogni applicazione olomorfa e iniettiva $f: X \rightarrow Y$ tra varietà complesse della stessa dimensione è un biolomorfismo locale. Non è quindi restrittivo supporre X, Y aperti di \mathbb{C}^n ed in tal caso tutto segue dai seguenti due lemmi assieme al teorema di invertibilità locale.

LEMMA 2.1.16. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa; come al solito per ogni $x \in U$ denotiamo con $\nu_x(f)$ la molteplicità di f nel punto x . Sia $p \in V(f)$ tale che*

$$0 < d := \nu_p(f) < +\infty \quad e \quad \nu_p(f) \leq \nu_x(f) \quad per \quad ogni \quad x \in V(f).$$

Allora, in un intorno sufficientemente piccolo di p esiste un sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n tali che $f = z_1^d$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni multiindice $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ denotiamo $|a| = \sum a_i$ e con ∂_a l'operatore di derivazione di ordine $|a|$:

$$\partial_a = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{a_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{a_n}.$$

Per ipotesi $\partial_a f(x) = 0$ per ogni $x \in V(f)$ ed ogni a con $|a| < d$ ed esiste b con $|b| = d$ tale che $\partial_b f(p) \neq 0$. A meno di permutazioni degli indici possiamo quindi supporre che esista a con $|a| = d-1$ tale che $\frac{\partial(\partial_a f)}{\partial z_1}(p) \neq 0$. Ponendo $t = t = \partial_a f$ per definizione di d si ha $V(f) \subset V(t)$,

mentre per il teorema di invertibilità locale, in un intorno di p le funzioni t, z_2, \dots, z_n sono un sistema di coordinate olomorfe. Per il Corollario 1.8.8 in un intorno di p si ha $f = t^d g$ con $g(p) \neq 0$. Adesso basta prendere una funzione h tale che $h^d = g$ in un intorno di p e considerare come nuovo sistema di coordinate olomorfe th, z_2, \dots, z_n . \square

LEMMA 2.1.17. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{C}^n$ applicazione olomorfa e iniettiva. Allora la matrice Jacobiana di f è invertibile in ogni punto di U ; in particolare f è aperta ed un biolomorfismo sull'immagine.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = V(\det(J_f))$ il luogo di zeri del determinante della matrice Jacobiana J_f . Supponiamo per assurdo $X \neq \emptyset$ e dimostriamo per induzione su n che ciò implica f non iniettiva. Il caso $n = 1$ è un semplice esercizio ed è lasciato per esercizio.

Supponiamo $n > 1$ e sia $p \in X$ un punto di X in cui la matrice Jacobiana assume rango massimo $r < n$. Se $r = 0$ allora J_f è identicamente nulla su X , mentre per il lemma precedente applicato al determinante della matrice Jacobiana esiste un'applicazione iniettiva ed olomorfa α da un aperto di \mathbb{C}^{n-1} ad X . Le derivate parziali della composizione $f\alpha$ sono tutte nulle e quindi $f\alpha$ è costante, contraddicendo l'iniettività di f .

Se invece $r > 0$, a meno di cambi lineari di coordinate in arrivo ed in partenza possiamo supporre

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) = 1 \text{ se } i = j \leq r; \quad \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) = 0 \text{ altrimenti.}$$

Ma allora possiamo prendere come nuovo sistema di coordinate locali olomorfe

$$(t_1, \dots, t_n) = (f_1, \dots, f_r, z_{r+1}, \dots, z_n), \quad \frac{\partial t_i}{\partial z_j} = \delta_{ij},$$

rispetto alle quali l'applicazione f si scrive

$$f(t, z) = (t_1, \dots, t_r, g_{r+1}(t), \dots, g_n(t)), \quad \frac{\partial g_i}{\partial t_j}(p) = 0 \quad \forall i, j > r.$$

Siccome $n > r > 0$, per l'ipotesi induttiva l'applicazione

$$t = (0, \dots, 0, t_{r+1}, \dots, t_n) \rightarrow (g_{r+1}(t), \dots, g_n(t))$$

non è iniettiva ed a maggior ragione non è iniettiva nemmeno f . \square

È ben noto a tutti che l'analogo del teorema di invertibilità globale non vale per le varietà analitiche reali: e.g. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

ESERCIZIO 2.1.18. Mostrare che se X, Y sono varietà complesse di dimensione n, m rispettivamente, allora il prodotto $X \times Y$ è una varietà complessa di dimensione $n + m$.

2.2. Incollamenti e scoppamenti

Intuitivamente una varietà complessa di dimensione n è ottenuta incollando assieme degli aperti di \mathbb{C}^n in maniera opportuna sia dal punto di vista topologico che analitico complesso. Più in generale esistono delle procedure per incollare tra di loro varietà complesse della stessa dimensione per costruirne di nuove. Una di queste procedure, semplice e utile al tempo stesso è la seguente:

Supponiamo di avere il **dato di incollamento** composto da:

- (la base) un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i, i \in I$, di una varietà complessa connessa X ;
- (le pezze) per ogni indice $i \in I$ una varietà complessa Y_i di dimensione n ed un'applicazione olomorfa $p_i: Y_i \rightarrow U_i$;
- (le funzioni di incollamento) una famiglia di biolomorfismi

$$f_{ij}: p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I,$$

tali che

$$p_i f_{ij} = p_j: p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow U_i \cap U_j \quad \forall i, j \in I,$$

$$(2.1) \quad f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij} = \text{Id} \text{ su } p_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad \forall i, j, k \in I.$$

La condizione (2.1) viene detta in gergo “condizione di cociclo” ed immediato verificare che è equivalente sia alla condizione

$$(2.2) \quad f_{ij} = f_{ik}f_{kj}: p_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \rightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad \forall i, j, k \in I.$$

che alla condizione

$$(2.3) \quad \begin{cases} f_{ii} = 0 & \text{per ogni } i \in I, \\ f_{ij} = f_{ji}^{-1} & \text{per ogni } i, j \in I, \\ f_{jk}f_{ki}f_{ij} = \text{Id} & \text{per ogni } i, j, k \in I. \end{cases}$$

Infatti dalle $f_{jk}f_{ik}^{-1}f_{ij} = \text{Id}$ segue (per $i = j = k$) $f_{ii} = \text{Id}$ per ogni i , poi (per $i = k$) che $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ ed infine che $f_{ij} = f_{ik}f_{jk}^{-1} = f_{ik}f_{kj}$.

TEOREMA 2.2.1 (di incollamento). *Siano date la base $X = \cup U_i$, le pezze $p_i: Y_i \rightarrow U_i$ e le funzioni di incollamento f_{ij} come sopra. Allora esiste una varietà complessa Y di dimensione n assieme ad un'applicazione olomorfa $p: Y \rightarrow X$ e biolomorfismi $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ tali che $p q_i = p_i$ per ogni i*

$$f_{ij} = q_i^{-1}q_j: p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j), \quad \forall i, j \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplificare (di molto) la dimostrazione supponiamo che ciascuna varietà Y_i sia a base numerabile; negli esempi di nostro interesse e nelle prossime applicazioni tale condizione è sempre soddisfatta.

Iniziamo con il costruire Y come spazio topologico e $p: Y \rightarrow X$ come applicazione continua. Denotiamo con $W = \coprod Y_i$ l'unione disgiunta degli spazi topologici Y_i : nella topologia dell'unione disgiunta un sottoinsieme $U \subset W$ è aperto se e solo se $U \cap Y_i$ è aperto per ogni i ; in particolare ciascun Y_i è aperto in W . Dati $x, y \in W$ definiamo $x \sim y$ se, detti $i, j \in I$ gli indici tali che $x \in Y_i, y \in Y_j$ si ha $p_i(x) = p_j(y) \in U_i \cap U_j$ e $f_{ij}(y) = x$.

La relazione \sim è di equivalenza: le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva seguono facilmente dalle condizioni $f_{ii} = \text{Id}, f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ e $f_{ij} = f_{ik}f_{kj}$. Definiamo Y il quoziente topologico

$$q: W \rightarrow Y = W / \sim.$$

Per la proprietà universale delle identificazioni, l'applicazione continua

$$W \rightarrow X, \quad x \mapsto p_i(x) \quad \text{se } x \in Y_i,$$

si fattorizza ad un'applicazione continua $p: Y \rightarrow X$.

Per ogni $i \in I$ denotiamo con $q_i: Y_i \rightarrow Y$ la restrizione di q a Y_i : per costruzione $p q_i = p_i: Y_i \rightarrow U_i$ per ogni i e $q_i(x) = q_j(y)$ se e solo se $x = f_{ij}(y)$.

Proviamo adesso che le applicazioni continue $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ sono omeomorfismi, ossia aperte e bigettive. Per dimostrare che q_i è aperta bisogna provare che per ogni j ed ogni aperto $V \subset Y_i$ si ha $q^{-1}(q_i(V)) \cap Y_j$ aperto in Y_j ; ciò è vero in quanto

$$q^{-1}(q_i(V)) \cap Y_j = \{y \in Y_j \mid \exists x \in V, f_{ij}(y) = x\} = f_{ij}(V \cap p_i^{-1}(U_i \cap U_j)).$$

Sempre per definizione di \sim dati due punti $x, y \in Y_i$ si ha $q_i(x) = q_i(y)$ se e solo se $x = f_{ii}(y)$ ossia se e solo se $x = y$. Per finire, sia $u \in p^{-1}(U_i)$ e prendiamo $w \in W$ tale che $q(w) = u$. Se $w \in Y_j$ allora $p(u) = p_j(w) \in U_i \cap U_j$, dunque $u = q(w) = q_i(f_{ij}(w))$. Abbiamo quindi dimostrato, nell'ordine, che $q_i: Y_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ è continua, aperta, iniettiva e surgettiva.

Siccome la varietà connessa X è uno spazio a base numerabile, il ricoprimento aperto U_i possiede un sottoricoprimento numerabile: $\exists \gamma: \mathbb{N} \rightarrow I$ tale che $X = \cup_j U_{\gamma(j)}$ allora Y è unione numerabile degli aperti $p^{-1}(U_{\gamma(j)})$, ciascuno omeomorfo allo spazio topologico a base numerabile $Y_{\gamma(j)}$. Quindi anche Y è a base numerabile.

Dati $x, y \in Y, x \neq y$, se $p(x) \neq p(y)$, siccome X è di Hausdorff e p è continua ne segue che x, y hanno intorni disgiunti in Y . Se invece $p(x) = p(y) \in U_i$ allora x, y appartengono entrambi all'aperto $p^{-1}(U_i)$ che è di Hausdorff. Abbiamo dimostrato che Y è di Hausdorff.

Per finire usiamo gli omeomorfismi q_i per trasportare gli atlanti olomorfi delle varietà complesse Y_i in un atlante complesso di X . La dimostrazione che tale atlante è olomorfo equivale nella sostanza (dettagli per esercizio) al fatto che le applicazioni $q_i q_j^{-1}$ sono olomorfe nei loro domini di definizione. Basta adesso osservare che $q_i^{-1}q_j = f_{ij}$. Dunque Y è una varietà complessa ed ogni q_i è un biolomorfismo sull'immagine. \square

Osserviamo che il dato (Y, p, q_i) costruito nel teorema di incollamento è unico a meno di isomorfismo: se Z è una varietà complessa dotata di un'applicazione olomorfa $r: Z \rightarrow X$ e biolomorfismi $s_i: Y_i \rightarrow r^{-1}(U_i)$ tali che $rs_i = p_i$ per ogni i e $f_{ij} = s_i^{-1}s_j$ per ogni i, j , allora le applicazioni $s_i q_i^{-1}$ si incollano ad un biolomorfismo $\varphi: Y \rightarrow Z$ tale che $r\varphi = p$.

Un tipico esempio di incollamento si ha nello scoppimento di un punto p di una varietà complessa X . A tal fine prendiamo una carta locale $X \supset U_0 \xrightarrow{\sigma} V \subset \mathbb{C}^n$ con $p \in U_0$, $\varphi(p) = 0$ e sia $Y_0 \xrightarrow{\sigma} V$ lo scoppimento dell'origine (Esempio 2.1.13).

Usando il dato di incollamento $p_0 = \varphi^{-1}\sigma$, $Y_1 = U_1 = X - \{p\}$, $p_1 = \text{Id}$ si ottiene una nuova varietà $Y \rightarrow X$ detta **scoppimento di X in p** . Segue dal Lemma 2.1.14 che la classe di biolomorfismo di Y non dipende dalla scelta della carta locale.

Geometricamente, quello che abbiamo fatto è lasciare invariato $X - \{p\}$ e sostituire al posto di p uno spazio proiettivo di dimensione $\dim X - 1$, il tutto in modo da ottenere una nuova varietà complessa della stessa dimensione.

2.3. Chiusi analitici e funzioni meromorfe su varietà

Le nozioni di chiuso analitico e funzione meromorfa si estendono in maniera semplice e naturale dagli aperti di \mathbb{C}^n alle varietà complesse. Se $U \subset X$ è un aperto in una varietà complessa e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, continuiamo ad indicare con

$$V(f) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

il luogo di zeri di f .

DEFINIZIONE 2.3.1. Un sottoinsieme C di una varietà complessa X si dice un **chiuso analitico** se esistono un ricoprimento aperto $X = \cup U_i$ e sottoinsiemi *finiti* $E_i \subset \mathcal{O}_X(U_i)$ tali che per ogni indice i si ha

$$C \cap U_i = V(E_i) = \bigcap_{f \in E_i} V(f).$$

LEMMA 2.3.2. Sia C un chiuso analitico proprio di una varietà connessa X . Allora C non ha parte interna e $X - C$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione che $C^\circ = \emptyset$ è del tutto simile a quella esposta nel Lemma 1.8.4 e viene pertanto lasciata per esercizio. Diamo invece una dimostrazione della connessione di $X - C$ diversa da quella proposta nel Teorema 1.8.5.

Se X è un aperto convesso di \mathbb{C} , allora C è un sottoinsieme discreto e la connessione di $X - C$ è chiara. Se X è un aperto convesso di \mathbb{C}^n , per ogni coppia di punti $x, y \in X - C$ gli insiemi

$$Y = \{t \in \mathbb{C} \mid tx + (1-t)y \in X\}, \quad D = \{t \in \mathbb{C} \mid tx + (1-t)y \in C\}$$

sono rispettivamente un aperto convesso ed un chiuso analitico di Y . Quindi $Y - D$ è connesso e x, y appartengono alla medesima componente connessa di $X - C$.

In generale, sia A una componente connessa di $X - C$ e fissiamo un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$, $i \in I$, con ciascun U_i biolomorfo ad un aperto convesso di \mathbb{C}^n . Abbiamo dimostrato che $U_i - C$ è non vuoto e connesso per ogni i e quindi vale $U_i - C \subset A$ oppure $(U_i - C) \cap A = \emptyset$. Dunque se denotiamo con $S \subset I$ l'insieme degli indici i tali che $U_i - C \subset A$, allora vale

$$A = \bigcup_{i \in S} (U_i - C), \quad X = \bigcup_{i \in S} U_i \cup \bigcup_{i \notin S} U_i.$$

Se $S = I$ allora $A = X - C$, mentre se $S \neq I$ per la connessione di X esistono $i \in S$ e $j \notin S$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Ma allora anche

$$\emptyset \neq U_i \cap U_j - C = (U_i - C) \cap (U_j - C) \subset A \cap (U_j - C) = \emptyset$$

che è una contraddizione. □

Per ogni varietà complessa X l'anello delle funzioni meromorfe è definito

$$\mathcal{M}_X(X) = \frac{\{\text{espressioni meromorfe } (U_i, f_i/g_i)\}}{\sim}$$

dove un'espressione meromorfa $(U_i, f_i/g_i)$ è il dato di un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$ e di una famiglia di frazioni olomorfe f_i/g_i (quindi $f_i, g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ e $V(g_i)^\circ = \emptyset$) tali che $f_i g_j = f_j g_i$ in $U_i \cap U_j$ per ogni i, j .

Per definizione $(U_i, f_i/g_i) \sim (V_l, p_l/q_l)$ se per ogni i, l vale $f_i q_l = p_l g_i$ nell'aperto $U_i \cap V_l$.

È chiaro che ogni funzione meromorfa possiede rappresentanti $(V_i, f_i/g_i)$ con ogni V_i polidisco aperto.

LEMMA 2.3.3. *L'anello $\mathcal{M}_X(X)$ delle funzioni meromorfe su di una varietà connessa X è un campo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi \in \mathcal{M}_X(X)$ rappresentata da $(U_i, f_i/g_i)$, $i \in I$; bisogna dimostrare che $f_i = 0$ per ogni i , ossia che φ è la funzione nulla, oppure che $V(f_i)^o = \emptyset$ per ogni i e quindi che esiste φ^{-1} rappresentata da $(U_i, g_i/f_i)$.

Consideriamo l'aperto $A = \cup_i V(f_i)^o$ e dimostriamo che $A = \bar{A}$. Dato $x \in \bar{A}$ esiste un indice j ed un aperto connesso W tali che $x \in W \subset U_j$. Siccome $W \cap A \neq \emptyset$ esiste un indice i tale che $W \cap V(f_i)^o \neq \emptyset$. Dato che in $W \cap V(f_i)^o \subset U_i \cap U_j$ vale $f_j g_i = f_i g_j = 0$ e g_i non divide 0 in alcun aperto di U_i , ne segue $f_j = 0$ su tutto $W \cap V(f_i)^o$ e per il principio di identità $f_j = 0$ su W . Dunque $W \subset V(f_j)^o \subset A$.

Siccome X è connesso si ha $A = \emptyset$, ed in tal caso è definita φ^{-1} , oppure $A = X$. Nel secondo caso, per ogni indice i ed ogni $x \in U_i$ esiste un intorno aperto connesso $x \in W \subset U_i$ ed un indice j tale che $x \in V(f_j)^o \subset U_j$. Lo stesso argomento usato sopra mostra che $f_i = 0$ su W e quindi $A = X$ implica $f_i = 0$ per ogni i . \square

ESEMPIO 2.3.4. Siano $p, q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ polinomi omogenei del medesimo grado con $q \neq 0$, allora la loro frazione olomorfa p/q (in \mathbb{C}^{n+1}) discende ad una funzione meromorfa su \mathbb{P}^n : il motivo sostanziale è che essendo p, q omogenei dello stesso grado, il valore $p(z)/q(z)$ non cambia se $z = (z_0, \dots, z_n)$ viene moltiplicata per un numero complesso non nullo. In maniera più pedante, se $\mathbb{P}^n = \cup U_i$, $i = 0, \dots, n$, denota il solito ricoprimento affine $U_i = \{z_i \neq 0\}$, allora p/q è rappresentata dall'espressione meromorfa

$$(U_i, p_i/q_i), \quad p_i = p \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right), \quad q_i = q \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right).$$

Si noti che tali quozienti definiscono un sottocampo

$$\mathbb{C} \subset Q = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n] \text{ omogenei stesso grado}\} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$$

e dimostriamo al termine di questo capitolo che vale l'uguaglianza $Q = \mathcal{M}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$.

Dunque ad ogni varietà complessa connessa X abbiamo associato due enti algebrici, entrambi invarianti per biolomorfismi: l'anello delle funzioni olomorfe $\mathcal{O}_X(X)$ ed il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}_X(X)$.

Abbiamo visto che se X è anche compatta l'anello $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$ non ci aiuta molto a comprendere la geometria di X : quindi non rimane altro che "buttarsi" su $\mathcal{M}_X(X)$. Qui le cose vanno decisamente meglio anche grazie al seguente risultato, che dimostriamo più avanti come Corollario 2.8.7:

TEOREMA 2.3.5 (Teorema di Siegel). *Sia X varietà complessa connessa e compatta di dimensione n . Allora il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}_X(X)$ è una estensione finitamente generata di \mathbb{C} con grado di trascendenza $\leq n$.*

OSSERVAZIONE 2.3.6. Il nome deriva dalla dimostrazione (che qui riportiamo nella sostanza) data da C. L. Siegel nel 1955. Tuttavia, sembra che il primo a dimostrare il teorema fu un certo W. Thimm nel 1939 nella propria tesi, mai pubblicata e rimasta a lungo ignota.

Più che per l'importanza in sé del teorema, il motivo per cui faremo la dimostrazione è di tipo didattico-pedagogico: faremo intervenire tutta una serie di tecniche basilari che si ritrovano spesso in geometria algebrica e complessa.

Iniziamo con alcuni richiami sulle estensioni di campi utili a comprendere sia l'enunciato che la dimostrazione del teorema di Siegel.

Sia $\mathbb{K} \subset F$ una estensione di campi (ad esempio $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_X(X)$ per una varietà connessa X). Ricordiamo che un elemento $\alpha \in F$ si dice:

- (1) **algebrico** su \mathbb{K} se l'applicazione

$$\mathbb{K}[t] \rightarrow F, \quad p(t) \mapsto p(\alpha),$$

non è iniettiva;

(2) **trascendente** su \mathbb{K} se l'applicazione

$$\mathbb{K}[t] \rightarrow F, \quad p(t) \mapsto p(\alpha),$$

è iniettiva.

L'estensione $\mathbb{K} \subset F$ si dice **algebraica** se ogni elemento di F è algebrico su \mathbb{K} . Si dice **algebricamente chiusa** se ogni elemento di F algebrico su \mathbb{K} appartiene a \mathbb{K} . L'aggiunzione simbolica di radici (vedi [2]) implica che un campo \mathbb{K} è algebricamente chiuso se e solo se ogni estensione $\mathbb{K} \subset F$ è algebricamente chiusa.

Dato un qualunque sottoinsieme $S \subset F$ denotiamo con $\mathbb{K}(S) \subset F$ il più piccolo sotto-campo contenente \mathbb{K} ed S . L'estensione $\mathbb{K} \subset F$ si dice **finitamente generata** se esiste un sottoinsieme finito $S \subset F$ tale che $\mathbb{K}(S) = F$.

Se $\alpha \in F$ è algebrico su \mathbb{K} e d è minimo grado di un polinomio non nullo $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ tale che $p(\alpha) = 0$, allora $1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}$ è una base di $\mathbb{K}(\alpha)$ come spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Se invece $\alpha \in F$ è trascendente su \mathbb{K} allora il campo

$$\mathbb{K}(\alpha) = \left\{ \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \mid p, q \in \mathbb{K}[t], q \neq 0 \right\}$$

è isomorfo al campo delle funzioni razionali su \mathbb{K} .

TEOREMA 2.3.7 (dell'elemento primitivo). *Sia $\mathbb{K} \subset F$ un'estensione algebrica finitamente generata di campi di caratteristica 0. Allora esiste un elemento $\theta \in F$ (detto primitivo) tale che $F = \mathbb{K}(\theta)$; equivalentemente esiste $d > 0$ tale che $1, \theta, \dots, \theta^{d-1}$ è una base di F come \mathbb{K} -spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Vedi ad esempio [24, Sezione 6.10] oppure [2, Sezione 14.4]. \square

COROLLARIO 2.3.8. *Un'estensione algebrica $\mathbb{K} \subset F$ di campi di caratteristica 0 è finitamente generata se e solo se esiste un intero positivo b tale che ogni $\alpha \in F$ è radice di un polinomio di grado $\leq b$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solamente l'implicazione non banale. Supponiamo per assurdo che F non sia finitamente generato su \mathbb{K} , possiamo allora costruire ricorsivamente una successione infinita di elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in F$ con $\alpha_{i+1} \notin \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$. Dunque la dimensione come \mathbb{K} -spazio vettoriale dei sottocampi $F_i = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ non è limitata ed esiste n tale che dimensione $d := \dim_{\mathbb{K}} F_n > b$. Ma per il teorema dell'elemento primitivo si ha $F_n = \mathbb{K}(\theta)$ con $1, \theta, \dots, \theta^{d-1}$ linearmente indipendenti e questo implica che l'unico polinomio di grado $\leq b$ che annulla θ è quello banale. \square

DEFINIZIONE 2.3.9. Sia $\mathbb{K} \subset F$ estensione di campi. Degli elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ si dicono **algebricamente indipendenti** su \mathbb{K} se l'omomorfismo di anelli

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow F, \quad p(t_1, \dots, t_n) \mapsto p(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

è iniettivo. Altrimenti si dicono algebricamente dipendenti.

ESERCIZIO 2.3.10. Provare che per ogni $p, q \in \mathbb{Q}[t]$ ed ogni numero reale θ , i due numeri reali $p(\theta), q(\theta)$ sono algebricamente dipendenti su \mathbb{Q} . (Suggerimento: provare che esiste una costante $0 < C \leq 1/2$ tale che per ogni $d \gg 0$ l'insieme $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \deg(p^a q^b) \leq d\}$ contiene almeno Cd^2 elementi.)

DEFINIZIONE 2.3.11. Il **grado di trascendenza** di una estensione di campi $\mathbb{K} \subset F$ è l'estremo superiore del numero di elementi algebricamente indipendenti.

Dunque il grado di trascendenza assume valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e vale 0 se e solo se l'estensione è algebrica.

Dire che l'estensione $\mathbb{K} \subset F$ ha grado di trascendenza $\leq n$ è del tutto equivalente a dire che non esistono omomorfismi iniettivi di anelli

$$\mathbb{K}[t_0, \dots, t_n] \rightarrow F$$

che estendono l'inclusione naturale $\mathbb{K} \subset F$.

ESEMPIO 2.3.12. L'estensione $\mathbb{C} \subset \mathbb{Q}$ dell'Esempio 2.3.4 ha grado di trascendenza $\geq n$ dato che le n funzioni meromorfe $\varphi_i = z_i/z_0$, $i = 1, \dots, n$ sono algebricamente indipendenti: per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$, la restrizione di $p(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ all'aperto $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ restituisce il polinomio p .

OSSERVAZIONE 2.3.13. Supponiamo che l'estensione $\mathbb{K} \subset F$ abbia grado di trascendenza $n < \infty$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ algebricamente indipendenti su \mathbb{K} . Allora l'estensione $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset F$ è algebrica. Infatti, l'applicazione

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad p(t_1, \dots, t_n) \mapsto p(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

è iniettiva e se esistesse $\beta \in F$ trascendente su $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ allora l'applicazione

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[x] \rightarrow F, \quad p(x) \mapsto p(\beta),$$

sarebbe iniettiva e lo stesso si avrebbe per la composizione

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n, x] \rightarrow \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[x] \rightarrow F, \quad t_i \mapsto \alpha_i, x \mapsto \beta.$$

Le nozioni di indipendenza algebrica si comporta in maniera simile a quella di indipendenza lineare. In particolare vale l'analogo del teorema di scambio.

TEOREMA 2.3.14 (di scambio). *Sia $\mathbb{K} \subset F$ estensione di campi e siano:*

- (1) $a_1, \dots, a_n \in F$ tali che l'estensione $\mathbb{K}(a_1, \dots, a_n) \subset F$ è algebrica;
- (2) $b_1, \dots, b_m \in F$ algebricamente indipendenti su \mathbb{K} .

Allora $m \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. Omessa: il teorema di scambio si trova ampiamente in letteratura, spesso in enunciati equivalenti seppur non identici. Vedi ad esempio [11, 16, 24]. \square

In queste note non avremo bisogno del teorema di scambio, sebbene esso sia utilissimo a chiarire il concetto di grado di trascendenza e necessario per poter definire le basi di trascendenza (come insiemi massimali di elementi algebricamente indipendenti).

ESEMPIO 2.3.15. Il teorema di Siegel non vale se la varietà X non è compatta. Ad esempio, si consideri la varietà $X = \mathbb{C}$ (di dimensione 1) e la successione di funzioni olomorfe $f_n = e^{z^n}$, $n = 1, 2, \dots$

Proviamo che le funzioni f_n sono algebricamente indipendenti: siccome $f_n^m = e^{mz^n}$ ciò equivale a dire che le funzioni 1 e e^{mz^n} , $m, n > 0$, sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una relazione non banale di dipendenza lineare:

$$a_{0,0} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} a_{n,m} e^{mz^n} = 0, \quad a_{n,m} \in \mathbb{C}, \quad a_{N,M_N} \neq 0.$$

Dividendo per $e^{M_N z^N}$ e facendo il limite per $z \in \mathbb{R}$ tendente a $+\infty$ si ottiene una contraddizione.

ESEMPIO 2.3.16 (Tori complessi). Fissiamo $n > 0$ e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n} \in \mathbb{C}^n$ che formano una base come \mathbb{R} -spazio vettoriale e denotiamo con $\Gamma = \{\sum a_i \gamma_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^n$ il sottogruppo abeliano da essi generato. Esiste allora un isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ che identifica Γ con \mathbb{Z}^{2n} : questo implica che Γ agisce per traslazioni su \mathbb{C}^n in maniera propriamente discontinua, che la proiezione $p: \mathbb{C}^n \rightarrow T := \mathbb{C}^n / \Gamma$ è un rivestimento e che T è omeomorfo al toro $(S^1)^{2n}$. Usando gli inversi locali di p come carte complesse, si ottiene un atlante olomorfo e quindi una struttura di varietà complessa su T che rende p un biolomorfismo locale. La varietà T viene detta **toro complesso** di dimensione n .

La teoria dei tori complessi è un argomento ricco ed affascinante: al termine di questo corso sarete in grado di leggere il (bellissimo) libro di George R. Kempf [13] dedicato all'argomento. Alcune cose (non banali) che si possono dimostrare (non lo faremo) sono:

- (1) per ogni $n > 0$ fissato, sebbene i tori complessi \mathbb{C}^n / Γ di dimensione n sono tutti diffeomorfi tra loro, al variare di Γ non sono biolomorfi: il numero di classi di biolomorfismo distinte ha la cardinalità del continuo.
- (2) le funzioni meromorfe sui tori complessi di dimensione 1 hanno grado di trascendenza 1 su \mathbb{C} ;
- (3) per ogni $n \geq 2$ ed ogni $0 \leq k \leq n$ esiste un toro complesso di dimensione n il cui campo delle funzioni meromorfe ha grado di trascendenza k . Dunque per ogni $n \geq 2$ esistono tori complessi di dimensione n le cui uniche funzioni meromorfe sono le costanti.

2.4. Spazio tangente e sottovarietà

Ogni varietà complessa X di dimensione (complessa) n è in particolare una varietà differenziabile di dimensione (reale) $2n$ e quindi ogni punto $x \in X$ possiede uno spazio tangente $T_{x,\mathbb{R}}$ che è uno spazio vettoriale reale di dimensione reale $2n$. Ricordiamo che $T_{x,\mathbb{R}}$ è definito in maniera astratta e *coordinate free* come lo spazio delle derivazioni dell'anello dei germi delle funzioni C^∞ (vedi e.g. [23]).

Possiamo ripetere la medesima costruzione sostituendo \mathbb{R} con \mathbb{C} ed i germi di funzioni differenziabili con i germi di funzioni olomorfe ed ottenere lo **spazio tangente complesso** $T_x = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C})$: esplicitando la nozione di derivazione si ha quindi

$$T_x = \{\alpha: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{-lineare, } \alpha(fg) = \alpha(f)g(x) + f(x)\alpha(g)\}.$$

La definizione di $\mathcal{O}_{X,x}$ è esattamente la stessa data all'inizio della Sezione 1.7, beninteso considerando funzioni olomorfe su sottoinsiemi aperti di X anziché di U . Le derivazioni possono essere sommate e moltiplicate per scalare; dunque T_x è un sottospazio vettoriale complesso di $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C})$.

Ogni sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n tali che $z_1(x) = \dots = z_n(x) = 0$ determina un isomorfismo \mathbb{C} -lineare di anelli $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Di conseguenza, le coordinate olomorfe z_1, \dots, z_n definiscono un isomorfismo

$$\begin{aligned} T_x &\simeq \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}, \mathbb{C}) \\ &\simeq \{\alpha: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{-lineare, } \alpha(fg) = \alpha(f)g(0) + f(0)\alpha(g)\}. \end{aligned}$$

Le usuali derivate parziali, calcolate nell'unico punto possibile $z = 0$, determinano quindi n vettori tangenti:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_i}(0).$$

LEMMA 2.4.1. *Nelle notazioni precedenti, i vettori tangenti $\frac{\partial}{\partial z_i}$ sono una base dello spazio vettoriale complesso T_x .*

DIMOSTRAZIONE. Le derivazioni $\frac{\partial}{\partial z_i}$ sono linearmente indipendenti in quanto la matrice

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i}(z_j) \right)$$

è uguale all'identità.

Sia $\alpha: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ una derivazione, consideriamo i numeri complessi $a_i = \alpha(z_i)$ e mostriamo che $\alpha = \sum a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

Data una qualunque serie di potenze $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ possiamo scrivere

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^n z_i f_i, \quad f_i \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

Sebbene le f_i non sono in generale uniche, il loro valore in 0 è univocamente determinato da f , infatti per ogni i si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial z_i} f_j(0) + z_j(0) \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = f_i(0).$$

Osserviamo che α si annulla sulle costanti: infatti per la regola di Leibniz si ha $\alpha(1) = \alpha(1)1 + 1\alpha(1)$ da cui $\alpha(1) = 0$ e per linearità $\alpha(c) = 0$ per ogni $c \in \mathbb{C}$. Applicando α alla funzione f si ottiene quindi

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^n \alpha(z_i) f_i(0) + z_i(0) \alpha(f_i) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

come volevasi dimostrare. \square

Anche il concetto di sottovarietà complessa è del tutto analogo al concetto di sottovarietà differenziabile, per cui trattiamo il concetto molto velocemente.

DEFINIZIONE 2.4.2. Sia X una varietà complessa di dimensione n . Un sottoinsieme chiuso $Z \subset X$ si dice una sottovarietà di dimensione p se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subset X$ ed un biolomorfismo $\varphi: U \rightarrow \Delta(0, r)$ (polidisco aperto in \mathbb{C}^n di centro 0) talché $\varphi(Z \cap U) = \{z \in \Delta(0, r) \mid z_{p+1} = \dots = z_n = 0\}$.

In particolare ogni sottovarietà $Z \subset X$ è a sua volta una varietà complessa: basta infatti considerare come atlante olomorfo la restrizioni delle applicazioni φ descritte nella Definizione 2.4.2.

ESEMPIO 2.4.3. Siano U un aperto di \mathbb{C}^n e $f \in \mathcal{O}(U)$. Abbiamo allora in U il chiuso analitico $V(f) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$. Se in ogni $x \in V(f)$ esiste almeno una derivata parziale di f che non annulla, allora $V(f)$ è una sottovarietà di dimensione $n - 1$.

Infatti, se z_1, \dots, z_n sono un sistema di coordinate in \mathbb{C}^n e ad esempio $\frac{\partial f}{\partial z_1}(x) \neq 0$, allora per il teorema di invertibilità locale l'applicazione

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi(z) = (f(z), z_2, \dots, z_n),$$

è un biolomorfismo in un intorno di x che manda $V(f)$ nell'iperpiano dato dall'annullarsi della prima coordinata.

ESEMPIO 2.4.4 (Ipersuperfici proiettive). Sia $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ un polinomio omogeneo. Allora possiamo definire il luogo di zeri proiettivo di F come

$$V(F) = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0\}.$$

Il fatto che F sia omogeneo ci assicura che la definizione di $V(F)$ è ben posta: infatti se F ha grado d , allora per ogni $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ed ogni $x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ si ha

$$F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$$

e quindi $F(x) = 0 \iff F(\lambda x) = 0$.

Anche le derivate parziali di F sono polinomi omogenei, e possiamo quindi definire i loro luoghi di zeri proiettivi $V(\frac{\partial F}{\partial z_i}) \subset \mathbb{P}^n$. Vale inoltre la **Formula di Eulero**:

$$F = \frac{1}{\deg(F)} \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial F}{\partial z_i},$$

la cui (semplice) dimostrazione viene lasciata per esercizio.

PROPOSIZIONE 2.4.5. *Nelle notazioni precedenti, se*

$$V(F) \cap V\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) \cap \dots \cap V\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right) = \emptyset,$$

ossia se in ogni punto di $V(F)$ esiste almeno una derivata parziale che non si annulla, allora $V(F)$ è una sottovarietà complessa di dimensione $n - 1$.

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo come al solito con $U_i = \{[z] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\}$ il consueto atlante olomorfo fatto con le parti affini dello spazio proiettivo. Allora per ogni i si hanno le coordinate affini $y_j = z_j/z_i$, $j \neq i$, e

$$V(F) \cap U_i = \{y \in U_i \mid F(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0\}.$$

Dunque $V(F) \cap U_i$ è chiuso in U_i e di conseguenza $V(F)$ è chiuso in \mathbb{P}^n . Per l'Esempio 2.4.3 basta dimostrare che in ogni punto di $V(F) \cap U_i$ la funzione

$$f(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = F(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

ha almeno una derivata non nulla. Sia $x \in V(F) \cap U_i$ e supponiamo per assurdo $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x) = 0$ per ogni $j \neq i$. Siccome $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x) = \frac{\partial F}{\partial z_j}(x)$, dalla formula di Eulero segue

$$0 = F(x) = \frac{1}{\deg(F)} x_i \frac{\partial F}{\partial z_i}(x)$$

e siccome $x_i = 0$ si ottiene che anche $\frac{\partial F}{\partial z_i}(x) = 0$, in contraddizione con le ipotesi. \square

2.5. Fibrati e line bundles

Notazione: Quando abbiamo un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$, $i \in I$, è molto comodo usare la seguente notazione

$$U_{ij} = U_i \cap U_j, \quad U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k, \quad U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

Sia X una varietà complessa, allora anche $X \times \mathbb{C}^m$ è una varietà complessa: se (U_i, V_i, φ_i) è un atlante olomorfo per X , allora $(U_i \times \mathbb{C}^m, V_i \times \mathbb{C}^m, \varphi_i \times \text{Id})$ è un atlante olomorfo per $X \times \mathbb{C}^m$ e la proiezione $p: X \times \mathbb{C}^m \rightarrow X$ è olomorfa. Chiameremo la terna $(X \times \mathbb{C}^m, p, X)$ **fibrato vettoriale banale di rango m** su X .

Consideriamo un aperto $U \subset X$ ed un'applicazione $F: U \times \mathbb{C}^m \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$ che commuta con la proiezione $p: U \times \mathbb{C}^m \rightarrow U$, ossia $pF = p$, ossia $F(x, v) = (x, F_2(x, v))$ per ogni $(x, v) \in U \times \mathbb{C}^m$. Diremo che F è **lineare sulle fibre** se vale

$$F(x, v) = (x, A(x)v)$$

con $A(x) \in M_{m,m}(\mathbb{C})$. Ciò equivale a chiedere che per ogni $x \in U$ l'applicazione

$$\mathbb{C}^m \xrightarrow{v \mapsto (x,v)} \{x\} \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{F} \{x\} \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{(x,w) \mapsto w} \mathbb{C}^m$$

è lineare.

Si noti che F è olomorfa se e solo se l'applicazione $A: U \rightarrow M_{m,m}(\mathbb{C})$ è olomorfa e F è bigettiva se e solo se $A(x)$ è invertibile per ogni x .

L'idea adesso è quella di definire i fibrati vettoriali per incollamento di fibrati banali, con le funzioni di transizione lineari sulle fibre. Per non differire troppo dalla letteratura sull'argomento iniziamo però da una definizione diversa per poi trattare gli incollamenti in un secondo momento.

DEFINIZIONE 2.5.1. Sia X una varietà complessa. Un **fibrato vettoriale olomorfo di rango m** su X è il dato di una famiglia E_x , $x \in X$, di spazi vettoriali complessi di dimensione m , assieme ad una struttura di varietà complessa sulla loro unione disgiunta $E = \coprod_x E_x$ tale che:

- (1) la proiezione naturale

$$p: E \rightarrow X, \quad p(v) = x \text{ per ogni } x \in X, v \in E_x,$$

è olomorfa;

- (2) esistono un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$ e una famiglia di applicazioni olomorfe

$$\tau'_i: p^{-1}(U_i) = \coprod_{x \in U_i} E_x \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad i \in I,$$

che ristrette a ciascun E_x , $x \in U_i$, siano *isomorfismi lineari* e tali che le applicazioni

$$\tau_i := (p, \tau'_i): p^{-1}(U_i) = \coprod_{x \in U_i} E_x \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^m, \quad i \in I,$$

siano *biolomorfismi*.

Nella notazioni precedenti, gli spazi vettoriali E_x vengono detti le **fibre** del fibrato, E viene detto lo **spazio totale**, X **base** del fibrato e $p: E \rightarrow X$ proiezione. La famiglia di biolomorfismi τ_i viene detta **banalizzazione locale**.

Va ribadito che, mentre la struttura di varietà complessa su E e le strutture di spazio vettoriale sulle fibre E_x fanno parte del dato del fibrato e da esso univocamente determinate, la banalizzazione non è unica.

Ad esempio, se (U_i, τ_i) , $i \in I$, è una banalizzazione locale di un fibrato $p: E \rightarrow X$ (avete capito: per semplicità notazionale nel seguito ci riferiremo ad un fibrato come nella Definizione 2.5.1 solamente indicando lo spazio totale E oppure, quando serve, la proiezione $p: E \rightarrow X$), e $X = \cup_j V_j$, $j \in J$, è un ricoprimento aperto per cui esiste una funzione di raffinamento

$$\varrho: J \rightarrow I, \quad V_j \subset U_{\varrho(j)} \quad \forall j \in J$$

allora le applicazioni

$$\eta'_j: p^{-1}(V_j) \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad \eta'_j = \tau'_{\varrho(j)}$$

definiscono una diversa banalizzazione locale (V_j, η_j) .

Sia (U_i, τ_i) , $i, j \in I$, una banalizzazione locale del fibrato E . Se $U \subset U_i$ è aperto, allora la restrizione di τ_i determina un biolomorfismo $\tau_i: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}^m$; in particolare per ogni coppia $i, j \in I$ si ha un biolomorfismo composto

$$\tau_{ij}: U_{ij} \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{\tau_j^{-1}} p^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{\tau_i} U_{ij} \times \mathbb{C}^m$$

che è lineare sulle fibre e che soddisfa la condizione di cociclo:

$$(2.4) \quad \tau_{jk}\tau_{ik}^{-1}\tau_{ij} = \text{Id} \quad \text{su } U_{ijk} \times \mathbb{C}^m \quad \forall i, j, k.$$

Notiamo che la (2.4) è un caso particolare della (2.1), con ciascun p_i uguale alla proiezione sul primo fattore $U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_i$.

PROPOSIZIONE 2.5.2. *Siano X una varietà complessa e $p: E \rightarrow X$ un'applicazione surgettiva di insiemì. Si assuma che esistano un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$, $i \in I$, ed applicazioni bigettive*

$$\tau_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^m, \quad i \in I,$$

tali che:

- (1) $p_i \circ \tau_i = p$, dove $p_i: U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_i$ denota la proiezione sul primo fattore;
- (2) per ogni $i, j \in I$ i morfismi di transizione

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^m$$

sono **biolomorfi** e lineari sulle fibre.

È allora univocamente determinata una struttura di fibrato vettoriale olomorfo su $p: E \rightarrow X$ che rende la famiglia (U_i, τ_i) una banalizzazione locale.

DIMOSTRAZIONE. In ciascuna fibra $E_x = p^{-1}(x)$ è definita una struttura di spazio vettoriale complesso tale che, ogniqualvolta $x \in U_i$, l'applicazione

$$\mathbb{C}^m \rightarrow E_x, \quad v \mapsto \tau_i^{-1}(x, v),$$

è un isomorfismo lineare.¹ Tale struttura è ben definita in quanto, se $x \in U_i \cap U_j$, allora le due applicazioni τ_i^{-1} e τ_j^{-1} differiscono per un isomorfismo lineare di \mathbb{C}^m .

Le bigezioni inverse $\tau_i^{-1}: U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow p^{-1}(U_i) \subset E$ inducono un'applicazione surgettiva

$$q: \coprod_i U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow E, \quad q(x, v) = \tau_i^{-1}(x, v) \quad \text{se } x \in U_i.$$

Si noti che $pq(x, v) = x$ e quindi, dati $(x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^m$ e $(y, w) \in U_j \times \mathbb{C}^m$, si ha $q(x, v) = q(y, w)$ se e solo se $x = y \in U_i \cap U_j$ e $(x, v) = \tau_{ij}(y, w)$. Ma le applicazioni τ_{ij} soddisfano la condizione di cociclo ed il Teorema di incollamento 2.2.1 ci garantisce esistenza ed unicità della struttura di varietà complessa su E di modo tale che le τ_i siano biolomorfi. \square

DEFINIZIONE 2.5.3. Un **morfismo** di fibrati vettoriali olomorfi è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

con φ olomorfa e lineare sulle fibre. Un **isomorfismo** di fibrati vettoriali olomorfi è un morfismo che è anche un biolomorfismo.

¹Per evitare errori, va tenuto presente che è ben definita solo la struttura di spazio vettoriale e che non è ben definita alcuna base della fibra.

Se (U_i, τ_i) è una banalizzazione locale per E e (V_j, η_j) è una banalizzazione locale per F , il morfismo di fibrati φ si rappresenta sopra gli aperti $U_i \cap V_j$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{(x,v) \mapsto (x, A_{ij}(x)v)} & & \\
 (U_i \cap V_j) \times \mathbb{C}^m & \xrightarrow{\tau_i^{-1}} & E|_{U_i \cap V_j} & \xrightarrow{\varphi} & F|_{U_i \cap V_j} & \xrightarrow{\eta_j} & (U_i \cap V_j) \times \mathbb{C}^l \\
 & & \searrow p & & \swarrow q & & \\
 & & & X & & &
 \end{array}$$

con $A_{ij}: U_i \cap V_j \rightarrow M_{l,m}(\mathbb{C})$ olomorfa. Si ha che φ è un isomorfismo se e solo se $l = m$ e le funzioni A_{ij} sono a valori nelle matrici invertibili.

Similmente, dato un fibrato vettoriale olomorfo $p: E \rightarrow X$ di rango m , ogni sua banalizzazione locale

$$(U_i, \tau_i), \quad i \in I, \quad \tau_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^m,$$

determina una famiglia di applicazioni olomorfe

$$g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_{m,m}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}, \quad i, j \in I,$$

mediante la formula

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v), \quad x \in U_{ij}, \quad v \in \mathbb{C}^m.$$

È chiaro che $g_{ii} = \text{Id}$, $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ e che su U_{ijk} vale la **condizione di cociclo**

$$(2.5) \quad g_{jk} g_{ik}^{-1} g_{ij} = \text{Id}, \quad \iff \quad g_{ki} = g_{kj} g_{ji}, \quad \forall i, j, k.$$

Per semplicità di notazione, ci riferiremo ad un insieme di applicazioni olomorfe $g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ che soddisfano (2.5) con il termine generico di cociclo.

Si noti che se $\varphi: E \rightarrow F$ è un isomorfismo di fibrati e (U_i, τ_i) è una banalizzazione locale per E , allora $(U_i, \tau_i \circ \varphi^{-1})$ è una banalizzazione per F che induce il medesimo cociclo.

Grazie al teorema di incollamento possiamo fare il percorso inverso, e ricostruire, a meno di isomorfismo, il fibrato e la banalizzazione locale partendo da un cociclo. Concretamente, siano dati un ricoprimento aperto $X = \cup U_i$ di una varietà complessa X e d una famiglia di applicazioni olomorfe $g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ tali che

$$g_{ki} = g_{kj} g_{ji}, \quad \forall i, j, k.$$

Possiamo allora usare tale dato per incollare le pezze $p_i: U_i \times \mathbb{C}^m, p_i(x, v) = x$, mediante le funzioni di incollamento

$$\tau_{ij}: U_{ij} \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^m, \quad \tau_{ij}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v),$$

ed ottenere un fibrato $p: E \rightarrow X$, assieme a delle banalizzazioni $\tau_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^m$ tali che $\tau_{ij} = \tau_i \tau_j^{-1}$.

Il cociclo risulta particolarmente utile per descrivere le **sezioni** di un fibrato vettoriale olomorfo $p: E \rightarrow X$, ossia le applicazioni olomorfe $s: X \rightarrow E$ tali che $ps = \text{Id}$.

Siano (U_i, τ_i) una banalizzazione locale di E e $s: X \rightarrow E$ una sezione; per ogni i definiamo un'applicazione olomorfa $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$ mediante la formula

$$\tau_i(s(x)) = (x, s_i(x)), \quad x \in U_i.$$

Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ si ha quindi $s(x) = \tau_i^{-1}(x, s_i(x)) = \tau_j^{-1}(x, s_j(x))$ da cui se $g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ è il cociclo vale:

$$(x, s_i(x)) = \tau_i \tau_j^{-1}(x, s_j(x)) \iff s_i(x) = g_{ij}(x) s_j(x).$$

Viceversa, ogni famiglia di applicazioni olomorfe $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$ tali che $s_i = g_{ij} s_j$ su U_{ij} per ogni i, j definisce una sezione $s: X \rightarrow E$ mediante la formula

$$s(x) = \tau_i^{-1}(x, s_i(x)), \quad x \in U_i.$$

Denotiamo con $\Gamma(X, E)$ lo spazio vettoriale delle sezioni olomorfe di E : la struttura di spazio vettoriale sulle sezioni è indotta dalla struttura di spazio vettoriale sulle fibre. Equivalentemente, se due sezioni s, r sono definite da funzioni $s_i, r_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$ tali che $s_i = g_{ij} s_j$ e $r_i = g_{ij} r_j$, la somma $s+r$ è definita dalle funzioni $s_i+r_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$. Da notare che $\Gamma(X, E)$ non è mai vuoto in quanto ogni fibrato vettoriale ammette la **sezione nulla** $0 \in \Gamma(X, E)$: $0(x) = 0 \in E_x$ per ogni $x \in X$.

Data una sezione $s \in \Gamma(X, E)$ il suo luogo di zeri $V(s)$ è l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $s(x) = 0 \in E_x$. È chiaro che si tratta di un chiuso analitico di X : se s è definita da applicazioni olomorfe $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^m): U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$, allora $V(s) \cap U_i = \bigcap_{r=1}^m V(s_i^r)$.

Vediamo adesso alcuni esempi di fibrati vettoriali olomorfi, in aggiunta a quello banale già descritto.

ESEMPIO 2.5.4. Sia X una varietà complessa di dimensione n ; il **fibrato tangente olomorfo** T_X è l'unione disgiunta degli spazi tangenti dei punti di X :

$$T_X = \coprod_{x \in X} T_{x,X}, \quad p: T_X \rightarrow X \text{ proiezione.}$$

Se z_1, \dots, z_n sono un sistema di coordinate olomorfe su una carta locale

$$X \supset U \xrightarrow{z=(z_1, \dots, z_n)} V \subset \mathbb{C}^n,$$

allora per ogni punto $x \in U$, lo spazio tangente $T_{x,X}$ ha come base le n derivazioni $\frac{\partial}{\partial z_i}$, ed i differenziali $dz_i: T_{x,X} \rightarrow \mathbb{C}$ sono la corrispondente base duale. Possiamo quindi definire una carta locale

$$\begin{aligned} \phi: p^{-1}(U) &\xrightarrow{(z,dz)} V \times \mathbb{C}^n, \\ \phi(x, v) &= (z(x), dz(v)) = (z_1(x), \dots, z_n(x), dz_1(v), \dots, dz_n(v)). \end{aligned}$$

Tali carte locali formano un atlante olomorfo e commutano con le proiezioni. Se z_1, \dots, z_n e w_1, \dots, w_n sono due sistemi di coordinate olomorfe su un medesimo aperto U il fatto che $dz_i = \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial w_j} dw_j$ implica che i biolomorfismi di transizione sono lineari sulle fibre ed il corrispondente cociclo è dato dalle matrici Jacobiane di cambiamento di coordinate.

Le sezioni del fibrato tangente olomorfo sono esattamente i campi di vettori olomorfi: un campo di vettori η è olomorfo se localmente, su ogni carta locale U con coordinate olomorfe z_1, \dots, z_n , si ha

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \eta_i \in \mathcal{O}_X(U).$$

ESEMPIO 2.5.5. Per ogni intero positivo $n > 0$ fissato possiamo definire una collezione di fibrati vettoriali olomorfi di rango 1

$$p: H^a \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad a \in \mathbb{Z}$$

nel modo seguente:

$$H^a = \frac{(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{C}}{\mathbb{C}^*}$$

dove l'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ è data da:

$$\lambda(z_0, \dots, z_n, t) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n, \lambda^a t).$$

Denotando con $[z, t] \in H^a$ la classe di equivalenza di $(z, t) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{C}$, si ha un'applicazione surgettiva

$$\begin{aligned} p: H^a &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ p([z_0, \dots, z_n, t]) &= [z_0, \dots, z_n] \end{aligned}$$

che per la Proposizione 2.5.2 risulta essere un fibrato olomorfo di rango 1 su \mathbb{P}^n . Considerando infatti gli aperti affini coordinati $U_i = \{[z] \mid z_i \neq 0\}$ si hanno le bigezioni

$$\tau_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}, \quad \tau_i([z_0, \dots, z_n, t]) = \left([z_0, \dots, z_n], \frac{t}{z_i^a} \right),$$

con annessi morfismi di transizione

$$\tau_{ij}: U_{ij} \times \mathbb{C} \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}, \quad \tau_{ij}([z], v) = \left([z], \frac{z_j^a}{z_i^a} v \right)$$

chiaramente biolomorfi, e cociclo $g_{ij} = \frac{z_j^a}{z_i^a} \in \mathcal{O}(U_{ij})$.

Si osservi che H^0 è il fibrato banale $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ ed esiste una bigezione naturale

$$H^{-1} \rightarrow \{([z], x) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, x = \lambda z\}, \quad [z, t] \mapsto ([z], zt),$$

(qualcuno riconoscerà nel codominio lo scoppimento dell'origine in \mathbb{C}^{n+1}); il fibrato H^{-1} viene detto **fibrato tautologico**, mentre il fibrato H^1 viene detto **fibrato iperpiano**. In [15] e [6] i fibrati H^a vengono denotati rispettivamente E^a e $[aH]$.

Vogliamo adesso dare una descrizione più concreta delle sezioni olomorfe dei fibrati H^a per ogni $a \in \mathbb{Z}$. Sia $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ la proiezione naturale, allora per ogni aperto $U \subset \mathbb{P}^n$ vale

$$(2.6) \quad \Gamma(U, H^a) = \{f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \mid f(\lambda z) = \lambda^a f(z), \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

L'uguaglianza è chiara a livello di sezioni insiemistiche, ossia senza tenere conto dell'olomorfia: ad ogni applicazione $f: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f(\lambda z) = \lambda^a f(z)$ possiamo associare la sezione

$$s: U \rightarrow p^{-1}(U), \quad s([z]) = [z, f(z)].$$

Viceversa, ogni sezione $r: U \rightarrow p^{-1}(U)$ determina un'applicazione $g: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $r\pi(z) = [z, g(z)]$. Per ogni λ , siccome $r\pi(\lambda z) = r\pi(z)$, vale $[z, g(z)] = [\lambda z, g(\lambda z)]$ da cui segue $g(\lambda z) = \lambda^a g(z)$. La questione che tali corrispondenze preservano l'olomorfia è puramente locale e non è restrittivo supporre U contenuto in una carta locale: ad esempio se $z_0 \neq 0$ in U , nelle precedenti notazioni, se f è olomorfa e $y \in \mathbb{C}^n$ si ha $s([1, y]) = [1, y, f(1, y)]$ e quindi s è olomorfa. Similmente data r olomorfa si ha $r\pi(1, y) = [1, y, g(1, y)]$ da cui segue che $y \mapsto g(1, y)$ e $z \mapsto g(z) = g(z_0, z_0 y) = z_0^a g(1, y)$ sono olomorfe.

Per $U = \mathbb{P}^n$ si ha $\pi^{-1}(U) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ si ottiene

$$(2.7) \quad \Gamma(\mathbb{P}^n, H^a) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \mid f(\lambda z) = \lambda^a f(z), \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Per il teorema di estensione di Hartogs $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$ e per continuità (o anche per il principio di identità):

$$(2.8) \quad \Gamma(\mathbb{P}^n, H^a) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1}) \mid f(\lambda z) = \lambda^a f(z), \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Ma adesso, guardando lo sviluppo di Taylor nell'origine di una funzione $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$, la condizione $f(\lambda z) = \lambda^a f(z)$ è soddisfatta se e solo se f è un polinomio omogeneo di grado a . Abbiamo quindi dimostrato la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2.5.6. *Le sezioni globali olomorfe del fibrato H^a sono tutte e sole del tipo*

$$s: \mathbb{P}^n \rightarrow H^a, \quad s([z]) = [z, q(z)],$$

con $q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ omogeneo di grado a . In particolare $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\mathbb{P}^n, H^a) < \infty$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$ e $\Gamma(\mathbb{P}^n, H^a) = 0$ per ogni $a < 0$ (esiste solo la sezione nulla).

Giova osservare che il luogo di zeri di una sezione non nulla del fibrato iperpiano è un iperpiano.

ESERCIZIO 2.5.7. Si consideri il seguente aggeggio²

$$p: \frac{\mathbb{P}^n \times \text{Hom}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})}{\sim} \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad p([z], f) = [z],$$

dove $([z], f) \sim ([w], g)$ se e solo se $[z] = [w]$ e $f(z) = g(z)$. Dimostrare che l'aggeggio possiede una struttura di fibrato vettoriale di rango 1 isomorfo al fibrato iperpiano H^1 .

Un fibrato vettoriale olomorfo di rango 1 viene anche detto **fibrato in rette** o, più frequentemente, **line bundle**.

Le funzioni olomorfe su una varietà possono essere interpretate come le sezioni del fibrato banale di rango 1. Più precisamente un'applicazione $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se $x \mapsto (x, f(x))$ è una sezione olomorfa del fibrato $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$. Il principio di identità continua a valere anche per le sezioni di un fibrato.

PROPOSIZIONE 2.5.8. *Siano $s, r \in \Gamma(X, E)$ sezioni di un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà connessa X . Se $\{x \in X \mid s(x) = r(x)\}$ contiene un aperto non vuoto, allora $s = r$.*

² "aggeggio": qualcosa che, per il momento, non si conosce appieno e di cui si ignora il nome, la funzione e l'utilità.

DIMOSTRAZIONE. Sia m il rango di E , prendiamo una banalizzazione locale su un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$, $i \in I$, tale che ciascun U_i sia un aperto connesso, e sia $g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ il cociclo associato.

Le sezioni s, r sono descritte da funzioni olomorfe $s_i, r_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$ tali che

$$s_i = g_{ij}s_j, \quad r_i = g_{ij}r_j, \quad \forall i, j.$$

Sia V un aperto non vuoto tale che $s|_V = r|_V$; per il principio di identità si ha $r_i = s_i$ se $V \cap U_i \neq \emptyset$ e quindi l'insieme $S = \{i \in I \mid s_i = r_i\}$ è non vuoto. Supponiamo per assurdo $S \neq I$, allora

$$X = \left(\bigcup_{i \in S} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \notin S} U_i \right)$$

e per connessione esistono $i \in S$ e $j \notin S$ tali che $U_{ij} \neq \emptyset$. Ma allora $s_j = g_{ji}s_i = g_{ji}r_i = r_j$ in U_{ij} e per il principio di identità su U_j si ha $r_j = s_j$. \square

L'esempio dei fibrati H^a sullo spazio proiettivo mostra che non esiste un'ovvia estensione del principio del massimo. Esistono tuttavia versioni non banali del principio del massimo per fibrati noti con il nome di "vanishing theorems" (vedi ad esempio [14, Cap. 3]).

2.6. Il gruppo di Picard

Dati due fibrati vettoriali olomorfi $p: E \rightarrow X$ e $q: F \rightarrow X$ sulla stessa varietà complessa possiamo sempre trovare banalizzazioni locali di E, F sul medesimo ricoprimento aperto $X = \cup U_i$:

$$\tau_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^m, \quad \eta_i: q^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^l.$$

I rispettivi cocicli sono dunque

$$g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C}), \quad h_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_l(\mathbb{C}),$$

definiti dalle relazioni

$$\tau_i \tau_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v), \quad \eta_i \eta_j^{-1}(x, v) = (x, h_{ij}(x)v).$$

Un morfismo di fibrati $\varphi: E \rightarrow F$, in quanto olomorfo e lineare sulle fibre, è univocamente determinato da applicazioni olomorfe $\varphi_i: U_i \rightarrow M_{l,m}(\mathbb{C})$ tali che

$$\varphi \tau_i^{-1}(x, v) = \eta_i^{-1}(x, \varphi_i(x)v), \quad x \in U_i, v \in \mathbb{C}^m.$$

Quindi per ogni i, j ed ogni $x \in U_{ij}$ si ha

$$\varphi \tau_j^{-1}(x, v) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)v), \quad \eta_j^{-1}(x, v) = \eta_i^{-1}(x, h_{ij}(x)v)$$

$$\varphi \tau_j^{-1}(x, v) = \eta_j^{-1}(x, \varphi_j(x)v) = \eta_i^{-1}(x, h_{ij}\varphi_j(x)v),$$

$$\varphi \tau_i^{-1}(x, v) = \varphi \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)v) = \eta_i^{-1}(x, \varphi_i(x)g_{ij}v),$$

da cui si ricava

$$h_{ij}\varphi_j(x) = \varphi_i(x)g_{ij} \iff \varphi_j = h_{ij}^{-1}\varphi_i g_{ij}.$$

Possiamo rifare lo stesso percorso in senso contrario e dedurre quindi che i morfismi di fibrati $E \rightarrow F$ sono in biezione con le famiglie di applicazioni olomorfe $\varphi_i: U_i \rightarrow M_{l,m}(\mathbb{C})$ tali che $\varphi_j = h_{ij}^{-1}\varphi_i g_{ij}$ per ogni i, j .

COROLLARIO 2.6.1. *Siano E, F fibrati vettoriali olomorfi di rango m sulla varietà X con rispettivi cocicli $g_{ij}, h_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ relativi ad un ricoprimento banalizzante comune $X = \cup_i U_i$. Allora E, F sono isomorfi se e solo se esistono $\varphi_i: U_i \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ olomorfe e tali che*

$$h_{ij} = \varphi_i g_{ij} \varphi_j^{-1}, \quad \forall i, j.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto che esiste un isomorfismo $\varphi: E \rightarrow F$ se e solo se esistono $\varphi_i: U_i \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ tali che $\varphi_j = h_{ij}^{-1}\varphi_i g_{ij}$. Basta adesso moltiplicare a destra per φ_j^{-1} ed a sinistra per h_{ij} . \square

Dati due fibrati vettoriali ologomorfi $p: E \rightarrow X$ e $q: F \rightarrow X$ di ranghi m e l sulla stessa varietà complessa possiamo costruire in maniera naturale i fibrati $E \oplus F \rightarrow X$ (somma diretta) e $E \otimes F \rightarrow X$ (prodotto tensoriale) le cui fibre sono rispettivamente

$$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x, \quad (E \otimes F)_x = E_x \otimes_{\mathbb{C}} F_x, \quad x \in X.$$

Sebbene sia possibile definire la somma diretta come un semplice prodotto fibrato

$$E \oplus F = E \times_X F = \{(x, y) \in E \times F \mid p(x) = q(y)\}$$

risulta a posteriori più conveniente trattare le precedenti costruzioni in termini di cocicli. Si considerino due banalizzazioni locali di E, F sul medesimo ricoprimento aperto $X = \cup U_i$ e cocicli

$$g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C}), \quad h_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_l(\mathbb{C}).$$

Definiamo allora il fibrato $E \oplus F$ di rango $m + l$ come quello di cociclo

$$U_{ij} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & h_{ij}(x) \end{pmatrix}.$$

Tale costruzione è ben definita (a meno di isomorfismo) in quanto se

$$g'_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C}), \quad h'_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_l(\mathbb{C}).$$

sono due diversi di cocicli dei fibrati E, F , per il corollario precedente esistono funzioni ologomorfe $\varphi_i: U_i \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ e $\psi_i: U_i \rightarrow GL_l(\mathbb{C})$ tali che $g'_{ij} = \varphi_i g_{ij} \varphi_j^{-1}$ e $h'_{ij} = \psi_i h_{ij} \psi_j^{-1}$ e quindi

$$\begin{pmatrix} g'_{ij} & 0 \\ 0 & h'_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_j & 0 \\ 0 & \psi_j \end{pmatrix}^{-1}.$$

Similmente si definisce il prodotto tensoriale $E \otimes F$ come il fibrato di rango ml e cociclo

$$g_{ij} \otimes h_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL(\mathbb{C}^m \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^l),$$

dove per $g \in GL(\mathbb{C}^m)$ e $h \in GL(\mathbb{C}^l)$ si ha per definizione

$$g \otimes h \in GL(\mathbb{C}^m \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^l), \quad (g \otimes h) \left(\sum_r x_r \otimes y_r \right) = \sum_r g(x_r) \otimes h(y_r).$$

Allo stesso modo della somma diretta si verifica che il prodotto tensoriale è ben definito a meno di isomorfismo.

Similmente, non sorprende affatto che per ogni fibrato $p: E \rightarrow X$ si possono definire il suo duale E^\vee e le sue potenze esterne $E^{\wedge k}$, $k = 0, 1, \dots$: torneremo su questo punto quando servirà.

Quando E, F sono entrambi fibrati in rette, siccome il prodotto in \mathbb{C} induce un isomorfismo naturale $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$, il loro prodotto tensoriale $E \otimes F$ è ancora un fibrato in rette, il cui cociclo è il prodotto dei cocicli ($g_{ij} h_{ij}$ nelle notazioni precedenti). Notiamo che il cociclo che vale costantemente 1 definisce il fibrato banale di rango 1.

DEFINIZIONE 2.6.2. Il **gruppo di Picard** $\text{Pic}(X)$ di una varietà complessa X è l'insieme delle classi di isomorfismo di line bundles dotato del prodotto

$$\text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X), \quad (L, M) \mapsto L \otimes M.$$

Si tratta chiaramente di un gruppo abeliano con elemento neutro il fibrato banale ed inverso L^{-1} definito dall'inverso del cociclo di L .

Ad esempio, abbiamo visto che nello spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate omogenee z_0, \dots, z_n , le funzioni

$$g_{ij}: \{z_i z_j \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad g_{ij}([z]) = \frac{z_j^a}{z_i^a},$$

sono il cociclo di H^a : quindi $H^a \otimes H^b = H^{a+b}$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, e cioè l'applicazione $H: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^n)$, $a \mapsto H^a$, è un omomorfismo di gruppi (che dimostreremo nei prossimi capitoli essere bigettivo).

Dato un line bundle $p: L \rightarrow X$ con annesso cociclo (uno dei tanti possibili)

$$g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij}) = \{f: U_{ij} \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \text{ ologomorfe } \}$$

relativo ad un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$, abbiamo visto che lo spazio $\Gamma(X, L)$ delle sezioni globali di L è uguale al sottospazio di $\prod_i \mathcal{O}(U_i)$ formato dalle famiglie di funzioni oloedorfe $\{s_i \in \mathcal{O}(U_i)\}$ tali che

$$s_i = g_{ij}s_j \in \mathcal{O}(U_{ij}), \quad \forall i, j.$$

Dati due line bundle L, M su una varietà X è ben definito un prodotto bilineare

$$\Gamma(X, L) \times \Gamma(X, M) \rightarrow \Gamma(X, L \otimes M), \quad (s, r) \mapsto sr,$$

nella maniera più naturale possibile: se $g_{ij}, h_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ sono cocicli relativi ad un ricoprimento U_i per L e M rispettivamente e $s = \{s_i \mid s_i = g_{ij}s_j\}$, $r = \{r_i \mid r_i = h_{ij}r_j\}$, allora $s_i r_i = g_{ij} h_{ij} s_j r_j$ e quindi $\{s_i r_i\}$ definisce la sezione sr di $L \otimes M$.

Si verifica facilmente che il prodotto non dipende dalla scelta dei cocicli e che è associativo. In particolare per ogni line bundle L è definito un anello associativo graduato

$$R[L] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, L^n), \quad L^n = \underbrace{L \otimes L \otimes \cdots \otimes L}_n.$$

Se X è connessa, per il principio di identità $R[L]$ è un dominio di integrità e possiamo considerare il campo delle frazioni omogenee di grado 0 come:

$$Q(X, L) := \left\{ \frac{s}{r} \mid s, r \in \Gamma(X, L^n) \text{ con } n \geq 0, r \neq 0 \right\}$$

DEFINIZIONE 2.6.3 (Dimensione di Iitaka-Kodaira). La **dimensione di Iitaka-Kodaira** $\kappa(X, L)$ di un line bundle $L \rightarrow X$ è definita come:

- (1) $-\infty$ se $\Gamma(X, L^n) = 0$ per ogni $n > 0$;
- (2) il grado di trascendenza dell'estensione di campi $\mathbb{C} \subset Q(X, L)$ se $\Gamma(X, L^n) \neq 0$ per qualche $n > 0$.

Se X è connessa e $r, s \in \Gamma(X, L)$ con $r \neq 0$, allora ha senso considerare il rapporto s/r come una funzione meromorfa. Infatti, se tali sezioni sono descritte dalle funzioni oloedorfe

$$s_i, r_i \in \mathcal{O}(U_i), \quad s_i = g_{ij}s_j, \quad r_i = g_{ij}r_j,$$

allora $s_i/r_i = s_j/r_j$ per ogni i, j e quindi la funzione meromorfa s/r è rappresentata dall'espressione meromorfa $(U_i, s_i/r_i)$. Abbiamo usato il principio di identità 2.5.8 per dedurre che $V(r)$ non ha parte interna e quindi che le funzioni r_i non si annullano in aperti non vuoti.

Si osservi che date $r, s \in \Gamma(X, L)$ e $f, g \in \Gamma(X, M)$ vale $\frac{s}{r} = \frac{f}{g}$ se e solo se $sg = rf \in \Gamma(X, L \otimes M)$: in particolare esiste un morfismo iniettivo di campi $Q(X, L) \rightarrow \mathcal{M}_X(X)$.

DEFINIZIONE 2.6.4 (Dimensione algebrica). La **dimensione algebrica** $a(X)$ di una varietà complessa connessa è il grado di trascendenza dell'estensione di campi $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_X(X)$.

Quindi la dimensione di Iitaka-Kodaira di un line bundle è sempre minore o uguale alla dimensione algebrica della varietà.

La cosa interessante è che ogni funzione meromorfa si può ottenere come quoziente di sezioni di un opportuno line bundle.

TEOREMA 2.6.5. *Siano φ una funzione meromorfa su una varietà complessa connessa X . Esistono allora un line bundle $L \rightarrow X$ (dipendente da φ) e due sezioni $s_0, s_1 \in \Gamma(X, L)$ tali che $\varphi = s_1/s_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre $\varphi \neq 0$. Grazie alla fattorizzazione unica dei germi ed al Teorema 1.7.19, per ogni punto $x \in X$ possiamo trovare un aperto connesso U_x e 2 funzioni oloedorfe non nulle $f_x, g_x \in \mathcal{O}(U_x)$ tali che:

- (1) $\varphi = f_x/g_x$ su U_x ;
- (2) in ogni punto $y \in U_x$ i germi di f_x e g_x in $\mathcal{O}_{X,y}$ non hanno fattori comuni.

Sia $I \subset X$ tale che $X = \cup_{i \in I} U_i$, allora per ogni h la funzione meromorfa φ_h è rappresentata da $(U_i, f_i/g_i)$, $i \in I$. Sull'aperto U_{ij} vale $f_i g_j = f_j g_i$, e siccome f_i e g_i non hanno fattori comuni in ogni punto ne segue che f_j divide f_i in ogni punto, ossia che

$$h_{ij} := \frac{f_i}{f_j} = \frac{g_i}{g_j}$$

è olomorfa in U_{ij} ed invertibile ovunque (vedi Proposizione 1.8.6). È inoltre evidente che $h_{ki} = h_{kj}h_{ji}$ e quindi che h_{ij} è un cociclo che definisce un line bundle L . Basta allora considerare come sezioni s_0, s_1 i dati (U_i, g_i) e (U_i, f_i) . \square

COROLLARIO 2.6.6. *Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ funzioni meromorfe in una varietà complessa connessa. Esiste allora un line bundle L e $m+1$ sezioni $s_0, \dots, s_m \in \Gamma(X, L)$ tali che $\varphi_i = s_i/s_0$ per ogni i .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 2.6.5, per ogni $i = 1, \dots, m$ esiste un line bundle L_i e due sezioni $r_i, t_i \in \Gamma(X, L_i)$ tali che $\varphi_i = r_i/t_i$. Basta allora definire

$$L = L_1 \otimes \dots \otimes L_m, \quad s_0 = t_1 \cdots t_m, \quad s_i = r_i \prod_{j \neq i} t_j.$$

\square

2.7. Finitezza delle sezioni sulle varietà compatte

In questa sezione proveremo che le sezioni di un fibrato vettoriale olomorfo su di una varietà compatta sono uno spazio vettoriale di dimensione finita. La dimostrazione che daremo (una delle tante possibili) utilizza il lemma di Schwarz e richiede alcune osservazioni ed alcuni lemmi preliminari.

Per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ed ogni numero reale $r > 0$ si con denota

$$\Delta(x, r) = \Delta(x, (r, \dots, r)) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - x_i| < r \forall i\}$$

il polidisco aperto “regolare”, ossia la palla aperta di centro x e raggio r nella distanza policilindrica.

LEMMA 2.7.1. *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto ed $E \subset U$ un sottoinsieme denso. Per ogni $0 < \alpha \leq 1$ esiste una famiglia di polidischi $\Delta(x_i, r_i)$, $i \in I$, tali che:*

- (1) $x_i \in E$ e $\Delta(x_i, r_i) \subset U$ per ogni i ;
- (2) $\bigcup_i \Delta(x_i, \alpha r_i) = U$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione richiede solamente l’assioma della scelta e la disuguaglianza triangolare per la distanza

$$d(x, y) = \max_i |x_i - y_i|,$$

ed è valida in qualunque spazio metrico. Siccome U è aperto esiste un’applicazione $s: U \rightarrow]0, +\infty[$ tale che $\Delta(x, s(x)) \subset U$ per ogni $x \in U$. Siccome E è denso in U esiste un’applicazione $f: U \rightarrow E$ tale che

$$d(f(x), x) < \frac{\alpha}{1+\alpha} s(x), \quad \forall x \in U.$$

Poniamo $r(x) = \frac{s(x)}{1+\alpha}$, allora per la disuguaglianza triangolare si ha

$$x \in \Delta(f(x), \alpha r(x)), \quad \Delta(f(x), r(x)) \subset \Delta(x, s(x)) \subset U.$$

Per finire basta considerare un qualsiasi sottoricoprimento del ricoprimento aperto

$$U = \bigcup_{x \in U} \Delta(f(x), \alpha r(x)).$$

\square

Sia x un punto di una varietà complessa X : con un leggero abuso di notazione, chiameremo polidisco di centro x e raggio 1 un aperto $\Delta(x, 1) \subset X$ intorno di x , con un sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n tali che

$$z = (z_1, \dots, z_n): \Delta(x, 1) \rightarrow \Delta(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$$

sia un biolomorfismo che fa corrispondere x all’origine, ossia $z(x) = 0$. In tal caso, per ogni $0 < r < 1$ si denota $\Delta(x, r) = \{y \in \Delta(x, 1) \mid z(y) \in \Delta(0, r)\}$.

TEOREMA 2.7.2. *Siano $p: L \rightarrow X$ un line bundle su una varietà complessa compatta X e $E \subset X$ un sottoinsieme denso. Allora esistono finiti punti $x_1, \dots, x_m \in E$ ed un intero positivo h tali che, per ogni $d > 0$ una sezione $s \in \Gamma(X, L^d)$ ha molteplicità $> dh$ nei punti x_1, \dots, x_m se e solo se $s = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo trovare una famiglia di polidischi $\Delta(x_j, 1)$ ciascuno dei quali di centro $x_j \in E$ e contenuto in qualche aperto banalizzante per L ed in modo tale che i polidischi $\Delta(x_j, 1/3)$ ricoprono X : basta infatti applicare il Lemma 2.7.1 (con $\alpha = 1/3$) ad ogni carta locale di un atlante dove L si banalizza e poi riscalarare tutti i raggi ad 1 mediante omotetie dei sistemi di coordinate locali.

Siccome X è compatta possiamo trovare un sottoinsieme finito di polidischi

$$\Delta(x_1, 1), \dots, \Delta(x_m, 1) \subset X, \quad x_1, \dots, x_m \in E,$$

tali che $X = \cup_i \Delta(x_i, 1/3)$ e con L banale su ogni $\Delta(x_i, 1)$. Possiamo quindi considerare come ricoprimento banalizzante per L il ricoprimento aperto finito

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_i, \quad U_i = \Delta(x_i, 1).$$

Sia $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(\Delta(x_i, 1) \cap \Delta(x_j, 1))$ il corrispondente cociclo e sia $h \in \mathbb{N}$ un intero fissato tale che

$$2^h \geq \max_{i,j} \max\{|g_{ij}(y)| \mid y \in \overline{\Delta}(x_i, 2/3) \cap \overline{\Delta}(x_j, 2/3)\}.$$

Allora per ogni intero $d > 0$ vale anche

$$2^{dh} \geq \max_{i,j} \max\{|g_{ij}^d(y)| \mid y \in \overline{\Delta}(x_i, 2/3) \cap \overline{\Delta}(x_j, 2/3)\}.$$

Siano $d > 0$ e $s \in \Gamma(X, L^d)$ rappresentata dalle m funzioni olomorfe $s_i \in \mathcal{O}(\Delta(x_i, 1))$ tali che $s_i = g_{ij}^d s_j$.

Dimostriamo adesso che se per ogni i la funzione s_i ha molteplicità strettamente maggiore di dh nel punto x_i , allora $s = 0$. A tal fine definiamo

$$|s| = \max_i \max\{|s_i(y)| \mid y \in \overline{\Delta}(x_i, 2/3)\}$$

e scegliamo un indice i ed un punto $u \in \overline{\Delta}(x_i, 2/3)$ tale che $|s| = |s_i(u)|$. Sia adesso j un indice tale che $u \in \Delta(x_j, 1/3)$, siccome s_j ha molteplicità $> dh$ in x_j , per il lemma di Schwarz si ha

$$|s_j(u)| \leq \frac{1}{2^{dh+1}} \max\{|s_j(y)| \mid y \in \overline{\Delta}(x_j, 2/3)\} \leq \frac{|s|}{2^{dh+1}}.$$

e quindi

$$|s| = |s_i(u)| = |g_{ij}^d(u) s_j(u)| \leq 2^{hd} \frac{|s|}{2^{dh+1}} = \frac{|s|}{2},$$

che implica $|s| = 0$. □

Sia n un intero positivo fissato. Il sottospazio vettoriale $P_d \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ dei polinomi di grado $\leq d$ ha dimensione uguale a

$$\binom{n+d}{n} = \binom{n+d}{d} = \frac{1}{n!} (d+1)(d+2) \cdots (d+n):$$

ragionando per induzione su $d+n$, basta usare la formula

$$\binom{n+d}{n} = \binom{n+d-1}{n} + \binom{n+d-1}{n-1}$$

ed usare l'ipotesi induttiva per concludere che il primo addendo conta i monomi divisibili per t_n ed il secondo addendo quelli non divisibili per t_n .

OSSERVAZIONE 2.7.3. Nelle notazioni precedenti, la disomogeneizzazione $z_0 \mapsto 1$ determina un isomorfismo lineare tra il sottospazio vettoriale $S_d \subset \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$ dei polinomi omogenei di grado d ed il sottospazio P_d . Segue quindi dalla Proposizione 2.5.6 la formula

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\mathbb{P}^n, H^d) = \binom{d+n}{n}, \quad \text{per ogni } d \geq 0.$$

Per ogni intero positivo $d > 0$ vale

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{d^n} \binom{n+d}{n} \leq n+1,$$

con la limitazione superiore raggiunta per $d = 1$ e quella inferiore per $d \rightarrow \infty$. Infatti

$$\frac{d+i}{1+i} \leq d \quad \forall i, d \geq 1$$

e quindi

$$\binom{n+d}{n} = (n+1) \prod_{i=1}^n \frac{d+i}{1+i} \leq (n+1)d^n.$$

ESERCIZIO 2.7.4. Provare, ad esempio per induzione su $d \geq 0$, che

$$\frac{1}{(1-t)^{d+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d}{d} t^n.$$

COROLLARIO 2.7.5. Sia $p: L \rightarrow X$ un line bundle su una varietà complessa connessa e compatta X di dimensione n . Allora esiste una costante positiva C (dipendente da L) tale che per ogni intero $d > 0$ vale

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, L^d) \leq C d^n.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 2.7.2 esiste un sottoinsieme finito $x_1, \dots, x_m \in X$ ed un intero h tali che se una sezione $s \in \Gamma(X, L^d)$ ha molteplicità $> dh$ in ciascun punto x_i allora $s = 0$.

Per ogni $s \in \Gamma(X, L^d)$ denotiamo con $T_i(s) \in P_{dh}$ il polinomio di Taylor di ordine dh della funzione s_i (in un dato sistema di coordinate locali): in questo modo abbiamo definito un'applicazione lineare ed iniettiva

$$T = T_1 + \dots + T_m: \Gamma(X, L^d) \rightarrow \oplus_i P_{dh}$$

da cui segue

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, L^d) \leq m \dim P_{dh} = m \binom{n+dh}{n} \leq (m(n+1)h^n) d^n.$$

□

Siamo adesso in grado di dimostrare la parte “facile” del teorema di Siegel, ossia che la dimensione algebrica $a(X)$ di una varietà complessa compatta X non supera la dimensione complessa $\dim_{\mathbb{C}} X$.

COROLLARIO 2.7.6. Sia X varietà complessa connessa e compatta di dimensione n . Allora $a(X) \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. Occorre dimostrare che ogni omomorfismo di anelli $\varphi: \mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n+1}] \rightarrow \mathcal{M}_X(X)$ che estende l'inclusione $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_X(X)$ non è iniettivo.

Abbiamo visto che esistono un line bundle L e $n+2$ sezioni $s_0, \dots, s_{n+1} \in \Gamma(X, L)$ tali che

$$\varphi(t_i) = \frac{s_i}{s_0}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Scriviamo $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n+1}] = \cup P_d$ dove P_d è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq d$:

$$\dim P_d = \binom{n+1+d}{n+1} > \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Se $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n+1}]$ è un polinomio di grado $\leq d$ allora

$$s_0^d \varphi(p) = s_0^d p \left(\frac{s_1}{s_0}, \dots, \frac{s_{n+1}}{s_0} \right) \in \Gamma(X, L^d)$$

e quindi $s_0^d \varphi$ definisce un'applicazione lineare da P_d a $\Gamma(X, L^d)$. Ma il Teorema 2.7.2 implica che per $d \gg 0$ la dimensione di $\Gamma(X, L^d)$ è strettamente minore della dimensione di P_d e quindi φ non può essere iniettiva. □

COROLLARIO 2.7.7. Sia E un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà compatta X , allora lo spazio vettoriale $\Gamma(X, E)$ delle sezioni olomorfe su E ha dimensione finita.

DIMOSTRAZIONE. È possibile usare un argomento simile a quello usato nella dimostrazione del Teorema 2.7.2, ma è utile ed istruttivo dare una diversa dimostrazione.

Ragioniamo per induzione sul rango m di E , con il caso $m = 1$ dimostrato nel Teorema 2.7.2. Sia $p: E \rightarrow X$ fibrato vettoriale olomorfo di rango $m > 1$. Come al solito indichiamo con E_x la fibra di E su x , con $E_x^\vee = \text{Hom}(E_x, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale duale e con $\mathbb{P}(E_x) = (E_x - \{0\})/\mathbb{C}^*$ il proiettivizzato.

A partire dalla struttura di varietà su E costruiamo due strutture di varietà complessa compatta sugli insiemi $\mathbb{P}(E), \mathbf{P}(E)$, definiti come:

$$\mathbb{P}(E) = \{(x, [v]) \mid x \in X, [v] \in \mathbb{P}(E_x)\}, \quad \mathbf{P}(E) = \{(x, [f]) \mid x \in X, [f] \in \mathbb{P}(E_x^\vee)\}.$$

Entrambe le costruzioni sono geometricamente importanti ed interessanti; qui ci occuperemo solamente della seconda (la prima è del tutto analoga) anche perché in questa dimostrazione ci serve solamente $\mathbf{P}(E)$. Sia $q: \mathbf{P}(E) \rightarrow X$ la proiezione sulla prima coordinata, si noti che

$$\mathbf{P}(E)_x = q^{-1}(x) = \mathbb{P}(E_x^\vee).$$

Se (U_i, τ_i) è una banalizzazione di E , essendo i biolomorfismi $\tau_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^m$ isomorfismi lineari sulle fibre, essi inducono delle bigezioni

$$\eta_i: q^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})),$$

e tutti gli elementi del cociclo

$$\eta_{ij} = \eta_i \eta_j^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})) \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}))$$

sono biolomorfismi. Per il Teorema di incollamento 2.2.1 si ha una unica struttura di varietà complessa su $\mathbf{P}(E)$ che rende le applicazioni η_i dei biolomorfismi. Inoltre le proiezioni $q: q^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ sono chiuse con fibre compatte ed un semplice argomento di topologia generale prova che lo stesso vale per $q: \mathbf{P}(E) \rightarrow X$: dunque anche $\mathbf{P}(E)$ è una varietà compatta.

Idea: costruire un fibrato vettoriale olomorfo L su $\mathbf{P}(E)$ la cui restrizione ad ogni fibra $\mathbf{P}(E)_x \simeq \mathbb{P}^{m-1}$ sia il fibrato iperpiano.

Nel perseguire tale idea è naturale definire

$$L = \frac{\{(x, f, t) \mid x \in X, 0 \neq f \in E_x^\vee, t \in \mathbb{C}\}}{\mathbb{C}^*}$$

dove l'azione di \mathbb{C}^* è

$$\lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \lambda(x, f, t) = (x, \lambda f, \lambda t).$$

Si ha un'ovvia applicazione

$$\pi: L \rightarrow \mathbf{P}(E), \quad \pi([x, f, t]) = (x, [f]),$$

e $(q\pi)^{-1}(x)$ è esattamente il fibrato iperpiano H^1 sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E_x^\vee)$. Le stesse considerazioni fatte per i fibrati H^a mostrano che L è un fibrato vettoriale olomorfo su $\mathbf{P}(E)$.

Per concludere la dimostrazione basta quindi dimostrare che esiste un'applicazione lineare iniettiva

$$\Gamma(X, E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbf{P}(E), L).$$

Data una sezione $s: X \rightarrow E$, $s(x) \in E_x$, $\forall x$, basta considerare la sezione

$$\tilde{s}: \mathbf{P}(E) \rightarrow L, \quad \tilde{s}(x, [f]) = [x, f, f(s(x))],$$

che si vede essere olomorfa e ben definita. Si ha $\tilde{s} = 0$ se e solo se per ogni $x \in X$ ed ogni $0 \neq f \in E_x^\vee$ vale $f(s(x)) = 0$ ma questo è possibile solo se $s(x) = 0$ per ogni x .

Informiamo il lettore che, con un'analisi più accurata, basata sulla caratterizzazione delle sezioni del fibrato iperpiano, si può dimostrare che $\tilde{\cdot}$ è bigettiva. □

Una domanda sensata è chiedere se, per un line bundle fissato L su una varietà X , è vero che ogni funzione meromorfa si può scrivere come quoziente di due sezioni di una potenza di L . La risposta a tale domanda è sorprendentemente semplice ed elegante.

Se X è connessa abbiamo a suo tempo introdotto il sottocampo

$$Q(X, L) = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \Gamma(X, L^d), d \geq 0, b \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_X(X)$$

e definito la dimensione di Iitaka $\kappa(X, L)$ come il grado di trascendenza dell'estensione $\mathbb{C} \subset Q(X, L)$ se $\Gamma(X, L^d) \neq 0$ per qualche $d > 0$ e $-\infty$ se invece $\Gamma(X, L^d) = 0$ per ogni $d > 0$.

TEOREMA 2.7.8. *Per un line bundle L su una varietà complessa compatta e connessa X vale $Q(X, L) = \mathcal{M}_X(X)$ se e solo se i due campi hanno lo stesso grado di trascendenza su \mathbb{C} , ossia se e solo se $a(X) = \max(0, \kappa(X, L))$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $Q(X, L) = \mathcal{M}_X(X)$ è ovvio che $\mathbb{C} \subset Q(X, L)$ ha lo stesso grado di trascendenza di $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_X(X)$. Viceversa, sia $d = a(X)$ la dimensione algebrica di X (per il Corollario 2.7.6 vale $d \leq \dim_{\mathbb{C}} X$) e fissiamo un insieme di d elementi algebricamente indipendenti $f_1, \dots, f_d \in Q(X, L)$. Allora per ogni $\varphi \in \mathcal{M}_X(X)$ i $d+1$ elementi φ, f_1, \dots, f_d non sono algebricamente indipendenti ed esiste quindi un polinomio non nullo $P(t_0, \dots, t_d)$ tale che $P(\varphi, f_1, \dots, f_d) = 0$. Se $P = \sum_m t_0^m p_m(t_1, \dots, t_d)$, siccome f_1, \dots, f_d sono algebricamente indipendenti deve essere $p_i \neq 0$ per qualche $i > 0$ e questo implica che φ è algebrico su $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_d)$. A maggior ragione φ è algebrico su $Q(X, L)$ ed il teorema segue dal seguente risultato di carattere generale. \square

TEOREMA 2.7.9. *Siano L un line bundle su una varietà X connessa (ma non necessariamente compatta) e sia $\varphi \in \mathcal{M}_X(X)$ una funzione meromorfa che è algebrica sul sottocampo $Q(X, L)$. Allora $\varphi \in Q(X, L)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una banalizzazione di L su un ricoprimento aperto $X = \cup U_i$ e corrispondente cociclo $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$. Per ogni intero d , in aggiunta alle sezioni olomorfe di L^d :

$$\Gamma(X, L^d) = \{s_i \in \mathcal{O}(U_i) \mid s_i = g_{ij}^d s_j \forall i, j\},$$

possiamo definire le **sezioni meromorfe**

$$\mathcal{M}(X, L^d) = \{\phi_i \in \mathcal{M}(U_i) \mid \phi_i = g_{ij}^d \phi_j \forall i, j\}.$$

Per ipotesi φ è radice di un polinomio monico a coefficienti in $Q(X, L)$, ossia esiste una relazione del tipo

$$(2.9) \quad \varphi^m + \frac{a_1}{b_1} \varphi^{m-1} + \dots + \frac{a_m}{b_m} = 0$$

con $a_i, b_i \in \Gamma(X, L^{d_i})$, $d_i \geq 0$, $b_i \neq 0$.

Dimostriamo adesso che se $c = b_1 b_2 \dots b_m \in \Gamma(X, L^d)$, $d = \sum d_i$, allora $f := c\varphi \in \mathcal{M}(X, L^d)$ è in realtà una sezione olomorfa di L^d e di conseguenza $\varphi = \frac{f}{c} \in Q(X, L)$.

La relazione (2.9) moltiplicata per c^m diventa

$$c^m \varphi^m + \frac{c^m a_1}{b_1} \varphi^{m-1} + \dots + \frac{c^m a_m}{b_m} = 0$$

che, siccome b_i divide c per ogni $i = 1, \dots, m$, si può scrivere come

$$f^m + u_1 f^{m-1} + \dots + u_m = 0$$

con $f \in \mathcal{M}(X, L^d)$ e $u_i = \frac{c^m a_i}{b_i c^{m-i}} \in \Gamma(X, L^d)$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Sia $x \in X$, allora esiste un intorno sufficientemente piccolo $x \in \Delta$ tale che:

- $\Delta \subset U_i$ per qualche i . Quindi L è banale su Δ , le $u_i \in \mathcal{O}(\Delta)$ e $f \in \mathcal{M}(\Delta)$;
- $f = g/h$ con $g, h \in \mathcal{O}(\Delta)$ e $MCD(g, h) = 1$ in $\mathcal{O}_{\Delta, x}$.

Dunque nel dominio a fattorizzazione unica $\mathcal{O}_{\Delta, x}$ vale

$$\frac{g^m}{h^m} + u_1 \frac{g^{m-1}}{h^{m-1}} + \dots + u_m = 0.$$

Moltiplicando il tutto per h^m se ne deduce che h divide g^m che è possibile solo se h è invertibile, ossia solo se f è olomorfa in x . \square

COROLLARIO 2.7.10 (Hurwitz). *Ogni funzione meromorfa su \mathbb{P}^n è il quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado nelle coordinate omogenee.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla descrizione delle sezioni globali dei fibrati H^d come polinomi omogenei di grado d segue che $Q(\mathbb{P}^n, H^1)$ coincide con il sottocampo $Q \subset \mathcal{M}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$ descritto nell'Esempio 2.3.4 che abbiamo visto (Esempio 2.3.12) avere grado di trascendenza su \mathbb{C} almeno n . D'altra parte per il Corollario 2.7.6 il grado di trascendenza di $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$ su \mathbb{C} è al più n . Dunque i campi $Q(\mathbb{P}^n, H^1)$ e $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$ devono avere entrambi grado di trascendenza n su \mathbb{C} . \square

ESERCIZIO 2.7.11. Siano s_1, \dots, s_m sezioni oloedre di un fibrato vettoriale oloedro $E \rightarrow X$. Per ogni $0 \leq k \leq m$ definiamo $X_k \subset X$ come il sottoinsieme dei punti x tali che i vettori $s_1(x), \dots, s_m(x) \in E_x$ generano un sottospazio vettoriale di dimensione $\leq k$. Provare che X_k è un chiuso analitico.

2.8. Indipendenza analitica e teorema di Siegel

Allo stesso modo in cui nelle varietà differenziabili si definiscono le forme differenziali di classe C^∞ , si definiscono le forme differenziali oloedre sulle varietà complesse.

Molto concretamente, se X è una varietà complessa e T_x denota lo spazio tangente oloedro nel punto $x \in X$ (che si può definire come lo spazio delle derivazioni $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$), dare una k -forma differenziale oloedra ω su un aperto $U \subset X$ significa dare, per ogni $x \in U$ un'applicazione \mathbb{C} -multilineare alternante

$$\omega(x): \underbrace{T_x \times \cdots \times T_x}_k \rightarrow \mathbb{C}$$

che dipende oloedricamente da x . Ciò significa che in coordinate locali oloedre z_1, \dots, z_n deve essere

$$(2.10) \quad \omega(z) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(z) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}$$

con le funzioni $a_{i_1 \dots i_k}(z)$ oloedre. Denotiamo con $\Omega_X^k(U)$ lo spazio vettoriale delle forme differenziali oloedre su U . In tale contesto osserviamo che:

- (1) dz_1, \dots, dz_n sono una base del duale di $T_x = \text{Der}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C})$, mediante l'accoppiamento che ad ogni derivazione $\eta \in \text{Der}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C})$ associa il numero complesso $dz_i(\eta) = \eta(z_i) \in \mathbb{C}$.

In particolare, per ogni funzione oloedra f il suo differenziale è

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i.$$

- (2) Nella convenzione adottata in queste note³, per ogni successione di indici $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ la forma $\omega = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}$ corrisponde all'applicazione multilineare alternante

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma} (-1)^\sigma dz_{i_1}(v_{\sigma(k)}) dz_{i_2}(v_{\sigma(k-1)}) \cdots dz_{i_k}(v_{\sigma(1)})$$

dove la somma è presa su tutte le permutazioni σ di $\{1, \dots, k\}$ e $(-1)^\sigma$ indica la segnatura.

- (3) Il prodotto

$$(dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}) \wedge (dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_n}) = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} \wedge dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_n}$$

si estende per bilinearità ad un prodotto associativo

$$\Omega_X^k(U) \times \Omega_X^h(U) \rightarrow \Omega_X^{h+k}(U), \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta.$$

- (4) Il luogo di zeri di una forma differenziale

$$V(\omega) = \{x \in U \mid \omega(x) = 0\}, \quad \omega \in \Omega_X^k(U),$$

è un chiuso analitico. Infatti in una carta locale nella quale ω si scrive come in (2.10) si ha $V(\omega) = \bigcap_{i_1 < \cdots < i_k} V(a_{i_1 \dots i_k})$.

³Canonica a meno di fattori costanti.

Possiamo estendere la nozione di forma differenziale al caso meromorfo: una k -forma differenziale è meromorfa se in coordinate locali z_1, \dots, z_n si scrive come

$$\omega(z) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k}(z) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$$

con le funzioni $\varphi_{i_1 \dots i_k}(z)$ meromorfe. Più precisamente si tratta di una classe di equivalenza di espressioni meromorfe

$$\left(U_i, \frac{\omega_i}{g_i} \right), \quad X = \cup U_i, \quad \omega_i \in \Omega_X^k(U_i), \quad g_i \in \mathcal{O}_X(U_i), \quad V(g_i)^o = \emptyset, \quad g_i \omega_j = g_j \omega_i.$$

Due espressioni meromorfe di k -forme $(U_i, \omega_i/g_i)$ e $(V_j, \eta_j/q_j)$ definiscono la stessa forma meromorfa se e solo se per ogni i, j si ha

$$q_j \omega_i = g_i \eta_j \in \Omega^k(U_i \cap V_j).$$

Il differenziale di una funzione meromorfa $\varphi = (U_i, f_i/g_i)$ è ben definito dalla formula

$$d\varphi = \left(U_i, \frac{g_i(df_i) - f_i(dg_i)}{g_i^2} \right)$$

ed è una 1-forma differenziale meromorfa.

DEFINIZIONE 2.8.1. Sia X una varietà connessa, le funzioni meromorfe $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{M}_X(X)$ si dicono **analiticamente indipendenti** se

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k \neq 0, .$$

LEMMA 2.8.2. *Siano X varietà connessa e $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{M}_X(X)$ analiticamente indipendenti. Allora $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono algebricamente indipendenti ed esiste un aperto denso e connesso $V \subset X$ tale che $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(V)$ per ogni i e $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k(x) \neq 0$ per ogni $x \in V$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già visto che per ogni i esiste un chiuso analitico proprio D_i tale che $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(X - D_i)$. Per 2.3.2 l'aperto $U = X - (D_1 \cup \dots \cup D_k)$ è denso e connesso e $\varphi_i \in \mathcal{O}(U)$ per ogni i . Basta allora definire $V = U - V(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k)$.

Per quanto riguarda la prima asserzione, supponiamo per assurdo che $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ siano algebricamente dipendenti e sia $P \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_k]$ non nullo e di grado minimo tale che $P(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \equiv 0$. Sull'aperto V , per la regola della funzione composta si ha

$$0 = dP = \sum \frac{\partial P}{\partial t_i} (\varphi_1, \dots, \varphi_k) d\varphi_i$$

ma siccome i differenziali $d\varphi_i$ sono linearmente indipendenti in ogni punto di V , segue da principio di identità che che ogni derivata $\frac{\partial P}{\partial t_i}$ annulla le $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Siccome P ha grado positivo esiste almeno una derivata non nulla il cui grado è minore di quello di P . \square

L'Esempio 2.3.15 mostra che in generale funzioni meromorfe algebricamente indipendenti non sono analiticamente indipendenti. Tuttavia nel caso compatto vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.8.3. *In una varietà connessa e compatta, funzioni meromorfe algebricamente indipendenti sono anche analiticamente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{M}_X(X)$ algebricamente indipendenti e supponiamo per assurdo $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k = 0$. A meno di permutazioni degli indici possiamo supporre che esista un intero $1 \leq m < k$ tale che

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \neq 0, \quad d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \wedge d\varphi_{m+1} = 0$$

e creiamo la contraddizione dimostrando che $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ sono algebricamente dipendenti.

Per ogni coppia di interi positivi a, b denotiamo con $P_{a,b} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_{m+1}]$ il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq a$ nelle variabili t_1, \dots, t_m e grado $\leq b$ nella variabile t_{m+1} , ossia

$$q \in P_{a,b} \iff q = \sum_{i=0}^b q_i(t_1, \dots, t_m) t_{m+1}^i, \quad \deg(q_i) \leq a.$$

Le precedenti osservazioni sulla dimensione degli spazi P_d implicano immediatamente che $P_{a,b}$ ha dimensione

$$(b+1) \binom{a+m}{m} = \frac{b+1}{m!} a^m + \dots \in \mathbb{Q}[a].$$

LEMMA 2.8.4. *Nelle notazioni precedenti, Sia $x \in X$ un punto dove le $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ sono olomorfe e dove $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m(x) \neq 0$. Allora, per ogni $d \geq 0$ il sottospazio vettoriale*

$$V = \{q \in P_{a,b} \mid \nu_x(q(\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})) > d\}$$

ha codimensione $\leq \binom{m+d}{d}$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m(x) \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite, in un intorno di x sufficientemente piccolo le funzioni φ_i sono olomorfe ed esiste un sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n centrate in x e tali che $d\varphi_i = dz_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Per ipotesi $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\varphi_{m+1} \equiv 0$, ossia $\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial z_j} \equiv 0$ per ogni $j > m$ e dunque φ_{m+1} è localmente una serie di potenze in z_1, \dots, z_m . Di conseguenza anche $q(\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$ per ogni polinomio $q \in P_{a,b}$ e basta ricordare che $\binom{m+d}{d}$ è la codimensione del sottospazio di $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$ delle serie di molteplicità $> d$. \square

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per il Corollario 2.6.6 esiste un line bundle L e $m+2$ sezioni $s_0, \dots, s_{m+1} \in \Gamma(X, L)$ tali che $\varphi_i = s_i/s_0$. Denotiamo con $E \subset X$ l'aperto denso dove le $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ sono olomorfe e dove $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \neq 0$, $s_0 \neq 0$.

Per il Teorema 2.7.2 esistono finiti punti $x_1, \dots, x_r \in E$ ed un intero $h > 0$ tale che se una sezione di L^d ha molteplicità maggiore di dh in ciascun punto x_i allora $s = 0$.

Basta adesso osservare che per un polinomio $q \in P_{a,b}$ si ha

$$(2.11) \quad s_0^{a+b} q(\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}) \in \Gamma(X, L^{a+b})$$

e che tale sezione ha la medesima molteplicità di $q(\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ nei punti x_i . Dunque il sottospazio dei polinomi in $P_{a,b}$ tali che la sezione (2.11) si annulla ha codimensione

$$\leq r \binom{m+h(a+b)}{m} = \frac{rh^m}{m!} a^m + \dots \in \mathbb{Q}[a].$$

Basta quindi fissare un $b \geq rh^m$ affinché, per $a \gg 0$ tale sottospazio abbia dimensione positiva ed esista un polinomio non nullo che annulla $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$. \square

TEOREMA 2.8.5. *Siano L un line bundle su una varietà connessa e compatta X e siano $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in Q(X, L)$ analiticamente indipendenti. Allora*

$$\mathbb{C}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \subset F := \{\phi \in Q(X, L) \mid d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \wedge d\phi = 0\},$$

è una estensione di campi algebrica finita.

DIMOSTRAZIONE. Vediamo subito che F è un sottocampo di $Q(X, L)$ che contiene \mathbb{C} e $\varphi_1, \dots, \varphi_m$: basta infatti osservare che la formula di Leibniz

$$d(\phi\psi) = \phi d\psi + \psi d\phi, \quad d\phi^{-1} = -\frac{d\phi}{\phi^2},$$

vale anche per i differenziali di funzioni meromorfe.

Se $\varphi_i = a_i/b_i$, con $a_i, b_i \in \Gamma(X, L^{e_i})$, a meno di passare ad un denominatore comune possiamo supporre $\varphi_i = s_i/s_0$ con $s_0, \dots, s_m \in \Gamma(X, L^e)$ per un opportuno e .

Denotiamo con $E \subset X$ l'aperto denso dove $s_0 \neq 0$ (quindi $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sono olomorfe in E) e dove $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \neq 0$. Sempre per il Teorema 2.7.2 esistono finiti punti $x_1, \dots, x_r \in E$ ed un intero $h > 0$ tale che se una sezione di L^d ha molteplicità maggiore di dh in ciascun punto x_i allora $s = 0$, per ogni $d > 0$.

Fissiamo un intero $b \geq rh^m e^m$; per il Corollario 2.3.8 basta dimostrare che ogni elemento $\phi \in F$ annulla un polinomio di grado $\leq b$ a coefficienti in $\mathbb{C}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

Sia $\phi \in F$ fissata e scriviamola nella forma $\phi = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \in F$ con $\sigma_0, \sigma_1 \in \Gamma(X, L^\tau)$ per un opportuno intero $\tau > 0$ (dipendente da ϕ).

Sia x uno qualunque dei suddetti punti $x_1, \dots, x_r \in E$; per il teorema delle funzioni implicite, in un intorno di x esiste un sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n ($n = \dim X$) centrate in x e tali che $d\varphi_i = dz_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Mostriamo adesso che la funzione meromorfa ϕ si può scrivere in un intorno di x come un quoziente $\phi = f/g$ con $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$: se $\phi = p/q$ con $p, q \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$ senza fattori comuni, si ha $d\phi = \frac{qdp - pdq}{q^2}$ e dalla relazione

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge \frac{qdp - pdq}{q^2} \equiv 0$$

segue che

$$q \frac{\partial p}{\partial z_i} = p \frac{\partial q}{\partial z_i}, \quad \forall i = m+1, \dots, n.$$

Dunque q divide le derivate $\frac{\partial q}{\partial z_i}$ per ogni $i = m+1, \dots, n$. per il Lemma 1.7.21 a meno di moltiplicare p, q per un invertibile si può supporre $q \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$; questo implica $\frac{\partial p}{\partial z_i} = \frac{p}{q} \frac{\partial q}{\partial z_i} = 0$ per ogni $i > m$ e quindi anche $p \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$.

Per ogni intero positivo a denotiamo $P_{a,b} \subset \mathbb{C}[t_0, \dots, t_m, u_0, u_1]$ il sottospazio vettoriale dei polinomi biomogenei di grado a nelle variabili t_i e b nelle variabili u_j . La dimensione di $P_{a,b}$ è esattamente

$$(b+1) \binom{a+m}{m} = \frac{b+1}{m!} a^m + \dots \in \mathbb{Q}[a]$$

e per ogni $q \in P_{a,b}$ si ha $q(s_0, \dots, s_m, \sigma_0, \sigma_1) \in \Gamma(X, L^{ea+\tau b})$.

Mostriamo adesso che per ogni s il sottospazio

$$V = \{q \in P_{a,b} \mid \nu_x(q(s_0, \dots, s_m, \sigma_0, \sigma_1)) > s\}$$

ha codimensione $\leq \binom{s+m}{m}$. Nelle coordinate z_i come sopra, siccome $dz_i = d\varphi_i$ si ha $s_i = s_0(z_i + \text{costante})$ ed esiste un germe di funzione olomorfa α tale che $\sigma_0 = \alpha q$, $\sigma_1 = \alpha p$ con $p, q \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$. Ma allora

$$\nu_x(q(s_0, \dots, s_m, \sigma_0, \sigma_1)) = \nu_x(s_0^a \alpha^b q(1, \varphi_1, \dots, \varphi_m, q, p)) \geq \nu_x(q(1, \varphi_1, \dots, \varphi_m, q, p))$$

e $q(1, \varphi_1, \dots, \varphi_m, q, p) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$. Dunque

$$V \supset W := \{q \in P_{a,b} \mid \nu_x(q(1, \varphi_1, \dots, \varphi_m, q, p)) > s\}$$

ed il ragionamento già fatto in più occasioni mostra che la codimensione di W è $\leq \binom{s+m}{m}$.

Da ciò segue che esiste $q \in P_{a,b}$ che annulla $q(s_0, \dots, s_m, \sigma_0, \sigma_1)$ ogni volta che

$$(b+1) \binom{m+a}{m} > r \binom{m+h(ea+\tau b)}{m} = \frac{rh^m e^m}{m!} a^m + \dots \in \mathbb{Q}[a].$$

e, siccome $b \geq rh^m e^m$, ciò accade per $a \gg 0$. \square

COROLLARIO 2.8.6. *Siano X varietà connessa e compatta, e $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{M}_X$ analiticamente indipendenti. Se*

$$F = \{\phi \in \mathcal{M}(X) \mid d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_m \wedge d\phi = 0\},$$

allora

$$\mathbb{C}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \subset F$$

è una estensione di campi algebrica finita.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che esiste un line bundle L tale che $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in Q(X, L)$ e che, per il Lemma 2.8.2, le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sono algebricamente indipendenti. Sia $\phi \in F$, per il Teorema 2.8.3 le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \phi$ sono algebricamente dipendenti. Dunque ϕ è algebrico su $\mathbb{C}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ e per il Teorema 2.7.9 si ha $\phi \in Q(X, L)$. Dunque $F \subset Q(X, L)$ e la conclusione segue dal Teorema 2.8.5. \square

COROLLARIO 2.8.7 (Teorema di Siegel). *Sia X varietà connessa compatta di dimensione n . Allora il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}_X(X)$ è una estensione finitamente generata di \mathbb{C} di grado di trascendenza $\leq n$.*

Per ogni line bundle L su X il campo $Q(X, L)$ è una estensione finitamente generata di \mathbb{C} .

DIMOSTRAZIONE. Per la prima parte, prendere un insieme massimale di funzioni meromorfe analiticamente indipendenti ed applicare il Corollario 2.8.6. Per la seconda, un insieme massimale di funzioni meromorfe in analiticamente indipendenti in $Q(X, L)$ ed applicare il Teorema 2.8.5 \square

Il materiale di questa sezione proviene in buona parte dalle note dei corsi di Aldo Andreotti [1] e Phillip Griffiths [5].

2.9. I problemi di Cousin

Nel 1883 Henri Poincaré dimostrò che “*Si une fonction analytique de deux variables complexes n’admet à distance finie que des singularités non essentielles elle est le quotient de deux fonctions entières*”, che tradotto in linguaggio moderno significa che “*ogni funzione meromorfa su \mathbb{C}^2 è il quoziente di due funzioni intere.*”

Undici anni più tardi, Pierre Cousin, nell’ottica di estendere il teorema di Poincaré in dimensione più alta e varietà complesse più generali formulò due problemi, oggi detti Cousin I e Cousin II, che hanno avuto una grande importanza nello sviluppo della matematica.

I problemi di Cousin: (vedi [7]). Sia $X = \cup U_i$ un ricoprimento aperto di una varietà complessa connessa e siano date funzioni meromorfe $\varphi_i \in \mathcal{M}_X(U_i)$ per ogni i .

(1) (*Primo problema.*) Si assuma che per ogni i, j valga $\varphi_i - \varphi_j \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$. Trovare $\varphi \in \mathcal{M}_X(X)$ tale che $\varphi - \varphi_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ per ogni i .

(2) (*Secondo problema.*) Si assuma φ_i invertibile per ogni i e che per ogni i, j valga $\frac{\varphi_i}{\varphi_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$. Trovare $\varphi \in \mathcal{M}_X(X)$ tale che $\frac{\varphi}{\varphi_i} \in \mathcal{O}_X^*(U_i)$ per ogni i .

Entrambi i problemi di Cousin sono soddisfatti da tutti gli aperti di \mathbb{C} , con i nomi di Teorema di Mittag-Leffler (1882, Cousin I) e Teorema di Weierstrass (1876, Cousin II), vedi ad esempio il capitolo XIII di [17].

Anche se molto simili (basta scambiare somme con prodotti per passare dal primo al secondo problema di Cousin), il secondo problema è decisamente più difficile da verificare. La relazione tra problemi di Cousin ed il teorema di Poincaré è data dal seguente semplice risultato.

PROPOSIZIONE 2.9.1. *Sia X una varietà complessa connessa in cui il secondo problema di Cousin ammette sempre soluzione. Allora ogni funzione meromorfa è quoziente di due funzioni olomorfe $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$, con i germi di f e g senza fattori comuni in ogni punto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ϕ una funzione meromorfa, che possiamo supporre $\neq 0$ e rappresentata da una espressione normalizzata $(U_i, f_i/g_i)$. Abbiamo già osservato che in tale caso le funzioni

$$h_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{g_i}{g_j}$$

sono olomorfe ed invertibili sugli aperti U_{ij} .

Adesso la soluzione del Cousin II per la distribuzione (U_i, f_i) è una funzione meromorfa f tale che $f/f_i \in \mathcal{O}_X^*(U_i)$ per ogni i . Ma le f_i sono olomorfe e quindi anche f è olomorfa. Denotando $h_i = f g_i / f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ si ha $h_i = h_j$ su U_{ij} e quindi le h_i si incollano ad una funzione olomorfa $h \in \mathcal{O}_X(X)$ tale che $f/h = f_i/g_i$. Localmente f, h differiscono da f_i, g_i per funzioni olomorfe invertibili e quindi i rispettivi germi hanno gli stessi fattori irriducibili. \square

Segue dalla precedente proposizione che, in una varietà compatta avente funzioni meromorfe non costanti, il secondo problema di Cousin non può essere risolvibile.

Nell’approccio moderno, i problemi di Cousin vengono leggermente modificati in modo da poter poi essere trattati usando le teorie coomologiche: la nuova versione, che chiameremo “alla Čech”, è la seguente:

I problemi di Cousin (alla Čech): Sia $X = \cup U_i$ un ricoprimento aperto di una varietà complessa connessa.

- (1) (*Primo problema.*) Si assuma che per ogni i, j sia data una funzione olomorfa $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$ e che $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ in $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ per ogni i, j, k . Trovare funzioni $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tali che $f_j - f_i = f_{ij}$ per ogni i, j .
- (2) (*Secondo problema.*) Si assuma che per ogni i, j sia data una funzione olomorfa $f_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$ e che $f_{jk}f_{ik}^{-1}f_{ij} = 1$ in $\mathcal{O}_X^*(U_{ijk})$ per ogni i, j, k . Trovare $f_i \in \mathcal{O}_X^*(U_i)$ tali che $f_j/f_i = f_{ij}$ per ogni i, j .

È facile vedere che i problemi alla Čech implicano i problemi classici: vediamo tale implicazione solo per il primo problema; lo stesso argomento, con i prodotti al posto delle somme, si applica anche per il secondo problema.

Siano dunque $\varphi_i \in \mathcal{M}_X(U_i)$ tali che $f_{ij} := \varphi_j - \varphi_i \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$ per ogni i, j . È ovvio che $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ in $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ per ogni i, j, k e se vale il primo Cousin bis esistono $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tali che $f_j - f_i = f_{ij}$ per ogni i, j . Definiamo $\psi_i = \varphi_i - f_i$, allora

$$\psi_j - \psi_i = \varphi_j - \varphi_i - f_j + f_i = f_{ij} - f_{ij} = 0$$

e quindi le funzioni meromorfe ψ_i si incollano ad una unica funzione meromorfa ψ tale che $\psi - \varphi_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ per ogni i .

Fasce

3.1. Brevi e grossolani cenni su categorie, funtori e trasformazioni naturali

La teoria delle categorie nasce dall'osservazione che molte proprietà di sistemi matematici possono essere unificate, e spesso semplificate, mediante una presentazione con diagrammi di frecce. In un certo senso, lo scopo della teoria delle categorie è quello di fare a meno degli elementi, usando al loro posto le frecce.

I primi tre concetti che si incontrano in teoria delle categorie sono, nell'ordine, quelli di *categoria*, *funttore* e *trasformazione naturale*: l'ultimo dei tre è già ampiamente presente nella matematica “tradizionale” sotto forma di “(iso)morfismo canonico e/o naturale”; va osservato che il concetto di “categoria” è stato definito al fine di definire quello di “funttore”, e “funttore” è stato definito per definire “trasformazione naturale”.

Un esempio di funttore è quello che ad ogni insieme X associa il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$: sembrerebbe quindi utile e sensato considerare \mathcal{P} come un'applicazione

$$\mathcal{P}: \text{Insieme degli insiemi} \rightarrow \text{Insieme degli insiemi}.$$

Il problema è che assumere l'esistenza dell'insieme degli insiemi porta al celebre **paradosso di Russell** (chi non lo conosce se lo cerchi su Wikipedia oppure su [18]). Bisogna quindi andare oltre la teoria ingenua degli insiemi e avere un approccio più assiomatico e meno intuitivo.

A seconda del grado di assiomatizzazione richiesto dal contesto di applicazione delle categorie (molto alto per la logica, ragionevolmente basso per la geometria delle varietà) sono possibili diversi approcci. Quello che seguiremo è uno dei più semplici e si basa sull'*alternativa di von Neumann-Bernays*, per la quale **la collezione di tutti gli insiemi esiste, ma non è un insieme**.¹

Molto grossolanamente, l'idea è quella di avere i concetti di **collezione** di oggetti e di **appartenenza** (\in) ad una collezione come concetti primitivi (che non necessitano di spiegazioni ulteriori, ma solo di assiomi ai cui devono sottostare). A differenza della teoria ingenua degli insiemi [8], ogni insieme è una collezione, ma il viceversa è generalmente falso. Per la precisione, una collezione X è un insieme se e solo se è a sua volta un oggetto, ossia $X \in Y$, di qualche altra collezione Y . Le collezioni che non sono insiemi vengono dette **classi proprie**. Si può usare il termine **classe** sia per denotare una classe propria che un insieme.²

DEFINIZIONE 3.1.1. Una **categoria** \mathbf{C} è una struttura matematica che consiste di tre dati:

- una classe $\text{Ob}(\mathbf{C})$ i cui elementi sono detti **oggetti** della categoria;
- per ogni coppia di oggetti $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ è definito un insieme $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$ i cui elementi sono detti **morfismi**, o **frecce** da A a B , e denotati graficamente come $f: A \rightarrow B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$;
- per ogni terna di oggetti A, B, C di \mathbf{C} , una **legge di composizione**:

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(B, C) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

per semplicità di notazione denoteremo anche $gf = g \circ f$.

¹Questa alternativa elimina il paradosso di Russell, ma non è esente da altri paradossi, che fortunatamente sono meno evidenti e lontani dalla maggior parte degli ambiti matematici più comuni. Per una maggiore protezione è invece necessario adottare l'alternativa di Zermelo-Frankel, secondo cui la collezione di tutti gli insiemi non esiste, punto.

²Per maggiori informazioni si può vedere l'Appendice di [12].

I tre dati precedenti deve rispettare i seguenti tre assiomi:

- A1:** Due insiemi di morfismi $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$, $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(A', B')$ sono disgiunti a meno che $A = A'$ e $B = B'$; ossia ogni freccia determina univocamente il proprio dominio e codominio.
- A2:** la legge di composizione è associativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ogniqualvolta entrambi i membri sono definiti;
- A3:** Per ogni oggetto $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ esiste un morfismo $\text{Id}_A \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, A)$, detto identità, e tale che per ogni B , ogni $f \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$ vale $\text{Id}_A f = f = f \text{Id}_B$.

ESEMPIO 3.1.2. Alcuni esempi ben noti di categorie sono:

- (1) *la categoria **Set** degli insiemi:* gli oggetti sono gli insiemi, i morfismi sono le applicazioni e la legge di composizione è quella tradizionale;
- (2) *la categoria **Ab** dei gruppi abeliani:* gli oggetti sono i gruppi abeliani, i morfismi sono gli omomorfismi e la legge di composizione è quella tradizionale;
- (3) *la categoria **Top** degli spazi topologici:* gli oggetti sono gli spazi topologici, i morfismi sono le applicazioni continue e la legge di composizione è quella tradizionale;

ESEMPIO 3.1.3 (Categorie piccole). Una categoria si dice **piccola** se la classe degli oggetti è un insieme. Ecco tre esempi di categorie piccole

- (1) sia G un gruppo qualsiasi e consideriamo la categoria \mathbf{C} che ha un solo oggetto $*$, come insieme di morfismi $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(*, *) = G$ e come legge di composizione il prodotto in G .
- (2) sia X un insieme qualsiasi e consideriamo la categoria \mathbf{C} che ha come oggetti X e come morfismi

$$\text{Mor}_{\mathbf{C}}(x, y) = \begin{cases} \text{Id}_x & \text{se } x = y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (3) per ogni insieme ordinato (X, \leq) possiamo considerare la categoria che ha come oggetti X e come morfismi

$$\text{Mor}_{\mathbf{C}}(x, y) = \begin{cases} \text{una sola freccia} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (4) per ogni spazio topologico X denotiamo con $\text{Open}(X)^\circ$ la **categoria opposta degli aperti** di X , che ha come oggetti gli aperti di X e come morfismi

$$\text{Mor}_{\text{Open}(X)^\circ}(U, V) = \begin{cases} \text{una sola freccia} & \text{se } V \subseteq U \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESEMPIO 3.1.4 (Categoria diretta degli ordinali finiti). Denotiamo con $\vec{\Delta}$ la categoria che ha come oggetti i sottoinsiemi di \mathbb{N} del tipo $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, e come morfismi le applicazioni strettamente crescenti. Si noti che $\text{Mor}_{\vec{\Delta}}([n-1], [n])$ contiene esattamente gli $n+1$ morfismi

$$\delta_k: [n-1] \rightarrow [n], \quad \delta_k(p) = \begin{cases} p & \text{if } p < k \\ p+1 & \text{if } p \geq k \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n,$$

Ossia, δ_k è l'unica applicazione strettamente crescente la cui immagine evita k . Lasciamo al lettore la semplice verifica delle *identità semicosimpliciali*

$$(3.1) \quad \delta_l \delta_k = \delta_{k+1} \delta_l, \quad \text{per ogni } l \leq k.$$

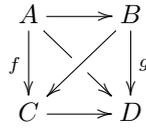
La consueta nozione di diagramma commutativo (di insiemi, gruppi ecc.) si estende in maniera ovvia ed indolore a qualunque categoria.

Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ in una categoria si dice un **isomorfismo** se esiste un morfismo (nella medesima categoria) $g: Y \rightarrow X$ tale che $fg = \text{Id}_Y$ e $gf = \text{Id}_X$. Se un tale g esiste allora è unico (se $hf = \text{Id}$ e $fh = \text{Id}$ allora $g = g\text{Id} = gfh = \text{Id}h = h$) e viene detto inverso di f . Le identità sono isomorfismi.

ESERCIZIO 3.1.5. Dimostrare, prima nella categoria degli insiemi e poi in una categoria qualunque i seguenti risultati:

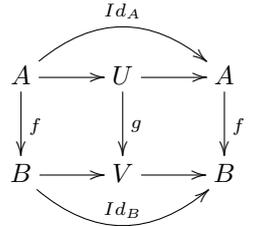
LEMMA 3.1.6 (Regola del 2 su 3). *Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ due morfismi. Se due qualsiasi dei tre morfismi f, g, gf sono isomorfismi, allora lo è anche il terzo.*

LEMMA 3.1.7 (Regola del 2 su 6). *Dato un diagramma commutativo*



di 4 oggetti e 6 morfismi, se f e g sono isomorfismi, allora sono isomorfismi pure i rimanenti quattro morfismi.

LEMMA 3.1.8 (Retrazioni). *Dato un diagramma commutativo*



se g è un isomorfismo, allora anche f è un isomorfismo.

Due oggetti X, Y nella medesima categoria \mathbf{C} si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo $f: X \rightarrow Y$, e si scrive $X \simeq Y$. È quasi ovvio che la relazione \simeq è di equivalenza sulla classe degli oggetti, e per l'assioma della scelta³, esiste una sottoclasse $Q \subset \text{Ob}(\mathbf{C})$ con la proprietà che per ogni $X \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ esiste un unico $Y \in Q$ isomorfo ad X .

DEFINIZIONE 3.1.9. Una sottocategoria \mathbf{D} di una categoria \mathbf{C} è il dato di:

- una sottoclasse di oggetti $\text{Ob}(\mathbf{D}) \subset \text{Ob}(\mathbf{C})$;
- per ogni coppia di oggetti $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ è definito un sottoinsieme $\text{Mor}_{\mathbf{D}}(A, B) \subset \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Si richiede inoltre che la legge di composizione di \mathbf{C} definisca una struttura di categoria su \mathbf{D} : ciò equivale a dire che $\text{Id}_A \in \text{Mor}_{\mathbf{D}}(A, A)$ per ogni $A \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ e che $gf \in \text{Mor}_{\mathbf{D}}(A, C)$ per ogni $g \in \text{Mor}_{\mathbf{D}}(B, C)$ ed $f \in \text{Mor}_{\mathbf{D}}(A, B)$.

ESEMPIO 3.1.10 (Sottocategorie piene). Una sottocategoria si dice **piena** se ogni sua coppia di oggetti ha gli stessi morfismi della categoria ambiente. Una sottocategoria piena \mathbf{D} della categoria \mathbf{C} è univocamente determinata dalla sottoclasse degli oggetti $\text{Ob}(\mathbf{D}) \subset \text{Ob}(\mathbf{C})$. Viceversa ogni sottoclasse $\mathcal{H} \subset \text{Ob}(\mathbf{C})$ definisce una sottocategoria piena \mathbf{D} con oggetti $\text{Ob}(\mathbf{D}) = \mathcal{H}$ e morfismi $\text{Mor}_{\mathbf{D}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{H}$.

ESEMPIO 3.1.11. La categoria dei gruppi abeliani è una sottocategoria piena della categoria dei gruppi, mentre la categoria degli spazi vettoriali complessi non è una sottocategoria piena della categoria degli spazi vettoriali reali (esercizio: perché?).

I funtori hanno la funzione di collegare, in maniera più o meno completa, categorie differenti.

DEFINIZIONE 3.1.12. Siano \mathbf{C}, \mathbf{D} due categorie. Un **funto**re da \mathbf{C} a \mathbf{D} , denotato $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è il dato di:

- una legge che ad ogni oggetto X di \mathbf{C} associa un oggetto $F(X)$ di \mathbf{D} ;
- per ogni coppia di oggetti X, Y di \mathbf{C} , un'applicazione di insiemi

$$F: \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

tale che:

- (1) $F(fg) = (F(f))(F(g))$,
- (2) $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$.

ESEMPIO 3.1.13. 1) In ogni categoria è definito il funto

re identità che lascia invariati oggetti e morfismi nella medesima categoria.

2) dicesi generalmente funto

re dimenticante un funtore che lascia invariati oggetti e morfismi ma si dimentica di una parte di struttura passando da una categoria ad un'altra "più

³Più precisamente per l'estensione di tale assioma alle classi.

semplice”: ad esempio sono funtori dimenticanti quello dagli spazi topologici agli insiemi che si dimentica della struttura topologica e quello dagli spazi vettoriali ai gruppi abeliani che si dimentica del prodotto per scalare.

ESEMPIO 3.1.14. La categoria delle categorie piccole viene usualmente denotata **Cat**: gli oggetti sono le categorie piccole ed i morfismi sono i funtori. L’alternativa di von Neumann-Bernays impedisce di formare la categoria di tutte le categorie (la collezione dei funtori tra due categorie non piccole non è un insieme) e ci preserva dall’analogo categoriale del paradosso di Russell.

È chiaro che ogni funtore trasforma diagrammi commutativi in diagrammi commutativi. Se $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $G: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ sono due funtori, la loro composizione $GF: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ si definisce nel modo ovvio ed è ancora un funtore.

DEFINIZIONE 3.1.15. Un funtore $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ si dice:

- (1) **fedele** se per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$ l’applicazione $F: \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ è iniettiva;
- (2) **pieno** se per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$ l’applicazione $F: \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ è surgettiva;
- (3) **essenzialmente surgettivo sugli oggetti** se per ogni $Z \in \mathbf{D}$ esiste $X \in \mathbf{C}$ tal che $F(X) \simeq Z$.

Un funtore che soddisfa tutte e tre le precedenti condizioni si dice **equivalenza di categorie**.

OSSERVAZIONE 3.1.16. Esiste una ovvia la nozione di isomorfismo di categorie, e cioè un funtore che è bigettivo sia sugli oggetti che sui morfismi. Questa nozione ha una certa utilità solo per categorie piccole, in cui gli insiemi degli oggetti sono definiti da condizioni molto stringenti e dettagliate, cf. Esempio 3.1.14.

Per categorie grandi, la nozione più interessante è quella di equivalenza, sia perché vogliamo mantenere una certa flessibilità nella definizione degli oggetti, sia perché l’equivalenza rappresenta meglio le motivazioni che hanno portato all’introduzione delle categorie (sono più importanti le frecce degli oggetti).

In termini informali, le equivalenze collegano categorie che si comportano alla stessa maniera ma di taglia diversa.

- ESEMPIO 3.1.17.**
- (1) il funtore dimenticante $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ è fedele ed essenzialmente surgettivo sugli oggetti (esercizio), ma non è pieno.
 - (2) siano \mathbf{C} la categoria degli spazi vettoriali reali di dimensione finita e \mathbf{D} la categoria che ha come oggetti i numeri naturali $Ob(\mathbf{D}) = \mathbb{N}$, come morfismi

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(n, m) = M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ matrici } m \times n,$$

e come legge di composizione il prodotto righe per colonne. Abbiamo allora un’equivalenza di categorie

$$F: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \quad F(n) = \mathbb{R}^n,$$

con FA applicazione lineare associata alla matrice A .

DEFINIZIONE 3.1.18. Dati due funtori $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, una **trasformazione naturale** $\phi: F \rightarrow G$ è data, per ogni oggetto X di \mathbf{C} , da un morfismo $\phi_X: F(X) \rightarrow G(X)$ nella categoria \mathbf{D} tale che per ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{C} si abbia un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{Ff} & F(Y) \\ \phi_X \downarrow & & \downarrow \phi_Y \\ G(X) & \xrightarrow{Gf} & G(Y) \end{array}.$$

Diremo che, la trasformazione naturale ϕ è un **isomorfismo di funtori** se ϕ_X è un isomorfismo nella categoria \mathbf{D} per ogni $X \in \mathbf{C}$. In tal caso scriveremo $F \simeq G$.

ESEMPIO 3.1.19. Sia \mathbf{C} la categoria degli spazi vettoriali su di un campo \mathbb{K} fissato (i morfismi sono le applicazioni lineari).

Per ogni $V \in \mathbf{C}$ denotiamo

$$V^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$$

il suo duale, per $f: V \rightarrow W$ lineare, denotiamo con $f^T: W^\vee \rightarrow V^\vee$ la sua trasposta ($f^T(\phi) = \phi \circ f$). Ad algebra lineare ci hanno sadisticamente raccontato che per ogni spazio vettoriale V esiste un morfismo “naturale” iniettivo

$$i_V: V \rightarrow V^{\vee\vee}, \quad i_V(v)(\phi) = \phi(v) \quad \forall v \in V, \phi \in V^\vee.$$

L’aggettivo naturale può essere precisato usando il linguaggio delle categorie: se $I: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ è il funtore identità e $T: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ è il funtore doppio duale

$$TV = V^{\vee\vee}, \quad Tf = f^{TT},$$

allora $i: I \rightarrow T$ è una trasformazione naturale. Infatti per ogni applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow i_V & & \downarrow i_W \\ V^{\vee\vee} & \xrightarrow{f^{TT}} & W^{\vee\vee} \end{array}.$$

OSSERVAZIONE 3.1.20. Si può dimostrare (con l’aiuto dell’assioma della scelta per le classi), che un funtore $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è una equivalenza di categorie se e solo se esiste un funtore $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tale che le composizioni FG e GF siano isomorfe al funtore identità, ovvero

$$FG \simeq \text{Id}_{\mathbf{D}} \quad e \quad GF \simeq \text{Id}_{\mathbf{C}}.$$

Due categorie si dicono **equivalenti** se esiste una equivalenza fra di loro, ed è abbastanza chiaro che la relazione di equivalenza di categorie è una relazione di equivalenza.

3.2. Prefasci, spighe e morfismi

DEFINIZIONE 3.2.1. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** \mathcal{F} di gruppi abeliani su X è il dato di:

- (1) un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subset X$;
- (2) un omomorfismo di gruppi $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ per ogni inclusione di aperti $V \subset U$.

Il dato precedente deve soddisfare le seguenti condizioni:

- (F0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
- (F1) $\rho_{UU}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è l’identità per ogni U ;
- (F2) se $W \subset V \subset U$ sono inclusioni di aperti, allora $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(W)$.

I morfismi ρ_{UV} vengono detti morfismi di **restrizione** del prefascio; a volte, per semplicità notazionale, se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subset U$ si scrive $\rho_{UV}(s) = s|_V$.

Se \mathcal{F} è un prefascio su X , ogni coppia (U, s) , con $U \subset X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, viene detta una **sezione** di \mathcal{F} . Meno genericamente, per un aperto fissato U gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ vengono detti le sezioni di \mathcal{F} su U , mentre gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(X)$ sono detti **sezioni globali** di \mathcal{F} .

Naturalmente per descrivere un prefascio è sufficiente definire le sue sezioni ed i morfismi di restrizione esclusivamente per gli aperti non vuoti, e ciò è esattamente quello che faremo nei prossimi esempi.

ESEMPIO 3.2.2. Il prefascio \mathcal{C}_X delle funzioni continue in uno spazio topologico X è definito, ponendo

$$\mathcal{C}_X(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\} \quad \forall \emptyset \neq U \subset X,$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

ESEMPIO 3.2.3. Il prefascio \mathcal{C}_X^∞ delle funzioni C^∞ in una varietà differenziabile X è definito, ponendo

$$\mathcal{C}_X^\infty(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty\} \quad \forall \emptyset \neq U \subset X,$$

e i morfismi ρ_{UV} sono quelli di restrizione usuale.

Si noti che \mathcal{C}_X^∞ è un **sottoprefascio** di \mathcal{C}_X . La nozione di sottoprefascio non presenta grosse sorprese: dato un prefascio \mathcal{F} con funzioni di restrizione ρ_{UV} , un sottoprefascio $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ è il dato, per ogni aperto U di un sottogruppo $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ tale che, per ogni coppia di aperti $V \subset U$, si ha $\rho_{UV}(\mathcal{G}(U)) \subset \mathcal{G}(V)$. Le restrizioni a \mathcal{G} delle funzioni di restrizione di \mathcal{F} inducono una struttura di prefascio su \mathcal{G} .

ESEMPIO 3.2.4. Sia X uno spazio topologico. Ad ogni gruppo abeliano G possiamo associare tre prefasci \underline{G}_X , G_X e $\mathcal{C}^0 G_X$, dove per ogni aperto non vuoto U si definisce:

$$\underline{G}_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ costante}\},$$

$$G_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ localmente costante}\},$$

$$\mathcal{C}^0 G_X(U) = \{f: U \rightarrow G \text{ senza restrizioni}\} \simeq \prod_{x \in U} G.$$

Come sopra i morfismi ρ_{UV} sono quelli naturali di restrizione. Poiché somma e differenza di due funzioni (localmente) costanti sono ancora (localmente) costanti, ogni $G_X(U)$ è in modo naturale un gruppo abeliano e $\underline{G}_X(U)$ un suo sottogruppo. Dunque G_X è un prefascio su X e \underline{G}_X un suo sottoprefascio. Similmente G_X è un sottoprefascio di $\mathcal{C}^0 G_X$.

Si noti che prendendo i gruppi quozienti possiamo definire un terzo prefascio

$$\mathcal{F}(U) = \frac{G_X(U)}{\underline{G}_X(U)}$$

con la proprietà che $\mathcal{F}(U) = 0$ se U è connesso.

ESEMPIO 3.2.5. Siano X, Δ spazi topologici fissati: per ogni aperto non vuoto $U \subset X$ definiamo

$$C(\Delta, U) = \{f: \Delta \rightarrow U \text{ continue}\}, \quad \mathcal{F}(U) = \{\alpha: C(\Delta, U) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ qualsiasi}\}.$$

Allora \mathcal{F} è un prefascio con i morfismi di restrizione definiti nel modo naturale. Quando $\Delta = \Delta_{\mathbb{R}}^n$ coincide con il simpleso topologico standard di dimensione n , ritroviamo la ben nota costruzione del prefascio delle cocatene singolari di dimensione n .

DEFINIZIONE 3.2.6 (germe e spiga). Sia \mathcal{F} un prefascio con funzioni di restrizione ρ_{UV} su uno spazio topologico X e sia $x \in X$ un punto fissato: sull'insieme

$$\{\text{sezioni intorno a } x\} := \{(U, s) \mid U \text{ intorno aperto di } x, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

si consideri la relazione di equivalenza:

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \text{ aperto tale che } x \in W \subset U \cap V \text{ e } \rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t).$$

Una classe di equivalenza per tale relazione, viene detta **germe** (=germoglio) di sezione. Definiamo la **spiga** di \mathcal{F} in x come l'insieme quoziente:

$$\mathcal{F}_x = \{\text{germi di sezioni di } \mathcal{F} \text{ in } x\} = \frac{\{(U, s) \mid x \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim},$$

Equivalentemente \sim è la più piccola relazione di equivalenza tale che, per ogni $V \subset U$ ed ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si ha $(U, s) \sim (V, \rho_{UV}(s))$.

Ogni spiga è un gruppo abeliano, dove l'operazione di somma è indotta per passaggio al quoziente dalle applicazioni

$$(U, s) + (V, t) = (W, \rho_{UW}(s) + \rho_{VW}(t)), \quad x \in W \subset V \cap U.$$

L'elemento neutro è chiaramente $(X, 0)$ e l'inverso è indotto da $(U, s) \mapsto (U, -s)$.

Per ogni sezione (U, s) di \mathcal{F} ed ogni $x \in U$ denoteremo con $s_x \in \mathcal{F}_x$ il germe di s in x , ossia $s_x = [(U, s) \pmod{\sim}]$. Notiamo che per ogni aperto U ed ogni $x \in U$ l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}_x, \quad s \mapsto s_x,$$

è un omomorfismo di gruppi (per pedanteria dovremmo scrivere $\eta_{U,x}$ al posto di η , ma è preferibile essere noi ad abusare, leggermente, delle notazioni piuttosto che subire le loro vessazioni).

ESEMPIO 3.2.7. Le spighe del prefascio G_X delle funzioni localmente costanti (Esempio 3.2.4) sono tutte isomorfe al gruppo G . Infatti, per ogni punto fissato x , i morfismi (surgettivi) di valutazione in x :

$$G_X(U) \rightarrow G, \quad f \mapsto f(x), \quad x \in U,$$

inducono un omomorfismo surgettivo di gruppi abeliani tra la spiga in x ed il gruppo G . Viceversa, date due sezioni (U, f) e (V, g) con $x \in U \cap V$, se $f(x) = g(x)$ allora $\exists U' \ni x$ tale che $f|_{U'}$ è costante. Allo stesso modo, $\exists V' \ni x$ tale che $g|_{V'}$ è costante. Segue che $f|_{U' \cap V'} = g|_{U' \cap V'}$, ossia $(U, f) \sim (V, g)$.

DEFINIZIONE 3.2.8. Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due prefasci sullo stesso spazio topologico X . Un **morfismo** $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è il dato, per ogni aperto non vuoto U , di un omomorfismo di gruppi abeliani $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$. Gli omomorfismo f_U devono commutare con i morfismi di restrizione, ossia per ogni coppia di aperti $V \subset U$ si deve avere un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

La composizione di morfismi è definita in maniera prevedibile: $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$. Similmente l'insieme dei morfismi tra due prefasci è un gruppo abeliano, con la somma definita in maniera altrettanto prevedibile

$$f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}, \quad (f + g)_U = f_U + g_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U).$$

ESEMPIO 3.2.9. Ogni omomorfismo di gruppi abeliani $A \rightarrow B$ induce in maniera naturale un morfismo tra i rispettivi prefasci di sezioni localmente costanti $A_X \rightarrow B_X$.

ESEMPIO 3.2.10. Dato che ogni funzione localmente costante è anche continua, si ha un ovvio morfismo di prefasci $\mathbb{R}_X \rightarrow \mathcal{C}_X$, che per ogni aperto non vuoto U corrisponde all'inclusione

$$\{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ localmente costante}\} \subset \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}.$$

Ogni morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce canonicamente dei morfismi tra le rispettive spighe: per ogni punto $x \in X$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ che, per ogni intorno aperto $x \in U$, rende il diagramma

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

commutativo.

OSSERVAZIONE 3.2.11. Un prefascio \mathcal{F} su X può essere pensato come un funtore dalla categoria $\mathbf{Open}(X)^o$ alla categoria dei gruppi abeliani tale che $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Con tale interpretazione i morfismi di prefasci corrispondono alle trasformazioni naturali.

Dato un prefascio \mathcal{F} su X ha senso definire l'insieme

$$\mathbf{et}(\mathcal{F}) = \{(x, s) \in x \in X, s \in \mathcal{F}_x\} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Ogni sezione (U, h) di \mathcal{F} definisce un sottoinsieme di $\mathbf{et}(\mathcal{F})$

$$U_h = \{(x, h_x) \mid x \in U\} \subset \mathbf{et}(\mathcal{F})$$

dove $h_x \in \mathcal{F}_x$ denota il germe della sezione h nel punto x .

LEMMA 3.2.12. I sottoinsiemi U_h sono una base di una topologia su $\mathbf{et}(\mathcal{F})$ che rende la proiezione

$$p: \mathbf{et}(\mathcal{F}) \rightarrow X, \quad p(x, s) = x,$$

un omeomorfismo locale.

DIMOSTRAZIONE. Dato che l'unione degli U_h è tutto $\mathbf{et}(\mathcal{F})$, per dimostrare che sono base di una topologia basta provare che se $(x, s) \in U_h \cap V_k$ allora esiste una sezione (W, l) tale che $(x, s) \in W_l \subset U_h \cap V_k$. Siccome $(x, s) \in U_h \cap V_k$ vuol dire che $x \in V \cap U$ e $h_x = k_x = s$, per definizione di germe esiste un aperto $x \in W \subset V \cap U$ tale che $h|_W = k|_W$ e quindi $(x, s) \in W_h = W_k \subset U_h \cap V_k$.

Per ogni $(x, s) \in \mathbf{et}(\mathcal{F})$ ed ogni aperto $x \in U$, esiste un aperto $x \in V \subset U$ ed una sezione $h \in \mathcal{F}(V)$ tale che $h_x = s$; dunque $(x, s) \in V_h$ e $p(V_h) \subset U$ e questo prova che p è continua. Chiaramente $p(U_h) = U$ per ogni sezione (U, h) e questo prova che p è aperta. Per concludere basta osservare che $p: U_h \rightarrow U$ è iniettiva. \square

DEFINIZIONE 3.2.13. Con la topologia appena definita, lo spazio topologico $\mathbf{et}(\mathcal{F})$ viene detto **spazio étale**.⁴

3.3. Fasci, successioni esatte e nucleo

Il concetto di prefascio è molto semplice, troppo per essere di grande utilità senza richiedere ulteriori specifiche. Introduciamo quindi la nozione di **fascio**⁵ come un prefascio che soddisfa alcune condizioni aggiuntive, e che si rivelerà di grande uso in matematica.

DEFINIZIONE 3.3.1. Un prefascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su X si dice un **fascio** se per ogni unione di aperti $U = \cup_i U_i$, $i \in I$, nello spazio topologico X , valgono le seguenti condizioni:

(F3) Sia $s \in \mathcal{F}(U)$. Allora $s = 0$ se e solo se $s|_{U_i} = \rho_{UU_i}(s) = 0$ per ogni i .

(F4) Data, per ogni $i \in I$, una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ in modo tale che per ogni $i, j \in I$ si abbia

$$s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}, \quad U_{ij} = U_i \cap U_j,$$

(ossia le due restrizioni di s_i ed s_j all'aperto $U_i \cap U_j$ coincidono), allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i .

È immediato osservare che se vale la condizione (F3) allora la sezione s in (F4) è unica: infatti se per $s, t \in \mathcal{F}(U)$ fosse $s|_{U_i} = t|_{U_i} = s_i$ per ogni i , allora $(s - t)|_{U_i} = 0$ per ogni i e quindi $s - t = 0$.

Ribadiamo che ogni fascio è, per definizione, anche un prefascio. Esistono prefasci che non sono fasci, come negli esempi seguenti.

ESEMPIO 3.3.2. Siano X una varietà differenziabile e n un intero positivo. Definiamo il prefascio

$$\mathcal{F}(U) = H_{dR}^n(U) = n\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham di } U.$$

Siccome ogni aperto di X è unione di aperti contraibili, ne consegue che il prefascio \mathcal{F} soddisfa (F3) se e solo se è il prefascio nullo, ed è ben noto che ciò è generalmente falso, e.g. $X = S^n$.

ESEMPIO 3.3.3. Consideriamo uno spazio topologico sconnesso X , unione di due aperti disgiunti e non vuoti A, B . Allora il prefascio \mathcal{F} delle funzioni costanti $U \rightarrow \mathbb{Z}$, $U \neq \emptyset$, non è un fascio. Presi due elementi $s \in \mathcal{F}(A) = \mathbb{Z}$ e $p \in \mathcal{F}(B) = \mathbb{Z}$ diversi tra loro, le loro restrizioni coincidono sull'intersezione che è l'insieme vuoto, ma non esiste alcun elemento di $\mathbb{Z} = \mathcal{F}(X)$ la cui restrizione su A valga s e su V valga p .

OSSERVAZIONE 3.3.4. In teoria dei fasci esistono alcune variazioni sulle notazioni usate che devono essere conosciute per poter comprendere i testi scritti. In particolare, per il gruppo delle sezioni di un fascio \mathcal{F} su di un aperto U vengono usate indistintamente le due notazioni:

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

(Per i prefasci che non sono fasci si usa solo la notazione $\mathcal{F}(U)$).

⁴Ha oramai preso piede a livello internazionale il termine francese étale, sebbene esista una meravigliosa traduzione italiana in *spazio lasagnato*.

⁵Il concetto di fascio è stato introdotto da Leray nel 1946 come strumento per dimostrare, in ambito topologico, quella che oggi viene comunemente detta "successione spettrale di Leray". Successivamente la definizione di fascio è stata modificata nella sua forma attuale da Henri Cartan nel 1950; per la precisione, Cartan chiama fascio quello che noi abbiamo chiamato spazio étale (la stessa terminologia viene ripresa in [7, 15, 20]) mentre in tempi più recenti si preferisce dare una una formulazione di fascio di sapore più categoriale (per mezzo dei prefasci [4, 9, 21, 22]), seppur completamente equivalente.

ESEMPIO 3.3.5. Il prefascio \mathcal{C}_X delle funzioni continue in uno spazio topologico X è un fascio.

Per ogni gruppo abeliano G , il prefascio G_X delle funzioni localmente costanti in uno spazio topologico X a valori in G è un fascio, detto **fascio costante**. L'Esempio 3.3.3 mostra che in generale il prefascio delle funzioni costanti \underline{G}_X non è un fascio.

ESEMPIO 3.3.6 (Fasce discreti). Sia X uno spazio topologico e sia dato, per ogni punto $x \in X$, un gruppo abeliano A_x ; molto informalmente⁶ abbiamo a che fare con un'applicazione $A: X \rightarrow \{\text{gruppi abeliani}\}$. Denotiamo con

$$A[X] = \{(x, a) \mid x \in X, a \in A_x\}$$

e con $p: A[X] \rightarrow X$, $p(x, a) = x$, la proiezione sul primo fattore. Per ogni aperto $U \subset X$ definiamo

$$\mathcal{C}^0 A(U) = \{s: U \rightarrow A[X] \mid ps = \text{Id}_U\} = \{\text{sezioni di } p \text{ su } U\}$$

e i morfismi ρ sono quelli di restrizione usuale; la struttura di gruppo su $\mathcal{C}^0 A(U)$ è indotta dalle strutture di gruppo sulle fibre di p .

Ricordando la definizione di prodotto diretto possiamo dare una definizione equivalente di $\mathcal{C}^0 A$: per ogni aperto U definiamo

$$\mathcal{C}^0 A(U) = \prod_{x \in U} A_x = \{a: U \rightarrow \prod_{x \in U} A_x \mid a(x) \in A_x \forall x \in U\},$$

mentre se $V \subset U$ definiamo ρ_{UV} come l'ovvio morfismo di proiezione su un sottoinsieme di fattori

$$\rho_{UV}: \prod_{x \in U} A_x \rightarrow \prod_{x \in V} A_x.$$

Si verifica immediatamente che $\mathcal{C}^0 A$ è un fascio che chiameremo **discreto**. Quando A è costante, ossia $A_x = G$ per ogni $x \in X$, ritroviamo il fascio $\mathcal{C}^0 G$ definito nell'Esempio 3.2.4.

È altrettanto immediato osservare che in uno spazio topologico discreto X ogni fascio è discreto: infatti ogni punto è aperto e gli assiomi F3, F4 implicano che per ogni sottoinsieme U di X l'applicazione

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}(\{x\}), \quad s \mapsto \{s|_{\{x\}} \mid x \in U\}$$

è un isomorfismo di gruppi.

ESEMPIO 3.3.7 (Fasce grattacielo). Siano $x \in X$ e G un gruppo abeliano. Per ogni aperto $U \subset X$ possiamo definire un fascio \mathcal{F} ponendo

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \rho_{UV} = \begin{cases} \text{Id}_G & \text{se } x \in V \subset U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Equivalentemente $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0 A$, dove $A_x = G$ e $A_y = 0$ per ogni $y \neq x$. Si verifica facilmente che

$$\mathcal{F}_y = \begin{cases} G & \text{se } y \in \overline{\{x\}} \\ 0 & \text{se } y \notin \overline{\{x\}} \end{cases}.$$

Un **morfismo di fasci** è per definizione un morfismo di prefasce (ogni fascio è anche un prefascio).

I morfismi tra fasci sono univocamente determinati dai morfismi tra le rispettive spighe, nel senso descritto dal seguente lemma:

LEMMA 3.3.8. *Siano $f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ due morfismi di fasci. Allora $f = g$ se e solo se $f_x = g_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ per ogni x . In particolare un morfismo di fasci è nullo se e solo se è nullo sulle spighe.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è chiara. Viceversa, supponiamo $f_x = g_x$ per ogni $x \in X$ e siano $U \subset X$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$ una sezione. Per ipotesi si ha

$$f(s)_x = f_x(s_x) = g_x(s_x) = g(s)_x \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Per definizione di germe, per ogni $x \in U$ esiste un aperto $x \in V_x \subset U$ tale che $f(s)|_{V_x} = g(s)|_{V_x}$, ossia $(f(s) - g(s))|_{V_x} = 0$. Siccome gli aperti V_x ricoprono U , per F3 si ha $f(s) - g(s) = 0$. \square

⁶Stiamo volutamente ignorando che non esiste l'insieme dei gruppi abeliani.

ESEMPIO 3.3.9 (Somma diretta). Dati due fasci \mathcal{F} e \mathcal{G} , la loro somma diretta è definita come

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto U . Esistono due ovvi morfismi di inclusione $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ e per ogni punto x vale

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x.$$

Abbiamo visto che non ogni prefascio è un fascio: il seguente criterio si applica a prefasci contenuti in un fascio ed è molto utile.

LEMMA 3.3.10. *Siano \mathcal{F} un fascio su X e \mathcal{G} un sottoprefascio di \mathcal{F} . Allora \mathcal{G} soddisfa (F3).*

Inoltre, \mathcal{G} soddisfa (F4), ossia \mathcal{G} è un sottofascio di \mathcal{F} , se e solo se per ogni unione di aperti $U = \cup_i U_i$, e per ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ vale:

$$(3.3) \quad s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \text{ per ogni } i \iff s \in \mathcal{G}(U).$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la proprietà (F3) per \mathcal{G} : si abbia $U = \cup_i U_i$ ed $s \in \mathcal{G}(U)$ tale che $s|_{U_i} = 0$ per ogni i . Dato che $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ e che \mathcal{F} è un fascio si ha $s = 0$.

Per dimostrare che (3.3) implica (F4) consideriamo degli elementi $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ in modo che coincidano sull'intersezioni $U_i \cap U_j$ per ogni i, j . Di nuovo, vediamo ogni (U_i, s_i) come sezioni di \mathcal{F} ; allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i . Ma dalla condizione (3.3) si ricava che $s \in \mathcal{G}(U)$ e quindi la tesi.

Viceversa se \mathcal{G} è un fascio, sia $U = \cup_i U_i$ una unione di aperti e sia $s \in \mathcal{F}(U)$. Dobbiamo mostrare che $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \iff s \in \mathcal{G}(U)$. Se $s \in \mathcal{G}(U)$ allora applicando il morfismo di restrizione si ottiene $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$. Viceversa se $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i , siccome $(s|_{U_i})|_{U_j} = s|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_j \cap U_i} = (s|_{U_j})|_{U_i}$ per ogni i, j , esiste $s' \in \mathcal{G}(U)$ tale che $s'|_{U_i} = s_i$. Si conclude applicando la proprietà (F3) a $s - s'$. \square

Ricordiamo che una successione di morfismi di gruppi abeliani

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots,$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n , o equivalentemente se $d_n(G_n) \subset \text{Ker } d_{n+1}$ per ogni n . Si dice invece una **successione esatta** se $d_n(G_n) = \text{Ker } d_{n+1}$ per ogni n . In particolare ogni successione esatta è anche un complesso.

Una **successione esatta corta** è una successione esatta del tipo $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, ossia formata da 5 gruppi con gli estremi nulli. Equivalentemente, il diagramma $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ è una successione esatta corta se e solo se f è iniettiva, g è surgettiva e $f(A) = \text{Ker } g$.

ESEMPIO 3.3.11. Delle seguenti successioni di morfismi di gruppi:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad f(n) = (n, n), \quad g(n, m) = n,$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad f(n) = (2n, 4n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad f(n) = (n, 2n), \quad g(n, m) = 2n - m,$$

la seconda e la terza sono complessi, la terza è esatta (corta).

OSSERVAZIONE 3.3.12. Ogni successione esatta (lunga) di gruppi abeliani

$$\cdots G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

possiede uno spezzamento canonico in una sequenza di successioni esatte corte:

$$0 \rightarrow \text{Ker } d_n \rightarrow G_n \xrightarrow{d_n} \text{Ker } d_{n+1} \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Viceversa, una sequenza di successioni esatte corte

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{g_n} A_{n+1} \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

in cui il terzo elemento della successione esatta n -esima coincide con il primo elemento della successione $(n+1)$ -esima (che abbiamo denotato A_{n+1}), può essere ricomposta in una successione esatta lunga

$$\cdots G_{n-1} \xrightarrow{f_n g_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_{n+1} g_n} G_{n+1} \cdots$$

LEMMA 3.3.13 (detto “Lemma dei 5” o “five-lemma”). *Sia dato il seguente diagramma commutativo di gruppi abeliani:*

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{d_1} & E_2 & \xrightarrow{d_2} & E_3 & \xrightarrow{d_3} & E_4 & \xrightarrow{d_4} & E_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & H_2 & \xrightarrow{h_2} & H_3 & \xrightarrow{h_3} & H_4 & \xrightarrow{h_4} & H_5 \end{array}$$

con entrambe le righe successioni esatte.

- (1) se α_1 è surgettiva e α_2, α_4 sono iniettive, allora β è iniettiva;
- (2) se α_5 è iniettiva e α_2, α_4 sono surgettive, allora β è surgettiva;
- (3) se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono bigettive, allora β è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo il primo punto; la dimostrazione del secondo è del tutto simile ed è lasciata per esercizio. Il terzo punto segue banalmente dai primi due.

Sia $x \in E_3$ tale che $\beta(x) = 0$, allora $\alpha_4 d_3(x) = h_3 \beta(x) = 0$ ed essendo per ipotesi α_4 iniettiva si ha $d_3(x) = 0$. La prima riga è esatta e quindi esiste $y \in E_2$ tale che $x = d_2(y)$; siccome $h_2 \alpha_2(y) = \beta d_2(y) = \beta(x) = 0$ e la riga inferiore è esatta, esiste $z \in H_1$ tale che $h_1(z) = \alpha_2(y)$. Adesso usiamo la surgettività di α_1 per trovare $w \in E_1$ tale che $\alpha_1(w) = z$, quindi $\alpha_2 d_1(w) = h_1 \alpha_1(w) = h_1(z) = \alpha_2(y)$. Per l’iniettività di α_2 si ha $y = d_1(w)$ e quindi $x = d_2(y) = d_2 d_1(w) = 0$. \square

Le nozioni di complesso e di successione esatta si estendono immediatamente ai fasci. Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n . Per il Lemma 3.3.8 una successione di morfismi di fasci è un complesso se e solo se per ogni punto x la successione delle spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots,$$

è un complesso. Una successione di morfismi di fasci (di gruppi abeliani)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

si dice una **successione esatta** se per ogni punto x la successione di spighe

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} (\mathcal{G}_n)_x \xrightarrow{d_n} (\mathcal{G}_{n+1})_x \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots,$$

è una successione esatta.

In particolare, l’esattezza o meno di una successione di fasci **dipende solo dal comportamento dei morfismi sulle spighe**.

LEMMA 3.3.14 (Esattezza sulle sezioni implica esattezza sulle spighe). *Siano \mathcal{B} una base della topologia su X e $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ due morfismi di prefasci su X tali che per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ la successione*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta. Allora per ogni $x \in X$ la successione di spighe

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. La verifica che $\text{Im } f_x \subseteq \text{Ker } g_x$ è immediata. Per l’inclusione opposta notiamo che il seguente diagramma di gruppi è commutativo per ogni scelta dell’aperto U che contenga il punto x .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{g_U} & \mathcal{H}(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x & \xrightarrow{g_x} & \mathcal{H}_x \end{array}.$$

Dobbiamo dimostrare che se $s_x \in \text{Ker } g_x$ allora esiste $r_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(r_x) = s_x$. Consideriamo un rappresentante di s_x , indichiamolo con $s_V \in \mathcal{G}(V)$, $x \in V$, ed il fatto che $g_x(s_x) = 0$

ci assicura che esiste un aperto della base $W \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W$ e $g_V(s_V)|_W = 0$. A questo punto consideriamo la successione esatta

$$\mathcal{F}(W) \xrightarrow{f_W} \mathcal{G}(W) \xrightarrow{g_W} \mathcal{H}(W)$$

per l'esattezza sappiamo che esiste r_W tale che $f_W(r_W) = s_W$. La tesi segue scegliendo come r_x la classe di r_W . □

DEFINIZIONE 3.3.15. Il nucleo di un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è definito come

$$\text{Ker } f(U) = \text{Ker}(f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$$

per ogni aperto U .

È facile vedere che $\text{Ker } f$ è un fascio: basta notare che $\text{Ker}(f)$ è un sottoprefascio di \mathcal{F} e vale la proprietà richiesta dal Lemma 3.3.10. Per definizione, la successione

$$0 \rightarrow \text{Ker } f(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

è esatta per ogni aperto U . Per il Lemma 3.3.14 si ha quindi una successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}.$$

L'esistenza del nucleo ci permette di ripetere per i fasci la procedura dell'Osservazione 3.3.12; possiamo quindi spezzare una qualunque successione esatta di fasci in una serie di successioni esatte corte.

TEOREMA 3.3.16 (Esattezza a sinistra delle sezioni globali). *Per ogni successione esatta di fasci su X del tipo*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H},$$

e per ogni aperto $U \subset X$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Lemma 3.3.8 che $g_U f_U = (gf)_U = 0$. Data una sezione $s \in \text{Ker } f_U$ abbiamo che questa va a zero in ognuna delle spighe di \mathcal{G} , e dunque per ogni punto x vale $s_x \in \text{Ker } f_x = 0$. Segue dalle proprietà di fascio di \mathcal{F} che s è 0 e dunque f_U è iniettiva.

Dato un elemento $s \in \text{Ker } g_U$ lo stesso ragionamento usato sopra mostra che per ogni $x \in X$ esiste $r_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(r_x) = s_x$. Dunque per ogni x esiste un aperto $x \in V_x$ e sezioni $r_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$ tali che $f(r_{V_x}) = s|_{V_x}$. Per concludere resta da verificare che, dati due punti x, y si abbia che $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} = r_{V_y}|_{V_x \cap V_y}$, ma chiaramente $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}|_{V_x \cap V_y}$ ha come immagine 0 e dunque per l'iniettività mostrata al punto precedente si ha $r_{V_x}|_{V_x \cap V_y} - r_{V_y}|_{V_x \cap V_y} = 0$. Quindi per le proprietà di fascio di \mathcal{F} segue la tesi. □

In particolare, se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni x , allora $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni aperto U . Basta infatti applicare il Teorema 3.3.16 alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}.$$

Similmente, se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e se $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è bigettivo per ogni x , allora $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è bigettivo per ogni aperto U . Basta infatti applicare il Teorema 3.3.16 alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

ESEMPIO 3.3.17. Se

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

e una successione esatta di fasci, non è detto che per ogni aperto U la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

sia esatta.

Consideriamo ad esempio $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ come gruppo abeliano, dotato del prodotto e di 1 come elemento neutro: dato uno spazio topologico X si consideri il fascio

$$\mathcal{F}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ continua}\}, \quad U \subset X.$$

Si ha allora una successione esatta

$$0 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\cdot^2} \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

dove \cdot^2 è l'elevazione al quadrato e $\{\pm 1\}$ denota il fascio delle funzioni localmente costanti a valori ± 1 .

Basta adesso considerare $X = \mathbb{C} - \{0\}$ e verificare che l'identità appartiene a $\mathcal{F}(X)$ e non è il quadrato di alcuna funzione continua su X .

In analogia con la definizione di successione esatta, diremo che un morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è iniettivo (resp.: surgettivo, bigettivo) se per ogni x il morfismo tra le spighe $f: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ è iniettivo (resp.: surgettivo, bigettivo). Abbiamo visto un tale f è iniettivo (resp.: bigettivo) se e solo se per ogni aperto U il morfismo $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è iniettivo (resp.: bigettivo). Abbiamo anche visto che un morfismo surgettivo di fasci non è necessariamente surgettivo a livello di sezioni.

In particolare il lemma dei 5 continua a valere se i gruppi abeliani vengono sostituiti con dei fasci di gruppi abeliani: basta applicare il Lemma 3.3.13 alle spighe.

Note. Il materiale di questa sezione è standard. Ottimi riferimenti sono: la Sezione II.1 di [9] e l'Appendice B di [10].

3.4. Incollamenti e discesa

Dati due gruppi abeliani A, B , l'insieme di tutti gli omomorfismi $\alpha: A \rightarrow B$ è ancora un gruppo abeliano, con elemento neutro l'omomorfismo nullo e con somma

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a), \quad a \in A.$$

Le stesse considerazioni valgono per i morfismi di fasci, il che rende sensata la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3.4.1. Dati due fasci \mathcal{F}, \mathcal{G} su uno spazio topologico X , si denota con $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ il gruppo abeliano dei morfismi di fasci $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

Dato un fascio \mathcal{F} in uno spazio topologico X ed un aperto $U \subset X$ possiamo restringere \mathcal{F} ad U in maniera ovvia: per ogni aperto $V \subseteq U$ si pone

$$\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V).$$

Si verifica immediatamente che $\mathcal{F}|_U$ è un fascio su U e che se $V \subset U \subset X$ sono aperti, allora $\mathcal{F}|_V = (\mathcal{F}|_U)|_V$.

Se $U \subset X$ è un aperto, segue immediatamente dalle definizioni che ogni morfismo $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ di fasci su X induce un morfismo di fasci su U :

$$f|_U: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U.$$

In altri termini abbiamo definito un prefascio $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$:

$$U \mapsto \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}_U(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

TEOREMA 3.4.2. Il prefascio $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un fascio.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U = \cup_i U_i$ una unione di aperti e verifichiamo F3. Sia $f: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ un morfismo di fasci tale che $f|_{U_i} = 0$ per ogni i . Dobbiamo dimostrare che per ogni aperto $V \subset U$ ed ogni sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ si ha $f(s) = 0$. Denotiamo $V_i = V \cap U_i$, allora

$$f(s)|_{V_i} = f(s|_{V_i}) = f|_{U_i}(s|_{V_i}) = 0$$

per ogni i e quindi $f(s) = 0$.

Per quanto riguarda F4, siano dato dei morfismi di fasci $f_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ tali che $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$ per ogni i, j . Data una sezione (V, s) di $\mathcal{F}|_U$, e ponendo $V_i = V \cap U_i$, $V_{ij} = V_i \cap V_j = V \cap U_{ij}$, siccome $V \subset U$ si ha $V = \cup_i V_i$ e

$$f_i(s|_{V_i})|_{V_{ij}} = f_i(s|_{V_{ij}}) = f_j(s|_{V_{ij}}) = f_j(s|_{V_i})|_{V_{ij}}$$

per ogni i, j e quindi esiste un'unica sezione $f(s) \in \mathcal{G}(V)$ tale che $f(s)|_{V_i} = f_i(s|_{V_i})$ per ogni i . Questo definisce un omomorfismo di gruppi $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ e, al variare di V tra i sottoinsiemi aperti di U , un morfismo di fasci $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$. \square

Da questo momento fino alla fine della sezione, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di uno spazio topologico fissato X . Per ogni sottoinsieme finito e non vuoto $\emptyset \neq \alpha \subset I$ denotiamo con $U_\alpha = \bigcap_{i \in \alpha} U_i$; si noti che se $\alpha \subset \beta$ allora $U_\beta \subseteq U_\alpha$. Convieni introdurre un ordinamento totale \leq su I in modo tale che vi sia una bigezione naturale tra i sottoinsiemi $\alpha \subset I$ di cardinalità $k+1$ e le successioni strettamente monotone $i_0 < i_1 \cdots < i_k$ in I .

Supponiamo di avere, per ogni $i \in I$ un fascio \mathcal{F}_i su U_i e cerchiamo condizioni necessarie e sufficienti affinché esista un fascio \mathcal{F} su X tale che $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}_i$ per ogni i . Se un tale \mathcal{F} esiste, si hanno degli isomorfismi di fasci $\phi_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$, che si restringono ad isomorfismi

$$(\phi_i)|_{U_{ij}}: \mathcal{F}|_{U_{ij}} \rightarrow (\mathcal{F}_i)|_{U_{ij}}.$$

Per ogni $i < j$ abbiamo un isomorfismo di fasci su U_{ij} :

$$\varphi_{ij} = (\phi_i)|_{U_{ij}} \circ (\phi_j)|_{U_{ij}}^{-1}: (\mathcal{F}_j)|_{U_{ij}} \rightarrow (\mathcal{F}_i)|_{U_{ij}}$$

ed è evidente per costruzione che, per ogni $i < j < k$ vale la cosiddetta "condizione di cociclo":

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{ij} = \text{Id}: (\mathcal{F}_j)|_{U_{ijk}} \rightarrow (\mathcal{F}_j)|_{U_{ijk}}.$$

Per una diversa scelta di isomorfismi $\psi_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$, si ha $\psi_i = \theta_i \phi_i$ per opportuni isomorfismi $\theta_i: \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$, e quindi per ogni $i < j$ si ha.

$$\psi_{ij} = \psi_i \psi_j^{-1} = \theta_i \phi_i \phi_j^{-1} \theta_j^{-1} = \theta_i \varphi_{ij} \theta_j^{-1}.$$

DEFINIZIONE 3.4.3. Chiameremo **dato di incollamento** (glueing data) il combinato per ogni i di un fascio \mathcal{F}_i su U_i e, per ogni $i < j$ di isomorfismi di fasci $\varphi_{ij}: (\mathcal{F}_j)|_{U_{ij}} \rightarrow (\mathcal{F}_i)|_{U_{ij}}$ che soddisfano la condizione di cociclo $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{ij} = \text{Id}_{(\mathcal{F}_j)|_{U_{ijk}}}$ per ogni $i < j < k$.

PROPOSIZIONE 3.4.4. Sia $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$ un dato di incollamento, allora esiste un fascio \mathcal{F} su X ed isomorfismi $\phi_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tali che $\varphi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Si considerino i due fasci \mathcal{E}, \mathcal{G} su X ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(V) &= \prod_i \mathcal{F}_i(V \cap U_i) = \{\{s_i\} \mid s_i \in \mathcal{F}_i(V \cap U_i), i \in I\} \\ \mathcal{G}(V) &= \prod_{i < j} \mathcal{F}_i(V \cap U_{ij}) = \{\{s_{ij}\} \mid s_{ij} \in \mathcal{F}_i(V \cap U_{ij}), i < j \in I\}, \end{aligned}$$

assieme al morfismo $\delta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$:

$$(\delta s)_{ij} = s_i|_{U_{ij}} - \varphi_{ij}(s_j|_{U_{ij}}).$$

Dimostriamo che $\mathcal{F} = \text{Ker } \delta$ ha le proprietà richieste. Osserviamo che $\mathcal{F}|_{U_i}$ è il nucleo di $\delta: \mathcal{E}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$: definiamo $\phi_i: \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ come la restrizione $\mathcal{F}|_{U_i}$ della proiezione $\mathcal{E}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ sul fattore i .

Claim: Se $V \subset U_i$, allora $V \cap U_j = V \cap U_{ij}$ per ogni j e per una sezione $\{s_j\} \in \mathcal{E}(V)$ vale $\{s_j\} \in \mathcal{F}(V)$ se e solo se

$$(3.4) \quad s_i = \varphi_{ij}(s_j) \text{ se } i < j; \quad \varphi_{ji}(s_i) = s_j \text{ se } i > j.$$

Infatti (3.4) assieme alla condizione di cociclo implicano che per ogni $j < h$ sull'aperto $V \cap U_{jh}$ si ha $s_j = \varphi_{jh}(s_h)$: ci sono 5 casi da trattare a seconda di come si posiziona i rispetto a j ed h ; ad esempio se $i < j < h$ si ha $s_i = \varphi_{ij}(s_j) = \varphi_{ih}(s_h)$ da cui $s_j = \varphi_{ij}^{-1} \varphi_{ih}(s_h)$, mentre per la condizione di cociclo $\varphi_{jh} \varphi_{ih}^{-1} \varphi_{ij}$.

Il morfismo ϕ_i è iniettivo. Dati $V \subset U_i$ e $s = \{s_j\} \in \mathcal{F}(V)$ per il claim vale $s = 0$ se e solo se $s_i = 0$.

Il morfismo ϕ_i è surgettivo. Dati $V \subset U_i$ e $s_i \in \mathcal{F}_i(V)$, possiamo usare la claim per sollevare s_i ad una $s = \{s_j\} \in \mathcal{F}(V)$.

Se invece $V \subset U_{ij}$ con $i < j$, e $\{s_j\} \in \mathcal{F}(V)$, allora $\phi_i \phi_j^{-1}(s_j) = s_i$ e questo implica $\phi_i \phi_j^{-1} = \varphi_{ij}$. \square

ESERCIZIO 3.4.5. Per un ricoprimento aperto fissato definire la categoria dei dati di incollamento in modo tale che la proposizione precedente possa essere interpretata come un'equivalenza di categorie.

Talvolta i pezzetti di fascio da incollare non sono presentati sotto forma di dati di incollamento ma come dati di discesa. Con il termine **dato di discesa** (descent data) si intende l'accozzaglia di:

- (1) un fascio \mathcal{F}_α su U_α per ogni $\alpha \in I$ finito e nonvuoto;
- (2) un isomorfismo di fasci $r_\beta^\alpha: (\mathcal{F}_\alpha)|_{U_\beta} \rightarrow \mathcal{F}_\beta$ su U_β per ogni $\alpha \subset \beta$.
- (3) le relazioni funtoriali $r_\gamma^\beta r_\beta^\alpha = r_\gamma^\alpha$ per ogni $\alpha \subset \beta \subset \gamma$.

Ogni fascio \mathcal{F} su X determina in maniera naturale un dato di discesa: basta definire $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}|_{U_\alpha}$ e r_β^α gli isomorfismi tautologici

$$(\mathcal{F}|_{U_\alpha})|_{U_\beta} = \mathcal{F}|_{U_\beta}, \quad U_\beta \subset U_\alpha.$$

Anche in questo caso da un dato di discesa si può ricostruire il fascio. Ciò può essere fatto direttamente ma è più rapido passare in maniera naturale dai dati di discesa ai dati di incollamento. Per ogni $i < j$ definiamo l'isomorfismo

$$\varphi_{ij}: \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \xrightarrow{r_{ij}^j} \mathcal{F}_{ij} \xrightarrow{(r_{ij}^i)^{-1}} \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \iff r_{ij}^i \circ \varphi_{ij} = r_{ij}^j.$$

Possiamo scrivere la condizione di cociclo

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{ij} = \text{Id} \iff \varphi_{ij}^{-1} \circ \varphi_{ik} \circ \varphi_{jk}^{-1} = \text{Id}, \quad i < j < k,$$

come

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \varphi_{jk} \iff r_{ijk}^i \varphi_{ik} = r_{ijk}^i \varphi_{ij} \varphi_{jk}.$$

Basta adesso osservare che:

$$\begin{aligned} r_{ijk}^i \varphi_{ij} \varphi_{jk} &= r_{ijk}^{ij} r_{ij}^i \varphi_{ij} \varphi_{jk} = r_{ijk}^{ij} r_{ij}^j \varphi_{jk} = r_{ijk}^j \varphi_{jk} = r_{ijk}^{jk} r_{jk}^j \varphi_{jk} = r_{ijk}^{jk} r_{jk}^k = r_{ijk}^k, \\ r_{ijk}^i \varphi_{ik} &= r_{ijk}^{ik} r_{ik}^i \varphi_{ik} = r_{ijk}^{ik} r_{ik}^k = r_{ijk}^k. \end{aligned}$$

3.5. I fasci delle sezioni continue e discontinue

Scopo di questa sezione è quello di associare, in maniera canonica e funtoriale, ad ogni prefascio \mathcal{F} un fascio $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$, un suo sottofascio $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ ed un morfismo di prefasci $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, il tutto dotato di utili ed interessanti proprietà.

Un caso particolare di fascio discreto, vedi Esempio 3.3.6, è quando l'applicazione $X \ni x \mapsto A_x$ viene fornito dalle spighe di un qualunque prefascio \mathcal{F} , ossia $A_x = \mathcal{F}_x$ per ogni x . Il fascio corrispondente viene indicato $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ e detto **fascio delle sezioni discontinue di \mathcal{F}** :

$$\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x = \{(x, s) \mid x \in U, s \in \mathcal{F}_x\}.$$

Per ogni aperto U , gli omomorfismi di gruppi abeliani

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, \quad (x, s) \mapsto s,$$

inducono un omomorfismo di gruppi $\eta: \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ compatibile con le restrizioni ad aperti più piccoli e quindi anche un morfismo di prefasci $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

LEMMA 3.5.1. *Nelle notazioni precedenti, il prefascio \mathcal{F} soddisfa la condizione (F3) se e solo se per ogni aperto U il morfismo $\eta: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ è iniettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U = \cup U_j$ una unione di aperti di X e sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_j} = 0$ per ogni j . Allora per ogni $x \in U$ esiste j tale che $x \in U_j$ e quindi il germe di s in \mathcal{F}_x è uguale al germe di $s|_{U_j}$ che è nullo. In particolare s appartiene al nucleo di η . Abbiamo quindi provato che se i è iniettivo per ogni U , allora vale (F3). Viceversa se vale (F3) ed $\eta(s) = 0$ per qualche $s \in \mathcal{F}(U)$, allora per ogni $x \in U$ esiste un intorno aperto $x \in V_x$ tale che $(U, s) \sim (V_x, 0)$. Per definizione di \sim , a mano di restringere V_x non è restrittivo supporre $V_x \subset U$ e $s|_{V_x} = 0$. Siccome $\cup_{x \in U} V_x = U$, per (F3) si ha $s = 0$. \square

Osserviamo inoltre che, per (3.2), ogni morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, induce in maniera naturale un morfismo tra i rispettivi fasci di sezioni discontinue

$$f^0: \mathcal{C}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{G}, \quad f_U^0 = \prod_{x \in U} f_x: \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{G}(U),$$

che commuta con i morfismi i :

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \mathcal{C}^0\mathcal{F} & \xrightarrow{f^0} & \mathcal{C}^0\mathcal{G}_x \end{array} .$$

Dato un prefascio \mathcal{F} , con annesso morfismo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}$, che ad ogni sezione associa l'insieme di tutti i suoi germi, definiamo $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ come il sottofascio delle sezioni che sono localmente nell'immagine di η : piÙ precisamente, dato un aperto U ed una sezione $s \in \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$, si ha $s \in \mathcal{F}^+(U)$ se e solo se per ogni $x \in U$ esiste un aperto $x \in V \subset U$ ed una sezione $t \in \mathcal{F}(V)$ tale che $\eta(t) = s|_V$.

La verifica che \mathcal{F}^+ è un fascio è banale. Dal fatto che η è un morfismo di prefasci segue immediatamente che \mathcal{F}^+ è un prefascio e la verifica del criterio esposto nel Lemma 3.3.10 è immediata. È altresì ovvio che l'immagine di η è contenuta in \mathcal{F}^+ , ossia $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

DEFINIZIONE 3.5.2. Chiameremo \mathcal{F}^+ il **fascio delle sezioni continue** di \mathcal{F} .

Il motivo per cui i fasci \mathcal{F}^+ e $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ vengono chiamati rispettivamente fasci delle sezioni continue e discontinue risiede nel fatto che se consideriamo lo spazio étale $p: \mathbf{et}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ del prefascio \mathcal{F} , allora $\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \{s: U \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \mid ps = \text{Id}_U\}$, mentre per come è definita la topologia in $\mathbf{et}(\mathcal{F})$ si ha che

$$\mathcal{F}^+(U) = \{s: U \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \text{ continua} \mid ps = \text{Id}_U\}.$$

LEMMA 3.5.3. *Sia \mathcal{F} un prefascio su X , allora per ogni $x \in X$ il morfismo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ induce un isomorfismo di spighe $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}_x^+$. In particolare η è un isomorfismo se e solo se \mathcal{F} è un fascio.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione ogni sezione di \mathcal{F}^+ è localmente immagine di una sezione di \mathcal{F} e questo è del tutto equivalente a dire che η è surgettivo sulle spighe. Per mostrare l'iniettività basta osservare che per ogni $x \in X$ il morfismo $\eta: \mathcal{F}_x \rightarrow (\mathcal{C}^0\mathcal{F})_x$ ha un inverso a sinistra, dato dalla valutazione nel punto x dei germi di sezioni discontinue. \square

Anche il morfismo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ è canonico nel senso che per ogni morfismo di prefasci $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ vi è un unico morfismo di fasci $h^+: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ tale che $h^+\eta = \eta h$. Siccome η è un isomorfismo sulle spighe, il morfismo h^+ è unico sulle spighe, e dal Lemma 3.3.8 segue quindi l'unicità di h^+ . Per quanto riguarda l'esistenza, basta definire h^+ come la restrizione di $h^0: \mathcal{C}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{G}$ ai sottofasci delle sezioni continue.

COROLLARIO 3.5.4. *Per ogni prefascio \mathcal{F} , il morfismo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ possiede la seguente proprietà universale: per ogni fascio \mathcal{G} ed ogni morfismo di prefasci $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, esiste un unico morfismo di fasci $h^+: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ tale che $h = h^+i$.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome η è un isomorfismo sulle spighe, il morfismo h^+ è unico sulle spighe, e dal Lemma 3.3.8 segue quindi l'unicità di h^+ . Per quanto riguarda l'esistenza, basta osservare che h induce in maniera canonica un morfismo di fasci $h^+: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$, e che $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+$ in virtù del lemma precedente.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{F}^+ & \hookrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \\ \downarrow h & & \downarrow h^+ & & \downarrow h^0 \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{G}^+ & \hookrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \end{array} .$$

\square

con le seguenti proprietà:

- (1) $fi = \pi f = 0$;
- (2) $\forall g: K \rightarrow G$ tale che $fg = 0$, $\exists! k: K \rightarrow \text{Ker}(f)$ tale che $g = ik$;
- (3) $\forall g: G \rightarrow L$ tale che $gf = 0$, $\exists! l: \text{Coker}(f) \rightarrow L$ tale che $g = l\pi$.

Tali proprietà sono puramente categoriali e definiscono nucleo e conucleo a meno di isomorfismo; esse permettono di definire le nozioni di nucleo e conucleo di un qualunque morfismo in una qualunque categoria nella quale esistono i morfismi 0, dotati della proprietà che $0f = f0 = 0$ per ogni f . Naturalmente non in tutte le categorie esistono nuclei e conuclei.

Se però succede che in una data categoria ogni morfismo $f: G \rightarrow H$ possiede nucleo $\text{Ker}(f) \xrightarrow{i} G$ e conucleo $H \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(f)$, allora possiamo definire l'immagine come il nucleo di π e la coimmagine come il conucleo di i . Nella categoria dei gruppi abeliani immagine e coimmagine sono isomorfe, ma ciò è falso in categorie più generali.

ESERCIZIO 3.6.2. Si consideri la categoria in cui: gli oggetti sono le coppie (A, G) con G gruppo abeliano ed $A \subset G$ sottogruppo; i morfismi $f: (A, G) \rightarrow (B, H)$ sono gli omomorfismi di gruppi $f: G \rightarrow H$ tali che $f(A) \subset B$.

Descrivere in tale categoria nuclei, conuclei, immagini e coimmagini. Determinare inoltre quali morfismi inducono un isomorfismo tra coimmagine ed immagine.

Consideriamo adesso un *quadrato commutativo* di gruppi abeliani, ossia un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

Se $x \in \text{Ker } \alpha$, allora $\gamma\beta(x) = \delta\alpha(x) = 0$ e quindi $\beta(x) \in \text{Ker } \gamma$. Dunque il quadrato commutativo definisce per restrizione un omomorfismo $\beta: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Ker}(\gamma)$. Si noti che se $\beta: A \rightarrow B$ è iniettivo, allora anche $\beta: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Ker}(\gamma)$ è iniettivo.

Si consideri adesso la proiezione sul conucleo $\pi: D \rightarrow \text{Coker}(\gamma)$. Allora $\pi\delta\alpha = \pi\gamma\beta = 0$ poiché $\pi\gamma = 0$ e per la proprietà universale del conucleo, l'omomorfismo $\pi\delta$ si fattorizza ad un omomorfismo tra i conuclei $\bar{\delta}: \text{Coker}(\alpha) \rightarrow \text{Coker}(\gamma)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{\beta} & \text{Ker}(\gamma) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Ker}(\beta) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\beta} & B & \longrightarrow & \text{Coker}(\beta) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \bar{\gamma} \\ \text{Ker}(\delta) & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\delta} & D & \longrightarrow & \text{Coker}(\delta) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Coker}(\alpha) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \text{Coker}(\gamma) & & \end{array} .$$

LEMMA 3.6.3 (Lemma del serpente, prima versione). *Sia dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani*

$$\begin{array}{ccccccc} & & N_1 & \xrightarrow{f} & M_1 & \xrightarrow{g} & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N_2 & \xrightarrow{h} & M_2 & \xrightarrow{k} & P_2 & & , \end{array}$$

Si definisce allora il fascio conucleo come $\text{Coker } f = \underline{\text{Coker } f^+}$: equivalentemente, sia $\mathcal{C}^0\Phi$ il fascio discreto relativo a $\Phi_x = \text{Coker } f_x$:

$$\mathcal{C}^0\Phi(U) = \prod_{x \in U} \text{Coker } f_x = \prod_{x \in U} \frac{\mathcal{G}_x}{f_x \mathcal{F}_x}.$$

I quadrati commutativi

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

definiscono degli omomorfismi di gruppi $\underline{\text{Coker } f}(U) \rightarrow \text{Coker } f_x$, $x \in U$, e quindi un morfismo di prefasci $i: \underline{\text{Coker } f} \rightarrow \mathcal{C}^0\Phi$. Quindi per ogni aperto U si ha che $\underline{\text{Coker } f}(U) \subset \prod_{x \in U} \frac{\mathcal{G}_x}{f_x \mathcal{F}_x}$ è il sottogruppo delle sezioni localmente nell'immagine di i .

Siccome per ogni aperto U si ha per costruzione una successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f_U \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \rightarrow \underline{\text{Coker } f}(U) \rightarrow 0,$$

passando alle spighe si ha, per ogni $x \in X$ una successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f_x \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \rightarrow \underline{\text{Coker } f}_x \rightarrow 0,$$

e, siccome il morfismo naturale $\underline{\text{Coker } f} \rightarrow \text{Coker } f = \underline{\text{Coker } f^+}$ è un isomorfismo sulle spighe, ne consegue una successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0,$$

che, volendo, si può all'occorrenza spezzare in due successioni esatte corte:

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \text{Im } f \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0.$$

Le stesse considerazioni del conucleo valgono ovviamente per i quozienti: più precisamente se \mathcal{F} è un sottofascio del fascio \mathcal{G} , si definisce il **fascio quoziente** \mathcal{G}/\mathcal{F} come il conucleo del morfismo di inclusione $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$: in altri termini le sezioni di \mathcal{G}/\mathcal{F} su un aperto U sono gli elementi di $\prod_{x \in U} \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{F}_x}$ che sono localmente immagine di sezioni di \mathcal{G} . Si ha una successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

3.7. Immagini diretta ed inversa di fasci

Denotiamo con $\mathbf{Shv}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani sullo spazio topologico X : gli oggetti sono i fasci ed i morfismi sono i morfismi di fasci.

Data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ vogliamo definire due funtori

$$f_*: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(Y), \quad f^{-1}: \mathbf{Shv}(Y) \rightarrow \mathbf{Shv}(X)$$

che si comportano bene rispetto alla composizione di applicazioni continue, nel senso che se $g: Y \rightarrow Z$ è continua si ha $(gf)_* = g_* f_*$ e $(gf)^{-1} = f^{-1} g^{-1}$, oltre ad avere ulteriori proprietà di prossima verifica.

DEFINIZIONE 3.7.1. Data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ ed un fascio \mathcal{F} su X , la sua **immagine diretta** $f_* \mathcal{F}$, è il fascio su Y definito nel modo seguente: per ogni aperto $U \subset Y$ si ha

$$f_* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Se $V \subset U$, allora $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ ed è quindi definito in maniera naturale il morfismo di restrizione $f_* \mathcal{F}(U) \rightarrow f_* \mathcal{F}(V)$.

È un facile esercizio verificare che $f_*(\mathcal{F})$ è un fascio: la ragione essenziale è che f^{-1} commuta con le unioni di aperti e quindi non influisce negativamente sugli assiomi F3 e F4. Ogni morfismo $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ di fasci su X induce canonicamente un morfismo $f_*\alpha: f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ ponendo, per ogni aperto $U \subset Y$,

$$(f_*\alpha)_U = \alpha_{f^{-1}(U)}: f_*\mathcal{F}(U) \rightarrow f_*\mathcal{G}(U).$$

ESERCIZIO 3.7.2. Nelle notazioni precedenti, provare che per ogni $x \in X$ esiste un morfismo naturale di spighe $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$. (Attenzione: tale morfismo in generale non è né iniettivo né surgettivo.)

In generale calcolare le spighe di $f_*\mathcal{F}$ è molto complicato; un'eccezione è data dal seguente caso particolare.

LEMMA 3.7.3. Siano $D \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $i: D \hookrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Per ogni fascio \mathcal{F} su D ed ogni $x \in X$ si ha:

$$(i_*\mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $x \notin D$, allora x possiede un sistema fondamentale di intorni che non intersecano D e quindi $(i_*\mathcal{F})_x = 0$. Se $x \in D$, gli aperti di D che contengono x sono tutti e soli le intersezioni di D con gli aperti di X che contengono x . Segue dalla definizione di spiga che il morfismo naturale $(i_*\mathcal{F})_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ è bigettivo. \square

Per una generica applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ il funtore $f_*: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(Y)$ non è esatto, ossia non preserva le successioni esatte: ad esempio, se $Y = *$ è formato da un solo punto, allora l'unica spiga di $f_*\mathcal{F}$ è uguale a $\mathcal{F}(X)$ ed abbiamo già osservato che il funtore sezioni globali è esatto a sinistra (ossia vale il Teorema 3.3.16) ma non è esatto in generale.

OSSERVAZIONE 3.7.4. È possibile definire un altro funtore

$$f_!: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(Y)$$

detto **immagine diretta a supporti propri** oppure **lower shriek**⁷ che gode di una certa utilità: la definizione generale è piuttosto complessa e qui ci limitiamo al caso delle *immersioni aperte*, dove la situazione è nettamente più semplice.

DEFINIZIONE 3.7.5. Siano $U \subset X$ aperto e $j: U \hookrightarrow X$ il corrispondente morfismo di inclusione. Dato un fascio \mathcal{F} su U si definisce $j_!\mathcal{F}$ come il fascio \mathcal{G}^+ associato al prefascio

$$\mathcal{G}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{se } V \subset U \\ 0 & \text{se } V \not\subset U \end{cases}, \quad V \subset X.$$

Siccome U è aperto in X è immediato osservare che

$$(j_!\mathcal{F})_x = \mathcal{G}_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases}.$$

ESERCIZIO 3.7.6. Siano $U \subset X$ aperto e $j: U \hookrightarrow X$ il corrispondente morfismo di inclusione. Dato un fascio \mathcal{G} su X esiste un morfismo naturale di fasci $j_!(\mathcal{G}|_U) \rightarrow \mathcal{G}$ su X che è un isomorfismo su tutte le spighe sopra U .

ESERCIZIO 3.7.7. Siano $U \subset X$ aperto e $j: U \hookrightarrow X$ il corrispondente morfismo di inclusione. Dato un fascio \mathcal{F} su U , esiste un morfismo iniettivo naturale di fasci $j_!\mathcal{F} \rightarrow j_*\mathcal{F}$ che è un isomorfismo in tutte le spighe al di fuori del bordo topologico $\partial U = \bar{U} - U$.

Data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ ed un fascio \mathcal{F} su Y , la definizione del fascio $f^{-1}\mathcal{F}$ è decisamente più complessa rispetto al caso delle immagini dirette: per semplificare l'esposizione definiamo prima quello che a posteriori risulterà il fascio delle sezioni discontinue di $f^{-1}\mathcal{F}$.

⁷Ignoro il perché i matematici chiamano "shriek" (urlo di terrore) il punto esclamativo.

DEFINIZIONE 3.7.8. Se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua tra spazi topologici, definiamo il funtore

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}: \mathbf{Shv}(Y) \rightarrow \mathbf{Shv}(X),$$

ponendo per ogni fascio \mathcal{F} su Y ed ogni aperto U su X

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_{f(x)}.$$

Equivalentemente, se $p: \mathbf{et}(\mathcal{F}) \rightarrow Y$ è lo spazio étale di \mathcal{F} , si ha

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \{h: U \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \mid ph = f\}.$$

Ad esempio, se $\mathcal{F} = G_Y$ è un fascio costante (ossia il fascio delle applicazioni localmente costanti a valori nel gruppo abeliano G), allora $\mathcal{F}_y = G$ per ogni Y , allora ogni elemento di $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_{f(x)}$ non è altro che un'applicazione $U \rightarrow G$ e di conseguenza si ha una identificazione naturale

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}G_Y(U) = \mathcal{C}^0 G_X(U).$$

Allo scopo di definire il funtore $f^{-1}: \mathbf{Shv}(Y) \rightarrow \mathbf{Shv}(X)$ è utile introdurre il **sito di f** come

$$\mathbf{Site}(f) = \{(U, V) \mid U \subset X, V \subset Y \text{ aperti}, f(U) \subset V\}.$$

Per ogni oggetto del sito (U, V) (ebbene sì, per motivi che non sto a spiegare il sito deve essere pensato come una categoria, analoga per costruzione alla categoria degli aperti in uno spazio topologico), è definito un omomorfismo di gruppi

$$f^\#: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U), \quad \mathcal{F}(V) \ni s \mapsto f^\#(s) = \{s_{f(x)}\}_{x \in U},$$

dove come al solito si denota con s_y il germe della sezione s nel punto y .

È utile rappresentare il morfismo $f^\#$ in maniera più geometrica: si consideri lo spazio étale di \mathcal{F} :

$$\mathbf{et}(\mathcal{F}) := \{(y, s) \mid y \in Y, s \in \mathcal{F}_y\} \xrightarrow{p} Y, \quad p(y, s) = y.$$

Allora per ogni (U, V) nel sito di f si ha

$$\mathcal{C}^0 \mathcal{F}(V) = \{h: V \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \mid ph(y) = y, \forall y \in V\},$$

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \{h: U \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \mid ph(x) = f(x), \forall x \in U\},$$

ed esiste un ovvio morfismo di composizione con f :

$$\Psi: \mathcal{C}^0 \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U), \quad \Psi(h) = h \circ f.$$

Per definizione, $f^\#$ è allora la composizione del morfismo naturale $\eta: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{C}^0 \mathcal{F}(V)$ con Ψ .

DEFINIZIONE 3.7.9. Nelle notazioni precedenti si definisce il fascio **immagine inversa** $f^{-1}\mathcal{F}$ come il sottofascio di $\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}$ formato dalle sezioni che sono localmente nell'immagine di $f^\#$.

Più precisamente, una sezione $h \in \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U)$ appartiene a $f^{-1}\mathcal{F}(U)$ se e solo se per ogni $x \in U$ esistono due aperti $x \in W \subset U$, $f(W) \subset V \subset Y$ ed una sezione $s \in \mathcal{F}(V)$ tale che $h|_W = f^\#(s)|_W$.

È tautologico osservare che ogni sezione nell'immagine dei morfismi $f^\#$ appartiene al fascio $f^{-1}\mathcal{F}$; quindi per ogni oggetto (U, V) del sito di f è definito un omomorfismo di gruppi

$$f^\#: \mathcal{F}(V) \rightarrow f^{-1}\mathcal{F}(U), \quad f^\#(s)_x = s_{f(x)}, \quad \forall x \in U.$$

In particolare, per ogni aperto $V \subset Y$ si ha

$$f^\#: \mathcal{F}(V) \rightarrow f^{-1}\mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* f^{-1}\mathcal{F}(V)$$

e questo equivale a dire che è ben definito un morfismo di fasci su Y

$$f^\#: \mathcal{F} \rightarrow f_* f^{-1}\mathcal{F}.$$

ESEMPIO 3.7.10. Consideriamo il fascio costante G_Y . Allora esiste un isomorfismo naturale di fasci $f^{-1}G_Y \simeq G_X$ che trasforma $f^\#$ nella composizione con f , ossia tale che per ogni (U, V) nel sito di f si ha

$$\begin{array}{ccc} G_Y(V) & \xrightarrow{f^\#} & f^{-1}G_Y(U) \xrightarrow{\simeq} G_X(U) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & -\circ f \end{array}$$

Infatti le fibre di G_X e G_Y sono tutte uguali a G , quindi $\mathcal{C}^0 f^{-1}G_Y = \mathcal{C}^0 G_X = e$ e per ogni (U, V) nel sito $f^\#: G_Y(V) \rightarrow f^{-1}G_Y(U) \subset \mathcal{C}^0 f^{-1}G_Y(U)$ corrisponde alla composizione con f . Per continuità di f , le applicazioni localmente costanti su X sono tutte e sole le applicazioni localmente composizione di f con una applicazione localmente costante su Y ; da ciò segue che l'isomorfismo $\mathcal{C}^0 G_X = \mathcal{C}^0 f^{-1}G_Y$ induce l'isomorfismo $G_X \simeq f^{-1}G_Y$.

ESEMPIO 3.7.11. Sia $U \subset X$ un sottoinsieme aperto e $j: U \hookrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Per ogni fascio \mathcal{F} su X si ha per definizione che $\mathcal{C}^0 j^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{C}^0 \mathcal{F}|_U$ ed è immediato constatare che $j^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}|_U$.

LEMMA 3.7.12. Sia $f: X \rightarrow Y$ continua e \mathcal{F} un fascio su Y . Allora per ogni $x \in X$ esiste un isomorfismo naturale di gruppi abeliani

$$f^\#: \mathcal{F}_{f(x)} \xrightarrow{\simeq} (f^{-1}\mathcal{F})_x.$$

In particolare il funtore f^{-1} è esatto (ossia preserva le successioni esatte) e

$$\mathcal{C}^0(f^{-1}\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intorno aperto V di $f(x)$ si ha $x \in f^{-1}(V)$ e quindi un omomorfismo di gruppi

$$\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f^\#} f^{-1}\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow (f^{-1}\mathcal{F})_x$$

che dipende solo dal germe in $f(x)$. Dunque è ben definito $f^\#: \mathcal{F}_{f(x)} \xrightarrow{\simeq} (f^{-1}\mathcal{F})_x$ che è surgettivo per definizione di $f^{-1}\mathcal{F}$. Per ogni aperto $x \in U \subset X$ si ha

$$f^{-1}\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \prod_{y \in U} \mathcal{F}_{f(y)}$$

e quindi esiste morfismo di proiezione $f^{-1}\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{f(x)}$ che induce un omomorfismo di spighe $\pi: f^{-1}\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{f(x)}$. Siccome la composizione $\pi f^\#$ è l'identità ne consegue che $f^\#$ è iniettivo. \square

Date $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ continue e \mathcal{F} fascio su Z si ha

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}(g^{-1}\mathcal{F}) = \prod_x (g^{-1}\mathcal{F})_{f(x)} = \prod_x \mathcal{F}_{gf(x)} = \mathcal{C}^0 (gf)^{-1}\mathcal{F},$$

ossia

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}(g^{-1}\mathcal{F})(U) = \{h: U \rightarrow \mathbf{et}(\mathcal{F}) \mid ph = gf\} = \mathcal{C}^0 (gf)^{-1}\mathcal{F}(U),$$

e da ciò segue facilmente che $(gf)^{-1}\mathcal{F} = f^{-1}(g^{-1}\mathcal{F})$.

In generale i funtori f^{-1} e \mathcal{C}^0 non commutano, ossia $f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \neq \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}$ in generale. Si consideri ad esempio il caso in cui X è uguale a Y dotato della topologia discreta e f è l'identità. Siccome X è discreto si ha $\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{F}$ le cui spighe sono isomorfe a quelle di \mathcal{F} , mentre le spighe di $f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ sono isomorfe a quelle di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$.

Tuttavia, segue dal prossimo lemma (con $\alpha = \text{Id}$) che esiste sempre un morfismo naturale di fasci $f^{-1}(\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}$.

LEMMA 3.7.13. Siano $f: X \rightarrow Y$ continua, \mathcal{F} un fascio su Y e $\alpha: f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ un morfismo di fasci su X . Allora α si estende in maniera canonica ad un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{f^{-1}\eta_{\mathcal{F}}} & f^{-1}(\mathcal{C}^0\mathcal{F}) & \hookrightarrow & \mathcal{C}^0 f^{-1}(\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & \swarrow \alpha'' & \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{H}}} & \mathcal{C}^0\mathcal{H} & & \end{array}$$

di fasci su X .

DIMOSTRAZIONE. Basta chiaramente mostrare l'esistenza di α'' . Per quanto visto, per ogni $x \in X$ si ha un morfismo di spighe

$$\theta_x: (\mathcal{C}^0 \mathcal{F})_{f(x)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_{f(x)} \xrightarrow{f^\#} (f^{-1} \mathcal{F})_x \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}_x.$$

Adesso per ogni aperto $U \subset X$ basta definire

$$\alpha''_U: \mathcal{C}^0 f^{-1} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{C}^0 \mathcal{H}(U)$$

come

$$\alpha''_U = \prod_{x \in U} \theta_x: \prod_{x \in U} (\mathcal{C}^0 \mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{H}_x.$$

□

3.8. Piccolo antipastino coomologico

Data una successione esatta corta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ in uno spazio topologico X , abbiamo visto che a livello di sezioni globali la successione $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$ rimane esatta ma con β_X in generale non surgettivo.

Ci interessa quindi capire quando β_X è surgettivo e più in generale chi è il suo conucleo: questo può essere fatto, ad esempio allungando la successione esatta delle sezioni globali ad una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \rightarrow ?.$$

Per riempire il punto interrogativo, risolviamo preliminarmente una versione parziale del problema. Sia $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di X e denotiamo con $V_\beta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H}(X)$ il sottogruppo delle sezioni le cui restrizioni a ciascun U_i sono nell'immagine di β :

$$V_\beta(\mathcal{U}) = \{h \in \mathcal{H}(X) \mid \forall i \in I \exists s_i \in \mathcal{G}(U_i), \beta(s_i) = h|_{U_i}\}.$$

È chiaro che, qualunque sia \mathcal{U} , l'immagine di β_X è contenuta in $V_\beta(\mathcal{U})$, mentre la surgettività di β ci dice che ogni elemento di $\mathcal{H}(X)$ appartiene a $V_\beta(\mathcal{U})$ per qualche ricoprimento aperto \mathcal{U} .

Il problema preliminare che vogliamo risolvere è quello di rimpiazzare, in maniera utile e non tautologica, il punto interrogativo nella successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} V_\beta(\mathcal{U}) \rightarrow ?.$$

Per semplicità notazionale scriviamo $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ per ogni $i, j, k \in I$ ed anche β al posto di β_U quando l'aperto U è chiaro dal contesto; non è restrittivo identificare \mathcal{F} con la sua immagine $\alpha(\mathcal{F})$, ossia supporre per ogni aperto U si ha $\mathcal{F}(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) \mid \beta(s) = 0\}$.

Prendiamo una sezione globale $h \in V_\beta(\mathcal{U})$, per ipotesi esistono delle sezioni $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$, $i \in I$, tali che $\beta(s_i) = h|_{U_i}$ per ogni i ; la famiglia di sezioni s_i definisce, nella sua globalità un elemento del prodotto diretto

$$s = \{s_i\} \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i),$$

che appartiene al sottogruppo

$$C_\beta(\mathcal{U}) := \left\{ \{s_i\} \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i) \mid \beta(s_i) = \beta(s_j) \quad \forall i, j \in I \right\}.$$

Naturalmente la condizione $\beta(s_i) = \beta(s_j)$, ed altre che scriveremo in seguito, va intesa "cum grano salis", restringendo ogni sezione ad aperti più piccoli quando il contesto lo richiede: nel caso specifico $\beta(s_i) = \beta(s_j)$ ha lo stesso significato di $\beta_{U_i}(s_i)|_{U_{ij}} = \beta_{U_j}(s_j)|_{U_{ij}}$.

Per ogni $s \in C_\beta(\mathcal{U})$ ed ogni $i, j \in I$, l'elemento $\omega_{ij} = s_j|_{U_{ij}} - s_i|_{U_{ij}}$ appartiene a $\mathcal{F}(U_{ij})$: infatti

$$\beta(\omega_{ij}) = \beta(s_j|_{U_{ij}}) - \beta(s_i|_{U_{ij}}) = \beta(s_j)|_{U_{ij}} - \beta(s_i)|_{U_{ij}} = h|_{U_{ij}} - h|_{U_{ij}} = 0$$

ed è immediato osservare che la famiglia delle sezioni ω_{ij} ,

$$\omega = \{\omega_{ij}\} \in \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{ij}),$$

soddisfa le seguenti condizioni.

- (1) $\omega_{ii} = 0$ per ogni $i \in I$;
- (2) $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ per ogni $i, j \in I$;
- (3) $\omega_{ij} = \omega_{ik} + \omega_{kj}$ in U_{ijk} per ogni $i, j, k \in I$.

Notiamo che le precedenti tre condizioni possono essere condensate nell'unica condizione

$$(3.7) \quad \omega_{jk} - \omega_{ik} + \omega_{ij} = 0 \quad \text{in } U_{ijk} \quad \forall i, j, k \in I.$$

Infatti se vale (3.7), ponendo $i = j = k$ si trova $\omega_{ii} = 0$, mentre con $k = i$ si trova $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Quindi il nostro $\omega = \{\omega_{ij}\}$ è un elemento del gruppo abeliano (dipendente solo da \mathcal{F} ed \mathcal{U})

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ \omega \in \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{ij}) \mid \omega_{jk} - \omega_{ik} + \omega_{ij} = 0 \quad \forall i, j, k \in I \right\},$$

e l'applicazione appena definita

$$C_\beta(\mathcal{U}) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \{s_i\} \mapsto \{\omega_{ij} = s_j - s_i\},$$

è un omomorfismo di gruppi abeliani.

Nelle notazioni precedenti, facciamo adesso l'ipotesi ulteriore che la sezione $h \in V_\beta(\mathcal{U})$ sia nell'immagine di β_X , ossia che esiste $s \in \mathcal{G}(X)$ tale che $\beta(s) = h$. Allora per ogni indice $i \in I$ l'elemento $a_i = s_i - s|_{U_i}$ appartiene a $\mathcal{F}(U_i)$ ed inoltre vale $\omega_{ij} = a_j|_{U_{ij}} - a_i|_{U_{ij}}$. Abbiamo quindi provato che se h appartiene all'immagine di β_X allora ω appartiene al sottogruppo

$$B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ \omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid \exists a = \{a_i\} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i), \omega_{ij} = a_j - a_i \quad \forall i, j \in I \right\}.$$

Viceversa se $\omega \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ossia $\omega_{ij} = a_j - a_i$ per ogni $i, j \in I$ per opportuni $a_i \in \mathcal{F}(U_i)$, allora le sezioni $s_i - a_i \in \mathcal{G}(U_i)$ coincidono nelle doppie intersezioni U_{ij} e quindi si incollano ad una sezione $s \in \mathcal{G}(X)$ tale che $\beta(s) = 0$.

In conclusione, abbiamo dimostrato che $h \in V_\beta(\mathcal{U})$ si solleva a $\mathcal{G}(X)$ se e solo se la classe di ω si annulla nel gruppo quoziente

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})},$$

anch'esso dipendente solo da \mathcal{F} ed \mathcal{U} . Inoltre la classe di ω in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dipende solo da h e non dalla scelta dei sollevamenti "locali" s_i . Infatti se $t_i \in \mathcal{G}(U_i)$ sono tali che $\beta(t_i) = \beta(s_i) = h|_{U_i}$, e poniamo $\eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $\eta_{ij} = t_j - t_i$, allora per ogni i si ha $t_i - s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, per ogni $i, j \in I$ vale

$$\eta_{ij} - \omega_{ij} = (t_j - s_j) - (t_i - s_i) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

In conclusione risulta ben definito un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\delta: V_\beta(\mathcal{U}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad h \mapsto \omega \quad (\text{vedi sopra}),$$

univocamente determinato dalla commutatività del diagramma

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccccc} C_\beta(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\beta} & V_\beta(\mathcal{U}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \delta & & \\ Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e tale che la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} V_\beta(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow ?? .$$

è esatta. Sempre nelle notazioni precedenti si ha $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ in quanto per costruzione $\omega_{ij} = s_j - s_i$ con $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ e quindi la composizione di δ con il morfismo naturale $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ indotto da α è nullo. Viceversa se la classe di $\eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ appartiene al nucleo di $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ allora $\eta \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ ed esistono sezioni $t_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tali

che $\eta_{ij} = t_j - t_i$. Ma allora le sezioni $\beta(t_i) \in \mathcal{H}(U_i)$ coincidono negli aperti U_{ij} e dunque definiscono una sezione globale $h \in V_\beta(\mathcal{U})$. Per costruzione l'immagine $\delta(h)$ è esattamente la classe di η in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Tutto questo prova che si ha una successione esatta

$$(3.9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} V_\beta(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Attenzione: qui ci dobbiamo prendere da facili entusiasmi dato che quello che sembrerebbe il proseguimento naturale, e cioè $\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, **non** è più una successione esatta in generale.

DEFINIZIONE 3.8.1. Chiameremo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ **primo gruppo di coomologia** di Čech del fascio \mathcal{F} nel ricoprimento \mathcal{U} .

Notiamo che la definizione di $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ha senso anche se \mathcal{F} è un prefascio e/o se \mathcal{U} è una qualunque famiglia di aperti di X (non necessariamente un ricoprimento).

ESEMPIO 3.8.2. Sia \mathcal{F} un fascio discreto su X , allora per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} vale $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Per definizione di fascio discreto esiste una famiglia di gruppi abeliani A_x , $x \in X$, tale che per ogni aperto U si ha

$$\mathcal{F}(U) = \{a: U \rightarrow \coprod A_x \mid a(x) \in A_x \forall x \in U\}.$$

Se $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, prendiamo un buon ordinamento di I (buon ordinamento vuol dire che ogni sottoinsieme non vuoto di I possiede minimo). Per ogni $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definiamo le sezioni

$$a_i \in \mathcal{F}(U_i): \quad a_i(x) = \omega_{mi}(x), \quad x \in U_i, \quad m = \min\{h \in I \mid x \in U_h\}.$$

Allora per ogni $x \in U_{ij}$, detto $m = \min\{h \in I \mid x \in U_h\}$ si ha

$$a_j(x) - a_i(x) = \omega_{mj}(x) - \omega_{mi}(x) = \omega_{ij}(x)$$

e questo prova che $\omega \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Vediamo adesso cosa succede passando da un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, ad un altro più fine $\mathcal{V} = \{V_j\}$, $j \in J$, ossia tale che per ogni $j \in J$ esiste $i \in I$ tale che $V_j \subset U_i$.

Scegliamo una *funzione di raffinamento* $\varrho: J \rightarrow I$, ossia $V_j \subset U_{\varrho(j)}$ per ogni j . La funzione ϱ definisce per ogni fascio \mathcal{F} un omomorfismo di gruppi

$$\tilde{\varrho}: Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}), \quad \omega \mapsto (\tilde{\varrho}(\omega))_{jl} = \omega_{\varrho(j)\varrho(l)}|_{V_{jl}}, \quad j, l \in J.$$

È immediato osservare che $\tilde{\varrho}(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ e quindi definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di gruppi $\tilde{\varrho}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

Si noti che per ogni successione esatta corta di fasci, $\tilde{\varrho}$ si estende naturalmente ad un morfismo tra i diagrammi (3.8) relativi ai ricoprimenti \mathcal{U} e \mathcal{V} .

LEMMA 3.8.3. Nelle notazioni precedenti il morfismo di gruppi abeliani

$$\tilde{\varrho}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

è iniettivo e non dipende dalla scelta della funzione di raffinamento.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima che $\tilde{\varrho}$ non dipende dalla scelta della funzione di raffinamento. Sia $\tau: J \rightarrow I$, tale che $V_j \subset U_{\tau(j)}$ per ogni j e sia $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Se per ogni $j \in J$ poniamo

$$a_j = \omega_{\varrho(j)\tau(j)}|_{V_j} \in \mathcal{F}(V_j)$$

per ogni $i, l \in J$ si ha

$$\omega_{\varrho(j)\varrho(l)} + a_l - a_j = \omega_{\varrho(j)\varrho(l)} + \omega_{\varrho(l)\tau(l)} - \omega_{\varrho(j)\tau(j)} = \omega_{\varrho(j)\tau(l)} - \omega_{\varrho(j)\tau(j)} = \omega_{\tau(j)\tau(l)},$$

e quindi $\tilde{\varrho}(\omega) - \tilde{\tau}(\omega) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sebbene l'iniettività di $\tilde{\varrho}$ la ritroveremo come conseguenza gratuita ma indiretta di un conto successivo, è didatticamente utile dare anche una dimostrazione diretta e "concreta".

Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{W} = \{W_{(i,j)} = U_i \cap V_j\}$, $(i, j) \in I \times J$, assieme alle due funzioni di raffinamento

$$p_1: I \times J \rightarrow I, \quad p_1(i, j) = i; \quad p_2: I \times J \rightarrow I, \quad p_2(i, j) = l$$

Dato che p_1 e $p_2\varrho$ inducono lo stesso omomorfismo

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2\tilde{\varrho}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{F})$$

basta dimostrare che \tilde{p}_1 è iniettiva.

Sia dunque $\omega \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la cui classe di coomologia è nel nucleo di \tilde{p}_1 , ciò significa che esistono sezioni $s_{(i,j)} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_j)$, $(i,j) \in I \times J$, tali che in particolare, per ogni i, j, l vale

$$s_{(i,j)} - s_{(i,l)} = (\tilde{p}_1\omega)_{(i,l),(i,j)} = \omega_{ii} = 0 \quad \text{in } U_i \cap (V_j \cap V_l).$$

Dunque le sezioni $s_{(i,j)}$ si incollano, al variare di j , ad una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Siano adesso $i, h \in I$, per dimostrare che $\omega_{ih} = s_h - s_i$ su U_{ij} basta provare che lo stesso vale in $U_i \cap U_h \cap V_j$ per ogni $j \in J$. Ma allora

$$s_h - s_i = s_{(h,j)} - s_{(i,j)} = (\tilde{p}_1\omega)_{(i,j),(h,j)} = \omega_{ih}.$$

□

Vediamo adesso come, grazie al Lemma 3.8.3 ed all'Esempio 3.8.2 ci possiamo rendere indipendenti dalla scelta del ricoprimento aperto.

Abbiamo visto che ad ogni fascio \mathcal{F} su X è associato un morfismo canonico ed iniettivo di fasci $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Definiamo $\mathcal{F}^{(1)}$ come il conucleo di η in modo da avere una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0.$$

DEFINIZIONE 3.8.4. Chiameremo **primo gruppo di coomologia** del fascio \mathcal{F} il gruppo

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \text{Coker}(\mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{F}^{(1)}(X)).$$

Per ogni ricoprimento \mathcal{U} , segue dalla successione esatta (3.9) e dall'Esempio 3.8.2. che $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) = 0$ e si ha un diagramma solido commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & V_\gamma(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow u & & \\ \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(1)}(X) & \xrightarrow{p} & H^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

che per la proprietà universale del conucleo induce il morfismo u che risulta essere iniettivo. Possiamo usare u per identificare il gruppo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con il sottogruppo

$$u(H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = p(V_\gamma(\mathcal{U})) \subset H^1(X, \mathcal{F}).$$

Se \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} è ovvio che $V(\mathcal{U}) \subset V(\mathcal{V})$ e dunque anche $p(V_\gamma(\mathcal{U})) \subset p(V_\gamma(\mathcal{V})) \subset H^1(X, \mathcal{F})$.

OSSERVAZIONE 3.8.5. Siccome ogni sezione globale di $\mathcal{F}^{(1)}$ appartiene a $V_\gamma(\mathcal{U})$ per qualche ricoprimento, ne segue che $H^1(X, \mathcal{F})$ è l'unione di tutti i gruppi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, al variare di \mathcal{U} tra i ricoprimenti aperti di X .

Torniamo alla nostra situazione iniziale, lasciando al lettore la verifica che alcuni passaggi sono ben definiti: per ogni successione esatta corta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ ed ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} V_\beta(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Tenendo conto che tutti i gruppi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono canonicamente isomorfi a sottogruppi di $H^1(X, \mathcal{F})$ e che $\mathcal{H}(X)$ è l'unione dei sottogruppi $V_\beta(\mathcal{U})$, possiamo "incollare" le precedenti successioni esatte ad una successione esatta

$$(3.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}).$$

ALLERTA SPOILER 3.8.6. Nel prossimo capitolo dimostremo non solo che la successione esatta (3.10) si estende ad una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H})$$

ma definiremo dei gruppi di coomologia superiore $H^n(X, \mathcal{F})$, $n > 1$, in modo tale che (3.10) si estende ad una successione esatta di lunghezza infinita

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Estenderemo anche il gruppo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ad una successione di gruppi $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $n \geq 0$, e di omomorfismi $u: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$ che però non sono iniettivi in generale quando $n > 1$. Inoltre, a meno che lo spazio topologico X non sia paracompatto di Hausdorff oppure che la coppia \mathcal{U}, \mathcal{F} soddisfi ulteriori condizioni, non sarà nemmeno vero in generale che $H^n(X, \mathcal{F})$ è l'immagine di tali omomorfismi al variare del ricoprimento \mathcal{U} .

Coomologia

4.1. Elementi di algebra omologica

Abbiamo già incontrato il concetto di complesso di gruppi abeliani e di successione esatta ed abbiamo esteso tali concetti ai fasci.

Salvo avviso contrario considereremo complessi coomologici (o di cocatene), ossia complessi della forma

$$G^* : \quad \dots \xrightarrow{d} G^n \xrightarrow{d} G^{n+1} \xrightarrow{d} \dots \quad n \in \mathbb{Z}, \quad d^2 = 0,$$

con il differenziale d che aumenta i gradi di 1.

Un morfismo di complessi $f: G^* \rightarrow A^*$ è una successione di omomorfismi di gruppi $f_n: G^n \rightarrow A^n$ che commutano con i differenziali, ossia $df_n(x) = f_{n+1}(dx)$ per $x \in G^n$. I morfismi di complessi si possono comporre nel modo ovvio.

DEFINIZIONE 4.1.1. Dato un complesso G^* di gruppi abeliani con differenziale d , per ogni intero n definiamo:

- (1) il gruppo degli n cocicli

$$Z^n(G^*) = \{x \in G^n \mid dx = 0\};$$

- (2) il gruppo degli n cobordi

$$B^n(G^*) = \{dx \in G^n \mid x \in G^{n-1}\};$$

- (3) l' n -esimo gruppo di coomologia

$$H^n(G^*) = \frac{Z^n(G^*)}{B^n(G^*)}.$$

La definizione dei gruppi di coomologia ha perfettamente senso in quanto $d^2 = 0$ e quindi $B^n(G^*) \subset Z^n(G^*)$; essendo poi tutti i gruppi abeliani, il quoziente $H^n(G^*)$ è ancora un gruppo abeliano.

I gruppi di coomologia sono una misura di quanto manca al complesso per essere una successione esatta: un complesso G^* è una successione esatta se e soltanto se $H^n(G^*) = 0$ per ogni n .

È immediato osservare che ogni morfismo di complessi $f: G^* \rightarrow A^*$ induce, per restrizione e fattorizzazione, dei morfismi di gruppi abeliani:

$$f: Z^n(G^*) \rightarrow Z^n(A^*), \quad f: B^n(G^*) \rightarrow B^n(A^*), \quad f: H^n(G^*) \rightarrow H^n(A^*).$$

DEFINIZIONE 4.1.2. Diremo che un morfismo di complessi $f: G^* \rightarrow A^*$ è:

- (1) **iniettivo** se $f_n: G^n \rightarrow A^n$ è iniettivo per ogni n ;
 (2) **surgettivo** se $f_n: G^n \rightarrow A^n$ è surgettivo per ogni n .

ESERCIZIO 4.1.3. Sia $f: G^* \rightarrow A^*$ un morfismo di complessi iniettivo. Provare che per ogni n si ha $f_n^{-1}(B^n(A^*)) \subset Z^n(G^*)$ e che $f: H^n(G^*) \rightarrow H^n(A^*)$ è iniettivo se e solo se $f_n^{-1}(B^n(A^*)) = B^n(G^*)$.

ESERCIZIO 4.1.4. Sia $f: G^* \rightarrow A^*$ un morfismo di complessi surgettivo. Provare che per ogni n si ha $f_n(B^n(A^*)) = B^n(G^*)$ e $f: H^n(G^*) \rightarrow H^n(A^*)$ è surgettivo se e solo se $f_n(Z^n(A^*)) = Z^n(G^*)$.

Una successione esatta corta di complessi è una successione

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$$

di morfismi di complessi tale che, per ogni intero n la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow A^n \xrightarrow{f_n} B^n \xrightarrow{g_n} C^n \rightarrow 0$$

è esatta.

Per funtorialità, ogni successione esatta corta di complessi come sopra induce per ogni n tre complessi

$$0 \rightarrow Z^n(A^*) \xrightarrow{f_n} Z^n(B^*) \xrightarrow{g_n} Z^n(C^*) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow B^n(A^*) \xrightarrow{f_n} B^n(B^*) \xrightarrow{g_n} B^n(C^*) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \rightarrow 0,$$

che però non sono successioni esatte in generale. Si consideri ad esempio il caso in cui $A^1 = B^0 = B^1 = C^0 = \mathbb{Z}$ e $A^i, B^i, C^i = 0$ altrimenti, e dove i tre morfismi $d: B^0 \rightarrow B^1$, $f_1: A^1 \rightarrow B^1$, $g_0: B^0 \rightarrow C^0$ sono tutti uguali all'identità.

I complessi degli 0-cocicli, degli 1-cobordi e della 0-coomologia risultano essere rispettivamente:

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_1} 0 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

TEOREMA 4.1.5. *Sia $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani. Allora è ben definita una successione di omomorfismi di gruppi*

$$\delta_n: H^n(C^*) \rightarrow H^{n+1}(A^*), \quad n \in \mathbb{Z},$$

che induce una successione esatta (lunga) di coomologia

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Sia n un intero fissato e definiamo δ_n . Sia $x \in H^n(C^*)$, sia X l'insieme dei rappresentanti di x in $\text{Ker } g_n \subseteq C^n$. Siccome $g_n: B^n \rightarrow C^n$ è surgettivo, possiamo scegliere $b \in B^n$ tale che $g_n(b) \in X$. Siccome $g_{n+1}(db) = dg_n(b) = 0$ si ha $db \in \text{Ker } g_{n+1}$.

Per esattezza vi è un unico elemento $a \in A^{n+1}$ tale che $f_{n+1}(a) = db$. Si vede subito che a è un cociclo, infatti

$$f_{n+2}(da) = df_{n+1}(a) = d^2b = 0$$

ed il morfismo f_{n+2} è iniettivo. Poniamo dunque

$$\delta_n(x) = \text{classe di coomologia di } a$$

e mostriamo che non dipende dalla scelta di b . Sia \tilde{b} tale che $g_n(\tilde{b}) \in X$, allora $g_n(b - \tilde{b})$ è un cobordo, ossia esiste $c \in C^{n-1}$ tale che $dc = g_n(b - \tilde{b})$. Poiché g_{n-1} è suriettiva, esiste $h \in B^{n-1}$ tale che $g_{n-1}(h) = c$, allora

$$g_n(b - \tilde{b} - dh) = g_n(b - \tilde{b}) - g_n(dh) = g_n(b - \tilde{b}) - dg_{n-1}(h) = 0$$

e per esattezza esiste $k \in A^n$ tale che $f_n(k) = b - \tilde{b} - dh$. Dunque

$$f_{n+1}(a - dk) = db - f_{n+1}(dk) = db - df_n(k) = db - (db - d\tilde{b} - d^2h) = d\tilde{b}$$

e siccome $a, a - dk$ sono cocicli che inducono la stessa classe di coomologia abbiamo provato che $\delta_n(x)$ è ben definito.

La dimostrazione dell'esattezza della successione lunga di coomologia è lasciata per esercizio. \square

I morfismi δ_n del Teorema 4.1.5 si comportano bene rispetto ai morfismi di complessi. Ad esempio, segue immediatamente dalla definizione che dato un diagramma commutativo di morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & L^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con le righe successioni esatte corte, segue che vi è un morfismo tra le corrispondenti successioni esatte lunghe di coomologia, ossia vi è un diagramma commutativo di gruppi di coomologia

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(C^*) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(A^*) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H^n(L^*) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(N^*) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Note. Per maggiori dettagli sugli argomenti di questa sezione rimandiamo al primo capitolo di [26] ed al capitolo dedicato all'algebra omologica di [16].

4.2. Risoluzione canonica e coomologia dei fasci

DEFINIZIONE 4.2.1. Chiameremo **risoluzione** (coomologica) di un fascio \mathcal{F} una qualunque successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

OSSERVAZIONE 4.2.2. Ha ovviamente senso definire le risoluzioni omologiche come le successioni esatte del tipo $0 \rightarrow \mathcal{F} \xleftarrow{i} \mathcal{E}_0 \xleftarrow{d} \mathcal{E}_1 \dots$, che però, per via del Teorema 3.3.16 e dell'Esempio 3.3.17 hanno un'importanza decisamente inferiore rispetto alle risoluzioni coomologiche; questo spiega perché con il termine generico di risoluzione si intendono quelle coomologiche. Per chi si è imbattuto nei funtori derivati Tor ed Ext (e.g. [26]), un altro motivo è dato dal fatto che la categoria dei fasci su uno spazio topologico ha abbastanza iniettivi ma, in generale, non ha abbastanza proiettivi [9].

Abbiamo visto che ad ogni fascio \mathcal{F} è associato un morfismo canonico ed iniettivo di fasci $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Definiamo $\mathcal{F}^{(1)}$ come il conucleo di η in modo da avere una successione esatta corta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0$. Ripetendo la procedura con $\mathcal{F}^{(1)}$ al posto di \mathcal{F} , e poi ricorsivamente aumentando ad ogni passaggio gli indici di 1, si ottiene una serie di successioni esatte corte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F} &\xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F}^{(1)} &\xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(1)} \rightarrow \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F}^{(2)} &\xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(2)} \rightarrow \mathcal{F}^{(3)} \rightarrow 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

che possiamo ricomporre in una unica successione esatta lunga di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F} \dots, \quad \mathcal{C}^n\mathcal{F} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}^{(1)} = \dots = \mathcal{C}^0\mathcal{F}^{(n)},$$

che chiameremo **risoluzione canonica**¹ di \mathcal{F} .

Abbiamo visto che ogni morfismo di fasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si estende canonicamente ad un morfismo $f^0: \mathcal{C}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{G}$. Con canonicamente intendiamo tra le altre cose che il tutto si comporta in maniera functoriale rispetto ai morfismi di fasci, ossia $(fg)^0 = f^0g^0$. Considerando la fattorizzazione di f^0 ai conuclei si ottiene un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}^0\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^{(1)} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

e ripetendo la procedura su $\mathcal{F}^{(1)}$ e poi ricorsivamente otteniamo che f si estende in maniera naturale e functoriale ad un morfismo tra le risoluzioni canoniche

¹Il nome completo sarebbe "prima risoluzione canonica di Godement", [4].

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}^0\mathcal{F} & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1\mathcal{F} \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1\mathcal{G} \longrightarrow \dots
\end{array}$$

PROPOSIZIONE 4.2.3. Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una successione esatta di fasci su X . Allora per ogni intero $n \geq 0$ ed ogni aperto $U \subset X$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^n\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U^n} \mathcal{C}^n\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U^n} \mathcal{C}^n\mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Induzione su n . Per $n = 0$ basta osservare che per ogni $x \in X$ la successione di spighe $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{f} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g} \mathcal{H}_x \rightarrow 0$ è esatta e ciò implica che per ogni sottoinsieme $Y \subset X$ si ha una successione esatta di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \prod_{x \in Y} \mathcal{F}_x \rightarrow \prod_{x \in Y} \mathcal{G}_x \rightarrow \prod_{x \in Y} \mathcal{H}_x \rightarrow 0.$$

In particolare, per ogni aperto U la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U^0} \mathcal{C}^0\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U^0} \mathcal{C}^0\mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

è esatta e per il Lemma 3.3.14, anche la successione di fasci $0 \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{f^0} \mathcal{C}^0\mathcal{G} \xrightarrow{g^0} \mathcal{C}^0\mathcal{H} \rightarrow 0$ è esatta. Il diagramma commutativo di fasci con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{H} \longrightarrow 0
\end{array}$$

induce un complesso di fasci quoziente, che per il lemma del serpente applicato ai corrispondenti diagrammi di spighe ci dà una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(1)} \rightarrow 0.$$

Basta adesso applicare l'ipotesi induttiva osservando che, per come è stata costruita la risoluzione canonica, si ha

$$\mathcal{C}^n\mathcal{F} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F}^{(1)}, \quad \mathcal{C}^n\mathcal{G} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{G}^{(1)}, \quad \mathcal{C}^n\mathcal{H} = \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{H}^{(1)},$$

per ogni $n > 0$. □

DEFINIZIONE 4.2.4. I **gruppi di coomologia** di un fascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si definiscono come i gruppi di coomologia del complesso di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^3\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \dots$$

Ricordiamo che per un fascio \mathcal{F} si ha la doppia notazione $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, per cui si può scrivere:

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0 \quad n < 0,$$

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \text{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{C}^1\mathcal{F})),$$

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker}(d: \Gamma(X, \mathcal{C}^n\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}^{n+1}\mathcal{F}))}{d\Gamma(X, \mathcal{C}^{n-1}\mathcal{F})}, \quad n > 0.$$

LEMMA 4.2.5. Per ogni fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X si ha

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 3.3.16 alla successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}$$

□

ESEMPIO 4.2.6. Se X è uno spazio topologico discreto, allora per ogni fascio \mathcal{F} su X vale $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Infatti per ogni punto $x \in X$ il sottoinsieme $\{x\}$ è aperto in X e quindi $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$. Inoltre, per ogni aperto $U \subset X$ si ha un ricoprimento aperto $U = \cup_{x \in U} \{x\}$ e per l'assioma (F4) si ha

$$\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}(\{x\}) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x = \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$$

ed il morfismo $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ è un isomorfismo.

Dunque $\mathcal{F}^{(1)} = 0$, quindi $\mathcal{C}^n\mathcal{F} = 0$ per ogni $n > 0$ e dalla definizione dei gruppi di coomologia segue immediatamente che $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$.

TEOREMA 4.2.7. *Ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

sullo spazio topologico X induce una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^*\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^*\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{C}^*\mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

e quindi una successione esatta lunga di coomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 4.2.3 che per ogni $n \geq 0$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^n\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^n\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{C}^n\mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

è esatta. □

4.3. Fasci fiacchi e fasci aciclici

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che per il calcolo della coomologia è possibile usare molte altre risoluzioni, oltre a quella canonica.

DEFINIZIONE 4.3.1. Un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X si dice **fiacco**² se per ogni aperto $U \subset X$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettivo.

Osserviamo che se \mathcal{F} è fiacco, allora per ogni coppia di aperti $U \subset V$ il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ è surgettivo: basta osservare che la composizione della restrizione $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ con la restrizione $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettivo. Lo stesso ragionamento prova che se \mathcal{F} è fiacco, allora per ogni aperto $U \subset X$ la restrizione $\mathcal{F}|_U$ è ancora fiacca.

Ad esempio i fasci di sezioni discontinue $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ sono fiacchi. Basta pensare che i morfismi di inclusione non sono altro che le proiezioni, cioè, se $U \subseteq V$, allora:

$$\rho_{UV}: \mathcal{C}^{\mathcal{F}}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{F}(V) = \prod_{x \in Y} \mathcal{F}_x$$

è suriettivo. Lo stesso ragionamento prova che ogni fascio discreto (Esempio 3.3.6) è fiacco.

ESEMPIO 4.3.2. Il fascio \mathcal{A}_X^0 delle funzioni C^∞ su una varietà differenziabile X di dimensione positiva non è fiacco. La verifica è immediata: basta infatti prendere una qualsiasi carta locale U con coordinate x_1, \dots, x_n e osservare che la funzione x_1^{-1} definita sull'aperto $\{x_1 \neq 0\} \subset U$ non si estende ad U .

LEMMA 4.3.3. *Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una successione esatta corta di fasci su X :*

(1) *se \mathcal{F} è fiacco allora per ogni aperto U la successione dei gruppi di sezioni*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

è esatta;

(2) *se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono fiacchi, allora anche \mathcal{H} è fiacco.*

²Dal francese "flasque", di norma usato anche nei testi di lingua inglese al posto di "flabby".

DIMOSTRAZIONE. L'unico punto non banale da dimostrare è la surgettività di $\mathcal{G}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{H}(U)$; non è restrittivo supporre \mathcal{F} un sottofascio di \mathcal{G} e $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ il morfismo di inclusione. Sia $s \in \mathcal{H}(U)$ una sezione fissata e consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} = \{(V, r) \mid V \subset U, r \in \mathcal{G}(V), g(r) = s|_V\}.$$

Notiamo che \mathcal{A} è non vuoto, poiché contiene la coppia $(\emptyset, 0)$, e che lo possiamo ordinare per estensione. L'assioma (F4) per \mathcal{G} ci garantisce che possiamo applicare il lemma di Zorn ed avere a disposizione un elemento massimale di $(W, h) \in \mathcal{A}$; per concludere la dimostrazione basta provare che $W = U$.

Se per assurdo esiste un punto $x \in U - W$, esiste un germe di sezione $r_x \in \mathcal{G}_x$ tale che $g(r_x) = s_x$.

Dunque esiste un intorno aperto $x \in V$ ed una sezione $r \in \mathcal{G}(V)$ tale che $g(r) = s|_V$. Sia $\psi = h|_{W \cap V} - r|_{W \cap V} \in \mathcal{F}(W \cap V)$ e, siccome \mathcal{F} è fiacco esiste $\phi \in \mathcal{F}(V)$ che estende ψ ; a meno di sostituire r con $r + \phi \in \mathcal{G}(V)$ possiamo supporre che r e h coincidono su $V \cap W$ e quindi si incollano ad una sezione su $W \cup V$, contraddicendo la massimalità di (W, h) . \square

TEOREMA 4.3.4. *Sia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \rightarrow \dots$$

una successione esatta di fasci fiacchi su X . Allora i fasci $\text{Ker } d_i$ sono tutti fiacchi e per ogni aperto $U \subset X$ la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_0(U) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3(U) \rightarrow \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Basta spezzare la successione in successioni esatte corte, applicare il Lemma 4.3.3 e ricomporre in una successione esatta lunga. \square

COROLLARIO 4.3.5. *Se \mathcal{F} è un fascio fiacco su X , allora $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$. In particolare per ogni fascio \mathcal{F} si ha $H^n(X, \mathcal{C}^m \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$ ed ogni $m \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che i fasci $\mathcal{C}^n \mathcal{F}$ sono tutti fiacchi ed applicare il Teorema 4.3.4 alla risoluzione canonica del fascio fiacco \mathcal{F} . \square

DEFINIZIONE 4.3.6. Un fascio \mathcal{F} tale che $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $n > 0$ si dice **aciclico**.

Possiamo riscrivere il Corollario 4.3.5 dicendo che ogni fascio fiacco è aciclico.

Per ogni spazio topologico X denotiamo con $\mathbf{Shv}(X)$ la categoria dei fasci su X . Per ogni aperto $U \subset X$ abbiamo un funtore di restrizione

$$\mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(U), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_U.$$

Ricordando che $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ per ogni aperto $V \subset U$, segue subito dalle definizioni che ogni morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce per restrizione un morfismo $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ (vedi la definizione del fascio $\mathcal{H}om$).

Inoltre:

- (1) se \mathcal{F} è fiacco, allora $\mathcal{F}|_U$ è fiacco (ovvio);
- (2) per ogni $x \in U$ si ha $(\mathcal{F}|_U)_x = \mathcal{F}_x$ (ovvio);
- (3) se $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ esatta, allora $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U \rightarrow \mathcal{H}|_U$ esatta: infatti l'esattezza si valuta sulle spighe che, per il punto precedente, non cambiano per restrizione.

ESERCIZIO 4.3.7. Nelle notazioni precedenti, provare che la risoluzione canonica commuta con le restrizioni agli aperti, e quindi che $H^n(U, \mathcal{F}|_U)$ coincide con l' n -esimo gruppo di coomologia del complesso di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^3 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d} \dots$$

TEOREMA 4.3.8. *Sia \mathcal{M} un fascio su uno spazio topologico tale che $H^1(U, \mathcal{M}|_U) = 0$ per ogni aperto $U \subset X$. Allora \mathcal{M} è aciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una qualunque successione esatta $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ con \mathcal{G} fiacco: ad esempio possiamo prendere $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0\mathcal{M}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{(1)}$. Vogliamo dimostrare che anche \mathcal{F} è fiacco, ossia che $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettiva per ogni aperto U : siccome $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è surgettiva per costruzione, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è surgettiva. A tal fine basta considerare la successione di coomologia associata alla successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

ed usare il fatto che $H^1(U, \mathcal{M}|_U) = 0$.

Per ipotesi si ha $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$, mentre per ogni $n > 1$ dalla successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow \cdots$$

e dal fatto che \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fiacchi segue $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$. \square

TEOREMA 4.3.9. *I fasci delle forme differenziali (di qualunque ordine) su una varietà differenziabile soddisfano le ipotesi del Teorema 4.3.8 e quindi sono aciclici.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni varietà differenziabile X denotiamo con \mathcal{A}_X^p il fascio delle forme p -differenziali su X . Ogni aperto $U \subset X$ è a sua volta una varietà differenziabile e $\mathcal{A}_U^p = (\mathcal{A}_X^p)|_U$. Per dimostrare il teorema non è quindi restrittivo dimostrare che $H^1(X, \mathcal{A}_X^p) = 0$ per ogni $p \geq 0$ ed ogni varietà differenziabile X .

I due punti chiave della dimostrazione sono: la partizione dell'unità di classe C^∞ ; le forme differenziali possono essere moltiplicate per funzioni di classe C^∞ .

Proviamo che per una qualunque successione esatta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{A}_X^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \rightarrow 0$ su X , il morfismo $\beta: \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ è surgettivo. Sia $s \in \mathcal{F}(X)$ fissata, dato che $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ è surgettivo, esistono un ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$ e sezioni $r_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tali che $\beta(r_i) = s|_{U_i}$. Denotiamo come al solito con $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$; per ogni i, j esiste quindi una unica forma differenziale $\omega_{ij} \in \mathcal{A}_X^p(U_{ij})$ tale che

$$\alpha(\omega_{ij}) = (r_j)|_{U_{ij}} - (r_i)|_{U_{ij}}.$$

Si noti che per ogni i, j, k si ha

$$(\omega_{jk})|_{U_{ijk}} - (\omega_{ik})|_{U_{ijk}} + (\omega_{ij})|_{U_{ijk}} = 0$$

in quanto la sua immagine tramite α è uguale alla restrizione a U_{ijk} di $(r_k - r_j) - (r_k - r_i) + (r_j - r_i)$.

Sia adesso $\{t_i\}$ una partizione dell'unità C^∞ subordinata al ricoprimento aperto $X = \cup_i U_i$. Ricordiamo che:

- (1) Ogni $t_i: X \rightarrow [0, 1]$ è di classe C^∞ ;
- (2) $\text{supp}(t_i) \subset U_i$ per ogni i (per definizione il supporto $\text{supp}(t_i)$ è la chiusura in X dell'aperto $t_i^{-1}([0, 1])$);
- (3) ogni punto $x \in X$ possiede un intorno V tale che $V \cap \text{supp}(t_i) \neq \emptyset$ per un numero finito di indici i ;
- (4) $\sum_i t_i = 1$.

In particolare, per ogni i, j la forma differenziale $t_j \omega_{ij}$ è ben definita in U_i e quindi

$$\omega_{ij} = \sum_k t_k \omega_{ij} = \sum_k t_k \omega_{ik} - \sum_k t_k \omega_{jk}.$$

Per ogni indice i possiamo considerare

$$\hat{r}_i = r_i + \alpha\left(\sum_j t_j \omega_{ij}\right) \in \mathcal{G}(U_i).$$

Si ha $\beta(\hat{r}_i) = \beta(r_i) = s|_{U_i}$ e per ogni i, j

$$(\hat{r}_j)|_{U_{ij}} - (\hat{r}_i)|_{U_{ij}} = (r_j)|_{U_{ij}} - (r_i)|_{U_{ij}} + \alpha\left(\sum_k t_k \omega_{jk} - \sum_k t_k \omega_{ik}\right) = \alpha(\omega_{ij} + \sum_k t_k \omega_{jk} - \sum_k t_k \omega_{ik}) = 0.$$

Dunque le sezioni locali \hat{r}_i si incollano ad una sezione globale che solleva s .

Per dimostrare che $H^1(X, \mathcal{A}_X^p) = 0$ basta prendere una successione esatta $0 \rightarrow \mathcal{A}_X^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \rightarrow 0$ in cui \mathcal{G} è aciclico (e.g. $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0 \mathcal{A}_X^p$) ed applicare la successione lunga di coomologia. \square

È importante osservare che per dimostrare il Teorema 4.3.9 abbiamo solo usato la possibilità di moltiplicare le sezioni del fascio per una partizione dell'unità di classe C^∞ : dunque la stessa dimostrazione prova che anche il fascio dei campi di vettori è aciclico, e più in generale sono aciclici tutti i fasci delle sezioni di classe C^∞ di un qualunque fibrato vettoriale.

ESERCIZIO 4.3.10. Un fascio \mathcal{I} si dice *iniettivo* se per ogni morfismo iniettivo di fasci $i: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$ esiste un morfismo $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ tale che $pi = \text{Id}_{\mathcal{I}}$. Provare che ogni fascio iniettivo è fiacco e che esistono fasci fiacchi che non sono iniettivi. (Nota: è un fatto vero, ma non banale, che ogni fascio è isomorfo ad un sottofascio di un fascio iniettivo, e su questo si basa la teoria della coomologia come funtore derivato.)

4.4. Risoluzioni acicliche e teorema di de Rham

Ricordiamo che una risoluzione di un fascio \mathcal{F} una qualunque successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

Analogamente a quanto fatto con la risoluzione canonica possiamo considerare il complesso delle sezioni globali (togliendo \mathcal{F})

$$\mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3(X) \xrightarrow{d} \dots$$

e calcolarne i gruppi di coomologia

$$H^n(\mathcal{E}^*(X)) = \frac{\text{Ker}(d: \mathcal{E}^n(X) \rightarrow \mathcal{E}^{n+1}(X))}{d(\mathcal{E}^{n-1}(X))},$$

che in generale di guardano bene dall'essere isomorfi dai gruppi di coomologia di \mathcal{F} , ossia del complesso delle sezioni della risoluzione canonica. Tuttavia un legame c'è, come stabilito dal seguente teorema.

TEOREMA 4.4.1. *Per ogni risoluzione*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots,$$

si hanno dei morfismi naturali di gruppi

$$\alpha_n: H^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}), \quad n \geq 0,$$

che godono delle seguenti proprietà:

- (1) se \mathcal{E}^* è la risoluzione canonica, allora α_n è l'identità per ogni n ;
- (2) se $H^{n-i-1}(X, \mathcal{E}^i) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n-2$, allora α_n è iniettivo;
- (3) se $H^{n-i}(X, \mathcal{E}^i) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$, allora α_n è surgettivo.

In particolare α_0 è un sempre un isomorfismo e α_1 è sempre iniettivo.

Prima di dare la dimostrazione, precisiamo che quando diciamo che i morfismi α_n sono naturali si intende che per ogni diagramma commutativo di fasci

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

con le righe risoluzioni di \mathcal{F} e \mathcal{G} rispettivamente, si hanno dei diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathcal{E}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & H^n(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ H^n(\mathcal{H}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & H^n(X, \mathcal{G}) \end{array} .$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione su n trattando separatamente i casi $n = 0$, $n = 1$ e $n \geq 2$.

Iniziamo con $n = 0$. Ricordiamo che

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

e si ha la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X)$$

che equivale all'isomorfismo

$$i: H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(\mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X)) = H^0(\mathcal{E}^*(X)).$$

Tale isomorfismo è chiaramente naturale e quindi lo è anche il suo inverso

$$\alpha_0 = i^{-1}: H^0(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}).$$

Denotiamo con \mathcal{F}' il nucleo di $d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$. Abbiamo allora una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}' \rightarrow 0$$

ed una risoluzione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3 \xrightarrow{d} \dots$$

Per quanto dimostrato al punto precedente si ha dunque $H^0(X, \mathcal{F}') = \text{Ker}(\mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X))$ ed una successione esatta lunga

$$\mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}_0) \rightarrow \dots$$

che induce una successione esatta

$$0 \rightarrow \frac{H^0(X, \mathcal{F}')}{d(\mathcal{E}^0(X))} \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}_0).$$

Ricordando che $H^0(X, \mathcal{F}') = \text{Ker}(d: \mathcal{E}_1(X) \rightarrow \mathcal{E}_2(X))$ si ottiene il morfismo

$$H^1(\mathcal{E}^*(X)) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{F})$$

cercato. Notiamo che abbiamo implicitamente dimostrato anche che α_1 è sempre iniettivo ed è surgettivo qualora $H^1(X, \mathcal{E}^0) = 0$.

Sia adesso $n > 1$ e supponiamo vero il teorema per tutti gli interi minori di n . Abbiamo la successione esatta lunga di coomologia

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\delta} H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{E}^0) \rightarrow \dots,$$

e per l'ipotesi induttiva abbiamo anche un morfismo naturale

$$\alpha'_{n-1}: H^{n-1}(\mathcal{E}^{*-1}(X)) = H^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{F}').$$

Basta allora definire α_n come la composizione di δ ed α'_{n-1} . Anche qui notiamo che α_n è iniettivo se α'_{n-1} è iniettivo e $H^{n-1}(X, \mathcal{E}^0) = 0$, mentre α_n è surgettivo se α'_{n-1} è surgettivo e $H^n(X, \mathcal{E}^0) = 0$. Per concludere, è chiaro dalla costruzione che nel caso della risoluzione canonica troviamo $\alpha_n = \text{Id}$ per ogni n . \square

DEFINIZIONE 4.4.2. Una risoluzione

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \dots$$

di un fascio \mathcal{F} è detta **aciclica** (resp.: **fiacca**, **discreta**) se ciascun fascio \mathcal{E}_i è aciclico (resp.: fiacco, discreto).

Ad esempio la risoluzione canonica è discreta, quindi fiacca, quindi aciclica.

COROLLARIO 4.4.3 (Teorema di de Rham astratto). *Data una risoluzione aciclica*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \dots,$$

di un fascio \mathcal{F} si hanno degli isomorfismi naturali

$$H^n(\mathcal{E}^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^n(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza immediata del Teorema 4.4.1. \square

OSSERVAZIONE 4.4.4. Dato un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

con la riga superiore risoluzione di \mathcal{F} e con la riga inferiore risoluzione **aciclica** di \mathcal{G} , i morfismi indotti in coomologia $H^n(\mathcal{E}^*(X)) \rightarrow H^n(\mathcal{H}^*(X))$ dipendono solo da f e **non** dipendono da g . Infatti per naturalità si hanno dei quadrati commutativi

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathcal{E}^*(X)) & \xrightarrow{\alpha_n} & H^n(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ H^n(\mathcal{H}^*(X)) & \xrightarrow[\cong]{\alpha_n} & H^n(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

con la seconda freccia orizzontale un isomorfismo per il Corollario 4.4.3.

Il passaggio dal teorema di de Rham astratto a quello usuale segue dal lemma di Poincaré, secondo il quale ogni forma differenziale chiusa è localmente esatta. Ciò implica in particolare che, a livello di fasci, il complesso di de Rham

$$\mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^2 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^3 \xrightarrow{d} \dots,$$

è una successione esatta. Siccome una 0-forma è chiusa se e solo se è localmente costante, si ha una risoluzione aciclica

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^2 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^3 \xrightarrow{d} \dots,$$

del fascio \mathbb{R} e quindi

$$H^n(X, \mathbb{R}) \cong \frac{\text{Ker}(d: \Gamma(X, \mathcal{A}_X^n) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{n+1}))}{d\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{n-1})}.$$

OSSERVAZIONE 4.4.5. A rigore, il precedente ragionamento mostra che la coomologia di de Rham coincide con la coomologia del fascio \mathbb{R} e non con la coomologia singolare: tuttavia non è difficile dimostrare, usando le suddivisioni baricentriche [21, Thm. 4.4.14], che per ogni spazio topologico localmente contraibile la coomologia singolare a coefficienti in un gruppo abeliano G coincide con la coomologia del fascio G .

OSSERVAZIONE 4.4.6. Segue dal teorema di de Rham che il fascio \mathbb{R} è aciclico su $X = \mathbb{R}^2$, mentre per ogni punto $x \in X$ vale $H^1(X - \{x\}, \mathbb{R}) \neq 0$ e quindi \mathbb{R} non soddisfa le ipotesi del Teorema 4.3.8.

4.5. La risoluzione canonica semicosimpliciale

Questa sezione contiene materiale che non sarà utilizzato nelle sezioni successive e pertanto può essere omesso in prima lettura senza compromettere la comprensione generale del testo.

Vogliamo definire, per ogni fascio una seconda risoluzione canonica, pure questa introdotta da Godement [4] e chiamata “risoluzione canonica semicosimpliciale”. A differenza della trattazione originale, seguiremo un approccio più categoriale, descritto ad esempio in [26], e valido in situazioni più astratte e generali.

Ricordiamo che una trasformazione naturale $\eta: T \rightarrow S$ tra due funtori

$$T, S: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

è il dato, per ogni oggetto $x \in \mathbf{A}$ di un morfismo

$$\eta_x: Tx \rightarrow Sx$$

tale che per ogni morfismo $\alpha: x \rightarrow y$ in \mathbf{A} si abbia un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} Tx & \xrightarrow{T\alpha} & Ty \\ \downarrow \eta_x & & \downarrow \eta_y \\ Sx & \xrightarrow{S\alpha} & Sy \end{array}$$

nella categoria B .

Ad esempio dato un funtore $T: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, dare una trasformazione naturale $\eta: I \rightarrow T$ (I funtore identità) significa dare morfismi $\eta_x: x \rightarrow Tx$ tali che per ogni $\alpha: x \rightarrow y$ si abbia

$$\eta_y \circ \alpha = T\alpha \circ \eta_x.$$

Per evitare ridondanze notazionali scriveremo talvolta η al posto di η_x quando l'oggetto x è chiaro dal contesto, come ad esempio nell'espressione $\eta: Tx \rightarrow Sx$.

Sia X uno spazio topologico fissato. Per non entrare rapidamente in conflitto notazionale con la risoluzione canonica usuale è opportuno denotare con

$$T: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(X), \quad T\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{F},$$

il funtore delle sezioni discontinue e con $I: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(X)$ il funtore identità. Abbiamo dimostrato che T è un funtore esatto, ossia trasforma successioni esatte in successioni esatte.

Abbiamo già definito una trasformazione naturale

$$\eta: I \rightarrow T, \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} T\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{F},$$

dove $\eta_{\mathcal{F}}$ è il solito morfismo (iniettivo) che associa ad una sezione la collezione di tutti i suoi germi: per ogni morfismo di fasci $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} & T\mathcal{F} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow T\alpha \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} & T\mathcal{G} \end{array}$$

Consideriamo le potenze di T : $T^0 = I$, $T^1 = T$, $T^2 = TT$ ecc.; per ogni $n \geq 0$ T^n è un funtore esatto.

DEFINIZIONE 4.5.1. Per ogni coppia di interi $0 \leq k \leq n$ definiamo una trasformazione naturale $\partial_k: T^n \rightarrow T^{n+1}$ nel modo seguente:

$$\partial_k = T^{n-k}\eta T^k: T^{n-k} \circ I \circ T^k \rightarrow T^{n-k} \circ T \circ T^k$$

Ossia, per ogni fascio \mathcal{F} si considera il morfismo $\eta_{T^k\mathcal{F}}: T^k\mathcal{F} \rightarrow TT^k\mathcal{F} = T^{k+1}\mathcal{F}$ e poi si applica il funtore T^{n-k} :

$$\partial_k = T^{n-k}\eta_{T^k\mathcal{F}}: T^n\mathcal{F} \rightarrow T^{n+1}\mathcal{F}.$$

In particolare, per $n = k = 0$ si ha $\partial_0 = \eta$.

LEMMA 4.5.2 (Identità semicosimpliciali). *Nelle notazioni precedenti, per ogni $0 \leq k \leq h \leq n$ si ha:*

$$\partial_k\partial_h = \partial_{h+1}\partial_k: T^n \rightarrow T^{n+2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{F} un fascio, si parte dal morfismo

$$T^k\mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{T^k\mathcal{F}}} T^{k+1}\mathcal{F}$$

e si applica il funtore T^{h-k} :

$$T^h\mathcal{F} \xrightarrow{T^{h-k}\eta_{T^k\mathcal{F}}} T^{h+1}\mathcal{F}.$$

Siccome η è una trasformazione naturale si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} T^h\mathcal{F} & \xrightarrow{T^{h-k}\eta_{T^k\mathcal{F}}} & T^{h+1}\mathcal{F} \\ \downarrow \eta_{T^h\mathcal{F}} & & \downarrow \eta_{T^{h+1}\mathcal{F}} \\ T^{h+1}\mathcal{F} & \xrightarrow{T^{h-k+1}\eta_{T^k\mathcal{F}}} & T^{h+2}\mathcal{F} \end{array}$$

al quale applicando il funtore T^{n-h} si ottiene

$$\begin{array}{ccc} T^n\mathcal{F} & \xrightarrow{T^{n-k}\eta_{T^k\mathcal{F}}} & T^{n+1}\mathcal{F} \\ \downarrow T^{n-h}\eta_{T^h\mathcal{F}} & & \downarrow T^{n-h}\eta_{T^{h+1}\mathcal{F}} \\ T^{n+1}\mathcal{F} & \xrightarrow{T^{n+1-k}\eta_{T^k\mathcal{F}}} & T^{n+2}\mathcal{F} \end{array} \Rightarrow \partial_k\partial_h = \partial_{h+1}\partial_k.$$

□

Per ogni $n \geq 0$ definiamo il morfismo di fasci

$$d_n: T^n \mathcal{F} \rightarrow T^{n+1} \mathcal{F}, \quad d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial_k.$$

Le identità semicosimpliciali implicano che $d_{n+1}d_n = 0$: infatti

$$d_{n+1}d_n = \sum_{h=0}^{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{h+k} \partial_h \partial_k = \sum_{0 \leq h \leq k \leq n} (-1)^{h+k} \partial_h \partial_k + \sum_{0 \leq k < h \leq n+1} (-1)^{h+k} \partial_h \partial_k$$

Scambiando h con k nella prima sommatoria e h con $h+1$ nella seconda si ha

$$d_{n+1}d_n = \sum_{0 \leq k \leq h \leq n} (-1)^{h+k} \partial_k \partial_h + \sum_{0 \leq k \leq h \leq n+1} (-1)^{h+k+1} \partial_{h+1} \partial_k$$

e i termini si cancellano a coppie per le identità semicosimpliciali.

TEOREMA 4.5.3. *Per ogni fascio \mathcal{F} il complesso*

$$T^* \mathcal{F}: \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} = T^0 \mathcal{F} \xrightarrow{d_0 = \eta_{\mathcal{F}}} T^1 \mathcal{F} \xrightarrow{d_1} T^2 \mathcal{F} \xrightarrow{d_2} T^3 \mathcal{F} \xrightarrow{d_3} T^4 \mathcal{F} \dots$$

*è una successione esatta. Abbiamo quindi una risoluzione di \mathcal{F} che viene detta **risoluzione canonica semicosimpliciale**.³*

Abbiamo già dimostrato che $d_{n+1}d_n = 0$ per ogni $n \geq 0$, ossia che $T^* \mathcal{F}$ è un complesso di fasci. Dimostriamo che è una successione esatta in quattro passaggi, ciascuno descritto da un singolo lemma. Vedremo a posteriori che in realtà il primo dei 4 lemmi può essere facilmente omesso, ma è tuttavia utile mantenerlo per ragioni didattiche ed espositive.

LEMMA 4.5.4. *Nelle notazioni precedenti, per ogni fascio \mathcal{F} il complesso $T^* \mathcal{F}$ è esatto in $T^0 \mathcal{F}$ ed in $T^1 \mathcal{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare l'esattezza di

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} T\mathcal{F} \xrightarrow{\partial_0 - \partial_1} T^2 \mathcal{F}.$$

Già sappiamo che $d_0 = \eta$ è iniettivo. Per quanto riguarda l'esattezza in $T^1 \mathcal{F}$ si consideri la "solita" successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} T\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0.$$

Applicando il funtore esatto T e la trasformazione naturale η si trova un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\partial_0} & T\mathcal{F} & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}^{(1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \eta_{\mathcal{F}^{(1)}} \\ 0 & \longrightarrow & T\mathcal{F} & \xrightarrow{\partial_0} & T^2 \mathcal{F} & \xrightarrow{Tp} & T\mathcal{F}^{(1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sia $x \in T\mathcal{F}$ tale che $d_1 x = 0$, allora $\partial_0 x = \partial_1 x$ e quindi $Tp(\partial_1 x) = Tp(\partial_0 x) = 0$. Siccome le frecce verticali sono iniettive ne segue che $p(x) = 0$ e dunque $x = \partial_0 z = d_0 z$ con $z \in \mathcal{F}$. \square

LEMMA 4.5.5. *Nelle notazioni precedenti, se esiste un morfismo di fasci $\mu: T\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tale che $\mu \circ \eta_{\mathcal{F}} = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, allora il complesso $T^* \mathcal{F}$ è contraibile, ossia esistono dei morfismi di fasci $\mu_n: T^{n+1} \mathcal{F} \rightarrow T^n \mathcal{F}$, $n \geq 0$, tali che*

$$d_{n-1} \mu_{n-1} + \mu_n d_n = \text{Id}_{T^n \mathcal{F}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \geq 0$ definiamo il morfismo di fasci

$$\mu_n = T^n \mu: T^{n+1} \mathcal{F} \rightarrow T^n \mathcal{F}, \quad n \geq 0.$$

³Introdotta da Godement [4, II.6.4] con il nome di risoluzione canonica simpliciale: nel rispetto della terminologia attuale, vedi [26, 8.1.10], è doveroso sostituire simpliciale con semicosimpliciale.

Dato che $T^n \eta = \partial_0$, vale $\mu_n \partial_0 = T^n \text{Id} = \text{Id}: T^n \rightarrow T^n$ per ogni $n \geq 0$. Siccome η è una trasformazione naturale, per ogni $i \geq 0$ si ha un diagramma commutativo

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} T^{i+1} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu_i} & T^i \mathcal{F} \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ T^{i+2} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu_{i+1}} & T^{i+1} \mathcal{F} \end{array}$$

Dunque se $0 \leq i \leq n$, applicando il funtore T^{n-i} a (4.1) si ottiene

$$\begin{array}{ccc} T^{n+1} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu_n} & T^n \mathcal{F} \\ \downarrow \partial_{i+1} & & \downarrow \partial_i \\ T^{n+2} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu_{n+1}} & T^{n+1} \mathcal{F} \end{array}$$

che equivale a

$$\partial_i \mu_n = \mu_{n+1} \partial_{i+1}: T^{n+1} \rightarrow T^{n+1}.$$

Riepilogando, per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\mu_n \partial_0 = \text{Id}, \quad \text{e} \quad \mu_n \partial_i = \partial_{i-1} \mu_{n-1}, \quad \forall 0 < i \leq n.$$

Da cui segue che $\mu_0 d_0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, mentre per ogni $n > 0$ vale

$$\begin{aligned} \mu_n d_n + d_{n-1} \mu_{n-1}: T^n \mathcal{F} &\rightarrow T^n \mathcal{F} \\ \mu_n d_n + d_{n-1} \mu_{n-1} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_n \partial_i + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_j \mu_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_n \partial_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_{i-1} \mu_{n-1} = \mu_n \partial_0 = \text{Id}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che il complesso è contraibile. \square

LEMMA 4.5.6. *Esiste una trasformazione naturale $\mu: T^2 \rightarrow T$ tale che $\mu \partial_0 = \mu \partial_1 = \text{Id}: T \rightarrow T$. In particolare, ogni fascio del tipo $T\mathcal{G}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 4.5.5.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni fascio \mathcal{F} ed ogni punto $x \in X$ abbiamo visto che esiste una retrazione naturale

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\eta} (T\mathcal{F})_x \xrightarrow{r} \mathcal{F}_x$$

dove r è indotto dalle proiezioni sull x -factor

$$x \in U, \quad T\mathcal{F}(U) = \prod_{y \in U} \mathcal{F}_y \xrightarrow{\text{proiezione}} \mathcal{F}_x.$$

Definiamo $\mu_{\mathcal{F}}: T^2 \mathcal{F} \rightarrow T\mathcal{F}$, dove per ogni aperto U

$$\mu_{\mathcal{F}}: T^2 \mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} (T\mathcal{F})_x \rightarrow T\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

è indotto dalle retrazioni r . Il fatto che le retrazioni r commutano con i morfismi di fasci è chiaro, e quindi che μ è una trasformazione naturale.

Rimane da dimostrare che per ogni fascio \mathcal{F} le due composizioni

$$T\mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{T\mathcal{F}}} T^2 \mathcal{F} \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} T\mathcal{F}, \quad T\mathcal{F} \xrightarrow{T\eta_{\mathcal{F}}} T^2 \mathcal{F} \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} T\mathcal{F},$$

sono l'identità.

Per quanto riguarda la prima, siano U un aperto e

$$s = \{h_x \in \mathcal{F}_x \mid x \in U\} \in T\mathcal{F}(U)$$

una sezione. Allora

$$\eta(s) = \{s_x \in (T\mathcal{F})_x \mid x \in U\} \in T^2 \mathcal{F}(U)$$

a dato che per definizione $r(s_x) = h_x$ per ogni $x \in U$ ne consegue $\mu \eta_{T\mathcal{F}} = \text{Id}$.

La seconda composizione è ancora più evidente in quanto, su ciascun aperto U è il prodotto delle retrazioni

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\eta} (T\mathcal{F})_x \xrightarrow{r} \mathcal{F}_x, \quad x \in U.$$

\square

LEMMA 4.5.7. *Per ogni fascio \mathcal{F} il complesso $T^*\mathcal{F}$ è aciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathcal{H}^*(\mathcal{F})$ i fasci di coomologia del complesso $T^*\mathcal{F}$ e dimostriamo per induzione su n che $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}) = 0$ per ogni fascio \mathcal{F} . I casi $n = 0, 1$ sono dimostrati nel Lemma 4.5.4, mentre per i Lemmi 4.5.6 e 4.5.5 si ha $\mathcal{H}^n(\mathcal{C}^0\mathcal{F}) = 0$ per ogni n ed ogni fascio \mathcal{F}

La solita successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0$$

dà una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow T^*\mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} T^*(\mathcal{C}^0\mathcal{F}) \xrightarrow{p} T^*\mathcal{F}^{(1)} \rightarrow 0$$

e quindi una successione esatta lunga di coomologia dalla quale si estraggono le successioni esatte

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^{(1)}) \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}(\mathcal{C}^0\mathcal{F}), \quad \forall n > 0.$$

La dimostrazione del passo induttivo è chiara. \square

Siccome la risoluzione cosimpliciale canonica è una risoluzione fiacca di \mathcal{F} , possiamo usarla per calcolare la coomologia di \mathcal{F} :

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker } d_n: T^n\mathcal{F}(X) \rightarrow T^{n+1}\mathcal{F}(X)}{d_{n-1}(T^{n-1}\mathcal{F}(X))}.$$

OSSERVAZIONE 4.5.8. Ripartendo da 0, si può definire la coomologia usando la risoluzione cosimpliciale canonica e ridimostrare tutte le principali proprietà in maniera analoga.

Anche se dal lato pratico la cosa non cambia, questo nuovo approccio è migliore dal punto di vista concettuale in quanto il tutto segue dalle proprietà formali dalla tripla (T, η, μ) e può essere considerato come un caso particolare di una teoria coomologica più generale.

Le terne (T, η, μ) (funtores+due trasformazioni naturali) che soddisfano alcuni assiomi modellati sui lemmi precedenti si chiamano *triple* oppure *monadi* e, cosa curiosa, hanno recentemente trovato importanti applicazioni in informatica e nell'analisi del software.

4.6. La successione esatta di Mayer-Vietoris

L'uso delle risoluzioni fiacche permette di dimostrare agevolmente la successione esatta di Mayer-Vietoris in coomologia dei fasci.

LEMMA 4.6.1. *Sia \mathcal{F} un fascio su spazio topologico X e siano $U, V \subset X$ aperti. Si ha una successione esatta*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U \cup V) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V) \xrightarrow{p} \mathcal{F}(U \cap V), \quad i(s) = (s|_U, s|_V), \quad p(r, t) = r_{U \cap V} - t_{U \cap V}.$$

Se \mathcal{F} è fiacco, allora p è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. (F3) implica i iniettiva; ovvio che $pi = 0$ e (F4) implica che l'immagine di i contiene nucleo di p . Se \mathcal{F} è fiacco entrambe le restrizioni $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V)$ e $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V)$ sono surgettive e a maggior ragione anche p è surgettivo. \square

Per semplicità notazionale, per ogni intero n denotiamo $H^n(U, \mathcal{F}) = H^n(U, \mathcal{F}|_U)$.

LEMMA 4.6.2. *Siano $U \subset X$ aperto e*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow \dots$$

una risoluzione fiacca di un fascio \mathcal{F} su X . Allora il complesso di gruppi abeliani

$$\mathcal{E}^0(U) \rightarrow \mathcal{E}^1(U) \rightarrow \mathcal{E}^2(U) \rightarrow \dots$$

calcola i gruppi di coomologia $H^(U, \mathcal{F})$.*

DIMOSTRAZIONE. La restrizione ad U preserva esattezza e fiacchezza, quindi

$$0 \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{E}|_U^0 \rightarrow \mathcal{E}|_U^1 \rightarrow \mathcal{E}|_U^2 \rightarrow \dots$$

è ancora una risoluzione fiacca. Per il teorema di de Rham astratto il complesso

$$\mathcal{E}|_U^0(U) \rightarrow \mathcal{E}|_U^1(U) \rightarrow \mathcal{E}|_U^2(U) \rightarrow \dots$$

calcola la coomologia di $\mathcal{F}|_U$: per finire basta notare che $\mathcal{E}|_U^n(U) = \mathcal{E}^n(U)$ per ogni n . \square

TEOREMA 4.6.3 (Mayer-Vietoris). *Sia \mathcal{F} un fascio su X . Per ogni coppia di aperti $U, V \subset X$ si ha successione esatta lunga*

$$0 \rightarrow H^0(U \cup V, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{F}) \oplus H^0(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U \cap V, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(U \cup V, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^n(U \cup V, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(U, \mathcal{F}) \oplus H^n(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(U \cap V, \mathcal{F}) \rightarrow H^{n+1}(U \cup V, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow \dots$$

una risoluzione fiacca. Per il Lemma 4.6.1 si hanno delle successione esatte corte di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^n(U \cup V) \xrightarrow{i} \mathcal{E}^n(U) \oplus \mathcal{E}^n(V) \xrightarrow{p} \mathcal{E}^n(U \cap V) \rightarrow 0, \quad n \geq 0,$$

che vuol dire una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^*(U \cup V) \xrightarrow{i} \mathcal{E}^*(U) \oplus \mathcal{E}^*(V) \xrightarrow{p} \mathcal{E}^*(U \cap V) \rightarrow 0,$$

e la tesi segue dal Lemma 4.6.2 e dalla successione esatta lunga di coomologia. \square

4.7. Coomologia di Čech per ricoprimenti

Iniziamo adesso un viaggio in tre tappe che ci permetterà di rendere calcolabile in alcuni casi concreti la coomologia dei fasci. Le tre tappe saranno:

- (1) coomologia di Čech per ricoprimenti;
- (2) teorema di Leray dei ricoprimenti aciclici;
- (3) riduzione alle cocatene alternanti e/o ordinate.

Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per una questione di semplicità di notazione, indicheremo

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}.$$

Il gruppo $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ delle q -cocatene di Čech sul ricoprimento \mathcal{U} a valori nel fascio \mathcal{F} è per definizione

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}), \quad q \geq 0.$$

In altri termini una q -cocatena è una famiglia di sezioni $c = (c_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$, con ciascun

$$c_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$$

al variare di $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in I$. La struttura di gruppo su $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è quella ovvia dedotta dalla legge di addizione sulle sezioni di \mathcal{F} .

Il differenziale di Čech $\delta: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è definito dalla formula

$$(4.2) \quad (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}} |_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}}.$$

In grado 0, se $c = \{c_\alpha\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}(U_\alpha)$, allora $\delta c \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$, dove per ogni coppia $\alpha, \beta \in I$ si ha

$$(4.3) \quad (\delta c)_{\alpha\beta} = c_\beta |_{U_{\alpha\beta}} - c_\alpha |_{U_{\alpha\beta}}.$$

In grado 1, se $c = \{c_{\alpha\beta}\} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})$ si ha $\delta c = \{(\delta c)_{\alpha\beta\gamma}\}$, con

$$(4.4) \quad (\delta c)_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma} |_{U_{\alpha\beta\gamma}} - c_{\alpha\gamma} |_{U_{\alpha\beta\gamma}} + c_{\alpha\beta} |_{U_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Per semplificare le notazioni è pratica usuale sottintendere l'operazione di restrizione e scrivere (4.2) nella forma semplificata:

$$(4.5) \quad (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}.$$

L'applicazione δ è un omomorfismo di gruppi (qui è **fondamentale** che i gruppi siano abeliani) ed il nome differenziale è motivato dal seguente lemma.

LEMMA 4.7.1. *Nelle notazioni precedenti $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Data una q -cocatena $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+2} \in I$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta^2 c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+2}} &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j (\delta c)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+2}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+2}} + \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{i=j+1}^{q+2} (-1)^{i+j-1} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{q+2}}. \end{aligned}$$

Scambiando i e j in una delle due sommatorie si vede facilmente che tutti i termini si cancellano a coppie. \square

Otteniamo così un complesso di cocatene $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$, chiamato il **complesso delle cocatene di Čech** del fascio \mathcal{F} sul ricoprimento \mathcal{U} . Alla solita maniera si definiscono i cocicli $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ed i cobordi $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

DEFINIZIONE 4.7.2. Il q -esimo gruppo di coomologia di Čech di \mathcal{F} relativo ad \mathcal{U} è

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^q(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = \frac{Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

LEMMA 4.7.3. *Nelle notazioni precedenti*

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è il gruppo degli 0 cocicli, ossia delle famiglie di sezioni $c_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ tali che $c_\beta|_{U_{\alpha\beta}} - c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = 0$ che per le proprietà F3 ed F4 corrispondono esattamente alle sezioni globali. Si noti che il lemma è equivalente all'esattezza della successione

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\epsilon} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad (\epsilon c)_\alpha = c|_{U_\alpha}.$$

\square

LEMMA 4.7.4. *Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X tale che $U_0 = X$ per un indice $0 \in I$. Allora $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni fascio \mathcal{F} su X ed ogni $n > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $c \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $n > 0$, un cociclo: in particolare per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in I$ si ha

$$0 = (\delta c)_{0\alpha_0 \dots \alpha_n} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} - \sum_{j=0}^n (-1)^j c_{0\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_n} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) = \mathcal{F}(U_{0\alpha_0 \dots \alpha_n})$$

e basta definire

$$b \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad b_{\beta_1 \dots \beta_n} = c_{0\beta_1 \dots \beta_n},$$

affinché $\delta b = c$. La definizione di b è ben posta in quanto per ipotesi $U_0 = X$. \square

Attenzione In generale per i gruppi di coomologia relativi a ricoprimenti non vale la successione esatta lunga di coomologia associata ad una successione esatta di fasci. Data una successione esatta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ ed un ricoprimento aperto \mathcal{U} , in generale non esiste alcuna successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) :$$

per convincersi di ciò basta applicare le precedenti osservazioni al ricoprimento formato dal solo aperto X .

Per poter applicare i risultati della Sezione 4.4 alla coomologia di Čech è utile poter considerare il complesso delle cocatene di Čech come sezioni globali di una risoluzione del fascio.

Si fissi un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X . Dato un aperto $U \subset X$ si ponga

$$\mathcal{U} \cap U = \{U_i \cap U\}_{i \in I},$$

ottenendo in questo modo un ricoprimento aperto di U . Si consideri ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il fascio di gruppi abeliani $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ che associa ad ogni aperto $U \subset X$, le n -cocatene di Čech di \mathcal{F} relative al ricoprimento $\mathcal{U} \cap U$:

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = C^n(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U) = \prod_{i_0, \dots, i_n} \mathcal{F}(U \cap U_{i_0 \dots i_n}).$$

I morfismi di restrizione sono ereditati dai morfismi di restrizione di \mathcal{F} . Per definizione, le sezioni globali $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$ di $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono esattamente le n -cocatene di Čech $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ di \mathcal{F} relative al ricoprimento \mathcal{U} . La medesima formula del differenziale di Čech definisce dei morfismi di fasci $\delta: \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tali che $\delta^2 = 0$.

Esiste un morfismo di fasci canonico

$$j: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

definito al modo seguente: per ogni aperto U , l'omomorfismo di gruppi

$$j_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_i \mathcal{F}(U \cap U_i)$$

ha come componenti i morfismi di restrizione: $j_U(s) = \{s|_{U \cap U_i}\}$, $i \in I$.

PROPOSIZIONE 4.7.5. *La successione di fasci*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

è esatta e quindi una risoluzione di \mathcal{F} , detta **risoluzione di Čech**.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ livello di j è immediata dagli assiomi di fascio, o se preferite dal Lemma 4.7.3.

Siano adesso $n > 0$, $x \in X$ e $f_x \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})_x$ un germe di cocatena annullato da δ .

Sia f_x rappresentato da una n -cocatena $f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$, per qualche U intorno aperto di x ; siccome $\delta f_x = 0$, a meno di restringere U possiamo supporre senza perdita di generalità che $\delta \in Z^n(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$ e $U \subset U_0$ per qualche $0 \in I$. Ma per il Lemma 4.7.4 il complesso $C^*(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$ non ha coomologia in gradi positivi. Dunque f è un cobordo in $C^*(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$ ed a maggior ragione f_x è un cobordo. \square

COROLLARIO 4.7.6. *Siano $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di X e \mathcal{F} un fascio fiacco su X . Allora*

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{per ogni } n > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $i_0, \dots, i_n \in I$ il fascio

$$U \mapsto \mathcal{F}(U \cap U_{i_0 \dots i_n})$$

è fiacco e quindi la risoluzione di Čech

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

è una risoluzione fiacca di \mathcal{F} . Per de Rham vale

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F}) \quad \forall n.$$

Per concludere basta ricordare che ogni fascio fiacco è aciclico aciclico. \square

Il Teorema 4.4.1 applicato alla risoluzione di Čech implica che esistono dei morfismi naturali $\alpha_n: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$, con α_0 un isomorfismo e α_1 iniettivo.

4.8. Cocatene di Čech alternanti ed ordinate

Se \mathcal{F} è un fascio su X e $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X , denotiamo con $C_a^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il sottogruppo delle q -**cocatene di Čech alternanti**, definito come il sottogruppo delle cocatene di Čech $c = \{c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}\}$ tali che

- (1) $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$ per qualche $i \neq j$;
- (2) $c_{\alpha_{\sigma(0)} \dots \alpha_{\sigma(q)}} = (-1)^\sigma c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ per ogni permutazione σ di $\{0, \dots, q\}$ di segnatura $(-1)^\sigma$.

OSSERVAZIONE 4.8.1. Il gruppo delle permutazioni è generato dalle trasposizioni di elementi adiacenti. Dunque una cocatena c è alternante se per ogni indice i vale:

$$c_{\dots \alpha_i \alpha_i \dots} = 0, \quad c_{\dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots} = -c_{\dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots}$$

Se il ricoprimento \mathcal{U} contiene n aperti non vuoti, allora $C_a^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q \geq n$.

È facile verificare che le cocatene alternanti sono preservate dal differenziale di Čech, nel senso che se $c \in C_a^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ allora

$$(\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}$$

è ancora alternante. Ad esempio se $\alpha_0 = \alpha_1$ si ha

$$(\delta c)_{\alpha_0 \alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} - c_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} + \sum_{i>0} \pm c_{\alpha_0 \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots}$$

ed i primi due addendi si cancellano a vicenda, gli altri sono nulli perché c alternante.

In altri termini, le cocatene alternanti definiscono un **sottocomplesso**

$$C_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Supponiamo adesso che l'insieme degli indici I sia dotato di un ordinamento totale \leq : sappiamo, per il lemma di Zorn, che ogni insieme possiede ordinamenti totali. Allora ogni q -cocatena alternante c è univocamente determinata dai valori $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ per $\alpha_0 < \dots < \alpha_q$ e risulta utile definire le q -cocatene ordinate come gli elementi del gruppo

$$C_{<}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}).$$

È immediato osservare che la medesima formula del differenziale di Čech δ ha senso anche per le cocatene ordinate

$$\delta: C_{<}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{<}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

e che se denotiamo con $p: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{<}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la proiezione sulle componenti indicizzate da successioni strettamente monotone di indici, allora $p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un morfismo di complessi ($p\delta = \delta p$).

Quindi il complesso $C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un **quoziente** di $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: non va dimenticato che per definire $C_{<}^*$ abbiamo avuto bisogno di aggiungere un elemento estraneo al dato iniziale e non univocamente definito.

Abbiamo già osservato che la composizione dei due morfismi di complessi

$$C_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

è un isomorfismo, e lo stesso vale passando ai rispettivi gruppi di coomologia

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccc} H_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \hookrightarrow & H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ & & \curvearrowright \simeq \end{array}$$

Abbiamo quindi dimostrato in particolare che per ogni fascio \mathcal{F} ed ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$:

- (1) il morfismo $H_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è iniettivo.
- (2) per ogni ordinamento totale sugli indici il morfismo $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è suriettivo.
- (3) se \mathcal{F} è fiacco, allora $H_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

ALLERTA SPOILER 4.8.2. Nelle prossime sezioni dimostreremo che tutti i morfismi in (4.6) sono isomorfismi, ossia che

$$H_a^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

ed a quel punto le notazioni provvisorie H_a^* , $H_{<}^*$ cesseranno di esistere e rimarrà in servizio solamente $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. La dimostrazione è abbastanza tecnica e laboriosa ed è didatticamente utile dare prima alcune semplici dimostrazioni di tale risultato in alcuni casi particolari, e tuttavia sufficienti in molte applicazioni geometriche. Molti autori, e.g. [9, 15], definiscono la coomologia di Čech usando direttamente le cocatene alternanti mentre noi siamo rimasti fedeli alla definizione classica di [3, 20].

PROPOSIZIONE 4.8.3. *Siano \mathcal{F} un fascio su X , e \mathcal{U} ricoprimento aperto di X . Allora*

$$(4.7) \quad H_a^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H_{<}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

per $n = 0$ ed $n = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare gli isomorfismi (4.7) è sufficiente dimostrare che l'omomorfismo $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H^n_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è iniettivo. Siccome $C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} C^{n-1}_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è surgettiva, anche $B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} B^n_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è surgettiva e quindi l'iniettività di $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H^n_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è del tutto equivalente alla condizione

$$\text{Ker } p \cap Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

che adesso andremo a verificare per $n = 0, 1$.

Per $n = 0$, siccome $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} C^0_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ bigettiva si ha $\text{Ker } p = 0$.

Per $n = 1$, sia $c \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; per ogni α si ha

$$0 = (\delta c)_{\alpha\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} - c_{\alpha\alpha} + c_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha}$$

e dunque, per ogni α, β :

$$c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} - c_{\beta\beta} = (\delta c)_{\beta\alpha\beta} = 0$$

Dunque ogni 1-cociclo è alternante di per sé, ossia $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset C^1_a(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e quindi $\text{Ker } p \cap Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. \square

TEOREMA 4.8.4 (Leray). *Siano \mathcal{F} un fascio su X , e $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di X . Si assuma che per un intero fissato $n \geq 0$ si abbia:*

$$H^j(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{per ogni} \quad 0 < j \leq n, \quad 0 \leq q \leq n - j, \quad i_0, \dots, i_q \in I.$$

Allora

$$H^p_a(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}) \quad \text{per ogni} \quad p = 0, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Induzione su n , con il caso $n = 0$ già dimostrato. Se $n > 0$ fissato; per l'ipotesi induttiva $H^p_a(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F})$ per ogni $p < n$ e basta quindi dimostrare che $H^n_a(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$.

Prendiamo una successione esatta corta di fasci $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ con \mathcal{G} fiacco.

Se $q < n - 1$ allora per ogni $0 < j \leq n - q - 1$ si ha una successione esatta

$$0 = H^j(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{G}) \rightarrow H^j(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{H}) \rightarrow H^{j+1}(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0$$

e quindi il fascio \mathcal{H} soddisfa le ipotesi del teorema per $n - 1$, da cui per induzione

$$H^p_a(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = H^p(X, \mathcal{H}) \quad \text{per ogni} \quad p = 0, \dots, n - 1.$$

Inoltre $H^n(X, \mathcal{G}) = 0$ ed abbiamo una successione esatta

$$H^{n-1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Dati $i_0, \dots, i_q \in I$ si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_q}} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_{i_0 \dots i_q}} \rightarrow \mathcal{H}|_{U_{i_0 \dots i_q}} \rightarrow 0.$$

Se $q < n$ allora $H^1(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0$ per ipotesi, e si ha una successione esatta

$$(4.8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow 0, \quad q < n,$$

mentre se $q \geq n$ si ha solamente l'esattezza a sinistra:

$$(4.9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{i_0 \dots i_q}) \rightarrow \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_q}), \quad q \geq n.$$

Il prodotto di tutte le successioni esatte (4.8) ed (4.9) al variare di tutte le successioni finite in I dà una successioni esatte di complessi di cocatene Čech:

$$(4.10) \quad 0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}),$$

con β surgettivo in grado $< n$.

Fissato un ordinamento totale su I , possiamo fare i prodotti di (4.8) ed (4.9) al variare di tutte le successioni finite e strettamente crescenti in I ed ottenere una successione esatta di complessi

$$0 \rightarrow C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{H}),$$

con γ surgettivo in grado $< n$.

Da questo momento occorre dimostrare separatamente gli isomorfismi $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$ e $H^n_{<}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$: le dimostrazioni sono del tutto simili e ne mostriamo qui solamente la prima.

Espandendo nei gradi $n-2, n-1, n$ la successione esatta (4.10) si ottiene un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
0 & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
0 & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{H})
\end{array}$$

che per il lemma del serpente ne induce un altro

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})} & \longrightarrow & \frac{C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})}{B^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})} & \longrightarrow & \frac{C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})}{B^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
0 & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{H})
\end{array}$$

sempre con le righe esatte. Di nuovo per il lemma del serpente, e per il fatto che $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0$ otteniamo una successione esatta

$$H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Quindi, siccome $H^i(X, \mathcal{G}) = H^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ per ogni i , separando il caso $n=1$ dal caso $n>1$ si ricava

$$\begin{aligned}
H^1(X, \mathcal{F}) &= \text{Coker}(H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H})), & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \text{Coker}(H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H})) \\
n > 1, & & H^n(X, \mathcal{F}) &= H^{n-1}(X, \mathcal{H}), & H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}),
\end{aligned}$$

e basta adesso applicare ipotesi induttiva

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = H^0(X, \mathcal{G}), \quad H^i(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = H^i(X, \mathcal{H}) \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

□

DEFINIZIONE 4.8.5. Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto. Diremo che \mathcal{U} è un ricoprimento aciclico (o di Leray) per \mathcal{F} se

$$H^j(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{per ogni } j > 0, \quad q \geq 0, \quad i_0, \dots, i_q \in I.$$

COROLLARIO 4.8.6 (teorema dei ricoprimenti aciclici di Leray). *Siano \mathcal{F} un fascio su X e $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di X aciclico per \mathcal{F} . Allora*

$$H_a^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza del Teorema 4.8.4. □

4.9. Omotopia di complessi e morfismi di raffinamento

In prospettiva della dimostrazione, nella prossima sezione, degli isomorfismi

$$H_a^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H_{<}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

nella loro piena generalità, richiamiamo la nozione di omotopia in algebra omologica.

Chiameremo, genericamente, complesso di cocatene un complesso di gruppi abeliani

$$\dots \rightarrow G^i \xrightarrow{d} G^{i+1} \xrightarrow{d} G^{i+2} \xrightarrow{d} \dots$$

indicizzati in apice dagli interi e con il differenziale di grado 1, ossia che aumenta gli indici di 1.

Un complesso di cocatene si dice aciclico se è una successione esatta, ossia se tutti i gruppi di coomologia nulli.

OSSERVAZIONE 4.9.1. Per definizione, un fascio \mathcal{F} su X è aciclico se e solo se il complesso

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^0 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^1 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^2 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{C}^3 \mathcal{F}(X) \rightarrow \dots$$

è aciclico.

DEFINIZIONE 4.9.2. Una **omotopia** di complessi di cocatene, scritta $h: C \rightarrow D[-1]$, è il dato di due complessi di cocatene C, D e di una successione $h = \{h_n\}$ di omomorfismi di gruppi

$$h_n: C^n \rightarrow D^{n-1},$$

(non si richiede alcuna regola di commutazione con i differenziali).

DEFINIZIONE 4.9.3. Una **contrazione** di un complesso di cocatene C è una omotopia $h: C \rightarrow C[-1]$ tale che $dh + hd = \text{Id}$: con ciò intendiamo che per ogni n vale

$$dh_n + h_{n+1}d = \text{Id}: C^n \rightarrow C^n.$$

Un complesso che possiede una contrazione si dice **contraibile**.

LEMMA 4.9.4. *Ogni complesso contraibile è aciclico, ossia con coomologia nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Sia C un complesso che possiede una contrazione $h: C \rightarrow C[-1]$ e sia $x \in Z^n(C)$. Allora, siccome $d(x) = 0$ a maggior ragione $hd(x) = 0$ e quindi

$$x = \text{Id}(x) = dh(x) + hd(x) = dh(x) \in B^n(C).$$

□

È generalmente falso che i complessi aciclici sono contraibili: ad esempio il complesso

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/(2) \rightarrow 0$$

è aciclico ma non è contraibile. Infatti ogni elemento di $\mathbb{Z}/(2)$ ha ordine finito, mentre \mathbb{Z} non ha elementi di ordine finito diversi da 0, da cui segue che l'unico omomorfismo $h: \mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbb{Z}$ è quello nullo. In particolare non esiste alcun omomorfismo $h: \mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che dh sia l'identità.

DEFINIZIONE 4.9.5. Due morfismi di complessi $f, g: (C, d) \rightarrow (D, \delta)$ si dicono **omotopi** se esiste una omotopia $h: C \rightarrow D[-1]$ tale che

$$f - g = \delta h + h d \iff f_n - g_n = \delta_{n-1} h_n + h_{n+1} d_n \quad \forall n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{d} & C^n & \xrightarrow{d} & C^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f-g & \swarrow h & \downarrow f-g & \swarrow h & \downarrow f & & \\ \dots & \longrightarrow & D^{n-1} & \xrightarrow{\delta} & D^n & \xrightarrow{\delta} & D^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

In particolare un complesso C è contraibile se e solo se Id_C è omotopa all'applicazione nulla.

OSSERVAZIONE 4.9.6. L'omotopia sopra definita è una relazione di equivalenza e per indicare che f, g sono omotope scriveremo $f \sim g$. Infatti, prendendo $h = 0$ si ottiene $f \sim f$; se $f - g = \delta h + h d$ allora ponendo $k_n = -h_n$ per ogni n si ha $g - f = \delta k + k d$; se $f - g = \delta h + h d$ e $g - l = \delta k + k d$, allora $f - l = \delta(h + k) + (h + k)d$.

LEMMA 4.9.7. *Due morfismi di complessi $f, g: C \rightarrow D$ omotopi inducono gli stessi morfismi in coomologia: se $f \sim g$, allora $f = g: H^n(C) \rightarrow H^n(D)$ per ogni n .*

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che se $f \sim g$ e $x \in Z^n(C)$, allora $f(x) - g(x) \in B^n(D)$. Siccome $dx = 0$ si ha

$$f(x) - g(x) = \delta h(x) + h d(x) = \delta h(x) \in \delta(D_{n-1}) = B^n(D).$$

□

DEFINIZIONE 4.9.8. Un morfismo di complessi $f: C \rightarrow D$ si dice un'**equivalenza omotopica** se esiste un morfismo di complessi $g: D \rightarrow C$ tale che la composizione $gf: C \rightarrow C$ è omotopa all'identità Id_C e $fg: D \rightarrow D$ è omotopa all'identità Id_D :

$$C \text{ omotopo a } D \iff \exists f, g, \quad fg \sim \text{Id}_D, \quad gf \sim \text{Id}_C.$$

LEMMA 4.9.9. *Le equivalenze omotopiche sono quasi-isomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: C \rightarrow D$ un'equivalenza omotopica. Per definizione esiste un morfismo di complessi $g: D \rightarrow C$ tale che $gf \sim \text{Id}_C$ e $fg \sim \text{Id}_D$. Per ogni n abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(C) & \xrightarrow{f} & H_n(D) \\ gf \downarrow & \swarrow g & \downarrow fg \\ H_n(C) & \xrightarrow{f} & H_n(D) \end{array}$$

e per il Lemma 4.9.7 le due frecce verticali sono le identità. Dunque f e g sono uno l'inverso dell'altro. \square

Un utile risultato che useremo spesso nel seguito è:

COROLLARIO 4.9.10. *Siano C un complesso di cocatene e $D \subset C$ un sottocomplesso. Se esiste una omotopia $h: C \rightarrow C[-1]$ tale che:*

- (1) $h(D) \subset D$;
- (2) $(dh + hd)x = x$ per ogni $x \in D$;

allora la proiezione $C \rightarrow C/D$ è una equivalenza omotopica e quindi induce un isomorfismo in coomologia: $H^n(C) = H^n(C/D)$ per ogni n .

DIMOSTRAZIONE. Sia $p: C \rightarrow C/D$ la proiezione. Osserviamo che siccome $h(D) \subset D$, l'omotopia h fattorizza al quoziente $\bar{h}: C/D \rightarrow C/D[-1]$, $ph = \bar{h}p$. Il morfismo

$$f = \text{Id}_C - dh - hd: C \rightarrow C$$

è un morfismo di complessi: infatti, siccome $d^2 = 0$ si ha

$$\begin{aligned} df &= d(\text{Id} - dh - hd) = d - d^2h - dh d = d - dh d \\ &= d - dh d - hd^2 - d = (\text{Id} - dh - hd)d = fd. \end{aligned}$$

Per ipotesi $f(D) = 0$ e quindi $f = gp$ per un opportuno morfismo di complessi $g: C/D \rightarrow C$. Dall'uguaglianza

$$pf = p(\text{Id} - dh - hd) = (\text{Id} - \bar{h}d - d\bar{h})p$$

e dalla surgettività di p segue che $pg = \text{Id} - \bar{h}d - d\bar{h}$, mentre dall'uguaglianza $gp = f$ segue $\text{Id}_C - gp = dh + hd$. Abbiamo dimostrato che p è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica g . \square

COROLLARIO 4.9.11. *Sia $p: C \rightarrow E$ un morfismo surgettivo di complessi di cocatene con nucleo $D = \text{Ker } p \subset C$. Se esiste una omotopia $h: C \rightarrow C[-1]$ tale che:*

- (1) $h(D) \subset D$;
- (2) $(dh + hd)x = x$ per ogni $x \in D$;

allora p è una equivalenza omotopica con inversa la fattorizzazione ad E del morfismo $\text{Id} - dh - hd: C \rightarrow C$. In particolare $p: H^n(C) \rightarrow H^n(E)$ è un isomorfismo per ogni n .

È chiaro che l'isomorfismo in coomologia $p: H^n(C) \rightarrow H^n(E)$ del lemma precedente segue anche dalla successione esatta lunga di coomologia assieme al Lemma 4.9.4.

Come prima applicazione delle precedenti osservazioni mostriamo che i morfismi di raffinamento sono ben definiti in coomologia di Čech. Sia $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ un altro ricoprimento aperto di X **più fine** di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Più fine significa che esiste (almeno) una **funzione di raffinamento** $\rho: J \rightarrow I$ tale che $V_\beta \subset U_{\rho(\beta)}$ per ogni $\beta \in J$.

Scelta una funzione di raffinamento ρ , per ogni fascio \mathcal{F} possiamo definire in maniera naturale un morfismo di complessi

$$\rho^*: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

come

$$(4.11) \quad (\rho^*c)_{\beta_0 \dots \beta_q} = c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_q)}|_{V_{\beta_0 \dots \beta_q}},$$

con la proprietà di commutazione $\delta\rho^* = \rho^*\delta$ di immediata verifica.

Il problema che si pone è che ρ^* dipende non solo dai ricoprimenti \mathcal{U}, \mathcal{V} ma anche dalla funzione di raffinamento. Se $\eta: J \rightarrow I$ è un'altra funzione di raffinamento in generale $\rho^* \neq \eta^*$. Per fortuna si ha:

TEOREMA 4.9.12. *Nelle notazioni precedenti i due morfismi di complessi*

$$\rho^*, \eta^*: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

sono omotopi e quindi

$$\rho^* = \eta^*: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Una possibile omotopia esplicita $h: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})[-1]$ è data dalle applicazioni

$$h: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

$$(hc)_{\beta_0 \dots \beta_{q-1}} = \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \eta(\beta_{q-1})} |_{V_{\beta_0 \dots \beta_{q-1}}}.$$

Data $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $\beta_0, \dots, \beta_q \in J$ si ha

$$\begin{aligned} (h\delta c)_{\beta_0 \dots \beta_q} &= \sum_{j=0}^q (-1)^j (\delta c)_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \eta(\beta_q)} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} c_{\dots \widehat{\rho(\beta_i)} \dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \eta(\beta_q)} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q} (-1)^{i+j+1} c_{\dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \widehat{\eta(\beta_i)} \dots \eta(\beta_q)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta hc)_{\beta_0 \dots \beta_q} &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (hc)_{\beta_0 \dots \widehat{\beta_i} \dots \beta_q} \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} c_{\dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \widehat{\eta(\beta_i)} \dots \eta(\beta_q)} + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} c_{\dots \widehat{\rho(\beta_i)} \dots \rho(\beta_j) \eta(\beta_j) \dots \eta(\beta_q)}; \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (\delta hc + h\delta c)_{\beta_0 \dots \beta_q} &= \sum_{i=0}^q c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_{i-1}) \eta(\beta_i) \dots \eta(\beta_q)} - c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_i) \eta(\beta_{j+1}) \dots \eta(\beta_q)} \\ &= c_{\eta(\beta_0) \dots \eta(\beta_q)} - c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_q)}. \end{aligned}$$

□

Notiamo che se c è una cocatena alternante, allora $\rho^*(c)$ è alternante, ma hc in generale non è alternante. Questo è un altro motivo che ci fa preferire le cocatene di Čech originali a quelle alternanti. Similmente, in caso di ordinamenti totali sugli indici, ρ^* trasforma cocatene ordinate in cocatene ordinate se e solo se ρ è strettamente monotona (e quindi iniettiva).

4.10. Cocatene tutte vs. cocatene alternanti

Siano \mathcal{F} fascio su X ; $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$, ricoprimento aperto di X e \leq ordinamento totale su I . Abbiamo definito un morfismo surgettivo di complessi

$$p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*_{\leq}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}), \quad C^n_{\leq}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n})$$

e vogliamo dimostrare:

TEOREMA 4.10.1. *Nelle notazioni precedenti il morfismo di complessi $p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*_{\leq}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ induce isomorfismi in coomologia:*

$$p: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H^n_{\leq}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \text{per ogni } n.$$

La dimostrazione è divisa in lemmi: nel primo imitiamo la costruzione di $C_{<}^*$ per le successioni non decrescenti di indici definendo, per ogni n :

$$C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}).$$

La solita formula del differenziale di Čech δ definisce un complesso

$$C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : C_0^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_0^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_0^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

ed il morfismo p si fattorizza come composizione di due proiezioni naturali

$$p: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{q} C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

LEMMA 4.10.2. *Il morfismo surgettivo di complessi $C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{q} C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è una equivalenza omotopica, quindi un isomorfismo in coomologia.*

DIMOSTRAZIONE. Sia D^* il nucleo di q , ossia

$$D^n = \{c \in C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \quad \forall \alpha_0 < \dots < \alpha_n\}$$

e consideriamo l'omotopia

$$h: C_0^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_0^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

dove per $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n$ e $c \in C_0^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si pone

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \text{ se } \alpha_0 < \dots < \alpha_n.$$

Altrimenti, se $0 \leq k < n$ denota il più piccolo intero tale che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ si definisce

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = (-1)^k c_{\alpha_0 \dots \alpha_k \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}.$$

Ad esempio:

$$(hc)_{1234} = 0, \quad (hc)_{1223} = -c_{12223}, \quad (hc)_{1133} = c_{11133}.$$

È immediato osservare che $h(D^*) \subset D^*$; per il Corollario 4.9.11 basta dimostrare che $h\delta + \delta h$ è identità su D^* . Si noti che $D^0 = 0$. Siano $c \in D^n$, $n > 0$ e $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n$ fissati.

Se $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$ vale

$$(\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \sum_i \pm (hc)_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots} = 0, \quad (h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0$$

e quindi

$$(\delta h + h\delta)c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 = c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}.$$

Altrimenti sia $0 \leq k < n$ il più piccolo intero tale che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$; siccome $(hc)_{\dots \widehat{\alpha_k} \alpha_{k+1} \dots} = (hc)_{\dots \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \dots}$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^i (hc)_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k-1} c_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_k \alpha_k \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^{i+k} (hc)_{\dots \alpha_k \alpha_k \dots \widehat{\alpha_i} \dots} \end{aligned}$$

Dato che $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ si ha

$$(-1)^k c_{\dots \widehat{\alpha_k} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots} + (-1)^{k+1} c_{\dots \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \alpha_{k+1} \dots} + (-1)^{k+2} c_{\dots \alpha_k \alpha_k \widehat{\alpha_{k+1}} \dots} = (-1)^k c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} &= (-1)^k (\delta c)_{\dots \alpha_k \alpha_k \alpha_{k+1} \dots} \\ &= c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k} c_{\dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_k \alpha_k \dots} + \sum_{i=k+2}^n (-1)^{i+k+1} (hc)_{\dots \alpha_k \alpha_k \dots \widehat{\alpha_i} \dots} \end{aligned}$$

In conclusione:

$$(h\delta + \delta h)c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}.$$

□

Estendiamo ora la costruzione precedente ad una serie di complessi $C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $k \in \mathbb{N}$, ponendo

$$C_k^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}),$$

$$\triangleleft = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in I \mid \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-k}\}.$$

La solita formula del differenziale di Čech definisce un complesso

$$C_k^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_k^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C_k^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

e le proiezioni canoniche

$$q_k: C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad \widehat{q}_k: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

sono morfismi di complessi. Siccome $C_k^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni $k \geq n$, ne segue che q_k e \widehat{q}_k inducono isomorfismi tra i rispettivi H^n per ogni $k > n$.

LEMMA 4.10.3. *Per ogni $k \geq 0$ la proiezione $q_k: C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un'equivalenza omotopica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $k \geq 0$ fissato e denotiamo con $D^* \subset C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il nucleo di q_k .

$$D^n = \{c \in \prod_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_n \\ \alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_{n-k-1}}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) \mid c_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \text{ se } \alpha_{n-k-1} \leq \alpha_{n-k}\}.$$

Si noti che $D^n = 0$ se $n \leq k$. Definiamo adesso una omotopia $h: C_{k+1}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{k+1}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $n \geq 0$, che soddisfa ipotesi del Corollario 4.9.11.

Dati $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ con $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_{n-k-1}$ e $c \in C_{k+1}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ si definisce

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = 0 \text{ se } k > n,$$

mentre se $n - k \geq 0$ si inserisce un doppio dell'indice $n - k$ in posizione j nel modo seguente:

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1} \alpha_{n-k} \alpha_j \dots \alpha_{n-k} \dots}$$

dove $0 \leq j \leq n - k$ è il più piccolo indice tale che $\alpha_{n-k} \leq \alpha_j$ (quindi $\alpha_{j-1} < \alpha_{n-k}$ se $j > 0$).

Si noti che se $\alpha_{n-k-1} \leq \alpha_{n-k}$ allora

$$(hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \pm c_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-k-1} \alpha_{n-k} \alpha_{n-k} \dots}$$

che si annulla se $c \in D^{n+1}$ (i primi $n - k + 2$ indici sono crescenti). Quindi $h(D^{n+1}) \subset D^n$

Esempio:

$$k = 0: \quad (hc)_{011} = -c_{0111}, \quad (hc)_{120} = c_{0120}, \quad (hc)_{021} = -c_{0121}$$

$$k = 1: \quad (hc)_{012} = -c_{0112}, \quad (hc)_{210} = c_{1210}, \quad (hc)_{221431} = -c_{2213431}$$

Abbiamo già osservato che $h(D^*) \subset D^*$. Bisogna dimostrare che h è una contrazione su D^* , ossia che $(h\delta + \delta h)c = c$ per ogni $c \in D^*$. Sia $c \in D^p$ fissato (con $p > k$) e siano $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ con $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_{p-k-1}$. Sia $0 \leq j \leq p - k$ più piccolo indice tale che $\alpha_{p-k} \leq \alpha_j$.

$$\begin{aligned} (h\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= (-1)^j (\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1} \alpha_{p-k} \alpha_j \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p-k} \alpha_j \dots \alpha_p} + c_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=j}^{p-k-1} (-1)^{i+j+1} c_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-k} \alpha_j \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \end{aligned}$$

La sommatoria arriva fino a $p - k - 1$ perché $c \in D^n$ e quindi gli addendi di indice $i \geq p - k$ si annullano. Inoltre

$$(\delta hc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i (hc)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^{p-k-1} (-1)^i (hc)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}$$

dato che $hc \in D^{p-1}$ e si annulla quando i primi $p-1-k$ indici sono ordinati. Adesso

$$\sum_{i=0}^{p-k-1} (-1)^i (hc)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j-1} c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p-k} \alpha_j \dots \alpha_p} + \sum_{i=j}^{p-k-1} (-1)^{i+j} c_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-k} \alpha_j \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_p}$$

e facendo le somme si ha che $h\delta + \delta h = \text{Id}_D$. \square

Dai lemmi precedenti segue per ogni n una successione di isomorfismi $\dots H^n(C_{k+1}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^n(C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \dots H^n(C_1^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^n(C_0^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} H^n(C_{<}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ e per concludere basta ricordare che $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C_k^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per ogni $k \geq n$ e quindi

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^n(C_k^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

per ogni $k > n$. Il Teorema 4.10.1 è dimostrato.

4.11. Coomologia ed applicazioni continue

In questa sezione vediamo come si comportano i gruppi di coomologia rispetto ai funtori immagine diretta ed inversa di fasci.

Data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$, nella Sezione 3.7 Risulta quindi ben definito un funtore **immagine diretta**

$$f_*: \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Shv}(Y)$$

ponendo, per ogni fascio \mathcal{F} su X ed ogni aperto $V \subset Y$ $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. È dunque immediato osservare che se \mathcal{F} è un fascio fiacco su X , allora $f_*\mathcal{F}$ è fiacco su Y . Purtroppo, siccome f_* non è in generale un funtore esatto, in generale non trasforma risoluzioni fiacche in risoluzioni fiacche. Come nel Lemma 3.7.3 si ha una eccezione per le immersioni chiuse.

PROPOSIZIONE 4.11.1. *Sia $i: D \hookrightarrow X$ una immersione chiusa. Allora per ogni fascio \mathcal{F} su D e per ogni intero $n \geq 0$ si ha*

$$H^n(D, \mathcal{F}) = H^n(X, i_*\mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots$ una risoluzione fiacca di \mathcal{F} su D , ad esempio la risoluzione canonica. Siccome i è una immersione chiusa, come conseguenza del Lemma 3.7.3 la successione

$$0 \rightarrow i_*\mathcal{F} \rightarrow i_*\mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} i_*\mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots$$

è ancora esatta ed i fasci $i_*\mathcal{E}^n$ sono fiacchi. Per concludere basta osservare che

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{E}^n) = \Gamma(D, \mathcal{E}^n)$$

per ogni n ed applicare il teorema di de Rham delle risoluzioni acicliche. \square

Quando guardiamo al funtore immagine inversa la situazione diventa in un certo senso speculare. Infatti, mentre f_* preserva sezioni globali e fiacchezza ma non spighe ed esattezza; viceversa il funtore f^{-1} preserva spighe ed esattezza ma non fiacchezza e sezioni globali.

Se \mathcal{F} è un fascio su Y , applicando il funtore esatto f^{-1} alla risoluzione canonica di \mathcal{F} otteniamo una successione esatta di fasci su X

$$0 \rightarrow f^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{i} f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \dots$$

ossia una risoluzione di $f^{-1}\mathcal{F}$, che però non è in generale la risoluzione canonica, e nemmeno aciclica.

Tuttavia, e fortunatamente, vale:

TEOREMA 4.11.2. *Siano $f: X \rightarrow Y$ continua, \mathcal{F} un fascio su Y e \mathcal{G} fascio su X . Allora ogni morfismo $\alpha: f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si estende in maniera canonica ad un morfismo di risoluzioni*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{i} & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} & \xrightarrow{d_0} & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} & \xrightarrow{d_1} & f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{C}^1\mathcal{G} & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{C}^2\mathcal{G} & \xrightarrow{d_2} & \dots \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 3.7.13 il morfismo α si estende naturalmente ad un diagramma commutativo naturale con righe esatte

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \end{array}$$

che, ricordando la costruzione ricorsiva della risoluzione canonica, si estende ad un morfismo di successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F}^{(1)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(1)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con la riga superiore esatta in virtù dell'esattezza del funtore f^{-1} . Basta adesso rifare il tutto per il morfismo verticale più a destra e procedere ricorsivamente. \square

COROLLARIO 4.11.3. *Siano $f: X \rightarrow Y$ continua e \mathcal{F} un fascio su Y . Allora esiste un morfismo naturale di risoluzioni*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{i} & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} & \xrightarrow{d_0} & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} & \xrightarrow{d_1} & f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{d_2} & \dots \end{array}$$

Il corollario precedente, assieme ai morfismi naturali

$$f^\#: \Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{F})$$

permette di definire, per ogni applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ ed ogni fascio \mathcal{F} su Y , dei morfismi naturali di gruppi di coomologia

$$f^*: H^n(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}).$$

Passando alle sezioni globali otteniamo due morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(Y, \mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(Y, \mathcal{C}^0\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(Y, \mathcal{C}^1\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(Y, \mathcal{C}^2\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \Gamma(X, \mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

la cui composizione induce in coomologia i morfismi desiderati

$$f^*: H^n(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}).$$

Senza entrare in dettagli abbastanza “boring”, spero che nessuno abbia dubbi sulla functorialità di tale costruzione, ossia che per ogni coppia di applicazioni continue $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow X$, ogni n ed ogni fascio \mathcal{F} su Y si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}) \\ & \searrow (fg)^* & \downarrow g^* \\ & & H^n(Z, (fg)^{-1}\mathcal{F}) \end{array}$$

Riepilogando, data $f: X \rightarrow Y$ continua e \mathcal{F} fascio su Y abbiamo definito i morfismi $f^*: H^n(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, f^{-1}\mathcal{F})$ usando i seguenti ingredienti:

- (1) per ogni fascio \mathcal{G} su Y ed ogni aperto $V \subset Y$ esiste un morfismo naturale di gruppi abeliani

$$f^\# : \mathcal{G}(V) \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)).$$

- (2) esiste un morfismo naturale di risoluzioni di $f^{-1}\mathcal{F}$

$$f^{-1}\mathcal{C}^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^*f^{-1}\mathcal{F}.$$

Di norma il primo punto è abbastanza comprensibile, ad esempio quando \mathcal{F} è un fascio costante $f^\#$ è dato dalla composizione con f , mentre il secondo può essere di difficile digestione. Possiamo però usare un ragionamento alternativo: si consideri una qualunque successione esatta di fasci su Y

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

con \mathcal{G} aciclico (e.g. fiacco). Il funtore f^{-1} è esatto e si ha un'altra successione esatta

$$0 \rightarrow f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f^{-1}\mathcal{H} \rightarrow 0$$

di fasci su X (attenzione che $f^{-1}\mathcal{G}$ non è aciclico in generale, nemmeno quando \mathcal{G} è $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$).

Allora si ha un diagramma commutativo con le righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(Y, \mathcal{G}) & \xrightarrow{g} & H^0(Y, \mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(Y, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# & & \\ H^0(X, f^{-1}\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(X, f^{-1}\mathcal{H}) & \longrightarrow & H^1(X, f^{-1}\mathcal{F}) & & \end{array}$$

e la freccia tratteggiata esiste ed è unica per la proprietà universale del conucleo.

Abbiamo quindi definito il morfismo tra gli H^1 . Per gruppi di coomologia di ordine superiore basta agire in maniera ricorsiva osservando che $H^{n-1}(Y, \mathcal{H}) \simeq H^n(Y, \mathcal{F})$ e che esiste un morfismo naturale di connessione $H^{n-1}(X, f^{-1}\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^n(X, f^{-1}\mathcal{F})$.

OSSERVAZIONE 4.11.4. Se $f: X \rightarrow Y$ continua e \mathcal{F} fascio su Y abbiamo visto che possiamo interpretare $f^\#$ come un morfismo di fasci

$$f^\# : \mathcal{F} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{F}.$$

Siccome f_* preserva le sezioni globali si hanno delle identificazioni canoniche

$$H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}) = H^n(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet f^{-1}\mathcal{F})) = H^n(\Gamma(Y, f_*\mathcal{C}^\bullet f^{-1}\mathcal{F}))$$

e f^* è indotto in coomologia dal morfismo di complessi di cocatene

$$\Gamma(Y, \mathcal{C}^\bullet\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(Y, f_*\mathcal{C}^\bullet f^{-1}\mathcal{F})$$

indotto a sua volta dal morfismo di complessi di fasci fiacchi

$$\mathcal{C}^\bullet\mathcal{F} \xrightarrow{f^\#} f_*f^{-1}\mathcal{C}^\bullet\mathcal{F} \xrightarrow{f_*\alpha} f_*\mathcal{C}^\bullet f^{-1}\mathcal{F}$$

dove α è il morfismo di risoluzioni definito nel Corollario 4.11.3.

OSSERVAZIONE 4.11.5 (di par condicio). Se \mathcal{G} è un fascio su X esiste un morfismo naturale di fasci

$$\tau : f^{-1}f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}.$$

Tale morfismo è la restrizione (dettagli per esercizio) del morfismo

$$\tau : \mathcal{C}^0 f^{-1}f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}^0\mathcal{G}$$

definito come il prodotto diretto dei morfismi di spighe

$$\tau_x : (f_*\mathcal{G})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{G}_x, \quad x \in X.$$

Ciascun τ_x è indotto dai morfismi di localizzazione

$$(f_*\mathcal{G})(V) = \mathcal{G}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{G}_x, \quad f(x) \in V \text{ aperto.}$$

Ne segue che esistono dei morfismi in coomologia

$$H^n(Y, f_*\mathcal{G}) \xrightarrow{f^\#} H^n(X, f^{-1}f_*\mathcal{G}) \xrightarrow{\tau} H^n(X, \mathcal{G}).$$

4.12. Invarianza omotopica della coomologia a coefficienti costanti

Per ogni gruppo abeliano G ed ogni spazio topologico X useremo la notazione semplificata $H^*(X, G)$ per indicare la coomologia del fascio costante G_X . Siccome $f^{-1}G_Y = G_X$ per ogni applicazione continua $f: X \rightarrow Y$, si hanno degli omomorfismi di gruppi

$$f^*: H^n(Y, G) \rightarrow H^n(X, G) .$$

DEFINIZIONE 4.12.1. Diremo che un fascio \mathcal{F} su X è **quasi fiacco** se per ogni $x \in X$ l'applicazione $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_x$ è surgettiva.

Ogni fascio fiacco è anche quasi fiacco; i fasci G_X di funzioni localmente costanti sono quasi fiacchi ma non sono fiacchi in generale. Se $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo surgettivo di fasci e \mathcal{F} è quasi fiacco, allora anche \mathcal{G} è quasi fiacco.

Richiamiamo ora due teoremi di topologia generale (vedi [18]) che ci serviranno successivamente.

TEOREMA 4.12.2 (Teorema del numero di Lebesgue). *Ogni ricoprimento aperto \mathcal{A} di uno spazio metrico compatto (X, d) ammette un numero di Lebesgue, cioè un numero reale $\delta > 0$ tale che ogni sottoinsieme di diametro minore di δ è contenuto in qualche elemento di \mathcal{A} .*

Ricordiamo che il diametro è l'estremo superiore delle distanze tra coppie di punti del sottoinsieme.

TEOREMA 4.12.3 (Teorema di Wallace). *Siano S e T spazi topologici. Se A e B sono sottospazi compatti di S e T rispettivamente, allora gli aperti della forma $U \times V$, dove U è un aperto di S contenente A e V è un aperto di T contenente B , sono una base per gli intorni $A \times B$ in $S \times T$ (cioè per ogni aperto Ω di $S \times T$ contenente $A \times B$ esistono U, V come sopra tali che sia $A \times B \subseteq U \times V \subseteq \Omega$).*

Ora siamo pronti per enunciare e dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 4.12.4. *Siano X uno spazio topologico, $p: X \times [0, 1] \rightarrow X$ la proiezione e*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una successione esatta di fasci su $X \times [0, 1]$. Se \mathcal{F} è quasi fiacco, allora la successione

$$0 \rightarrow p_*\mathcal{F} \xrightarrow{p_*i} p_*\mathcal{G} \xrightarrow{p_*q} p_*\mathcal{H} \rightarrow 0$$

è esatta su X .

DIMOSTRAZIONE. A meno di identificare \mathcal{F} con la sua immagine, non è restrittivo supporre $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ed i il morfismo di inclusione.

Per ogni aperto $U \subset X$ la successione

$$0 \rightarrow p_*\mathcal{F}(U) \xrightarrow{p_*i} p_*\mathcal{G}(U) \xrightarrow{p_*q} p_*\mathcal{H}(U)$$

coincide, per definizione di p_* , con

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(p^{-1}(U)) \xrightarrow{i} \mathcal{G}(p^{-1}(U)) \xrightarrow{q} \mathcal{H}(p^{-1}(U))$$

ed è quindi esatta. Per il Lemma 3.3.14 basta quindi dimostrare che il morfismo $p_*\mathcal{G} \xrightarrow{p_*q} p_*\mathcal{H}$ è surgettivo.

Siano $x \in X$ e $s_x \in (p_*\mathcal{H})_x$ fissati e scegliamo un intorno aperto $x \in U$ ed una sezione $s \in (p_*\mathcal{H})(U) = \mathcal{H}(U \times [0, 1])$ che rappresenta il germe s_x . Vogliamo dimostrare che esiste un aperto $x \in U' \subset U$ tale che la sezione $s|_{U'}$ si solleva a $p_*\mathcal{G}(U')$.

Per ogni $t \in [0, 1]$ esiste un intorno aperto di (x, t) in $U \times [0, 1]$ dove la sezione s si solleva ad una sezione di \mathcal{G} . Al variare di t , Tali aperti ricoprono lo spazio metrico compatto $\{x\} \times [0, 1]$; per il teorema del numero di Lebesgue possiamo trovare un intero n aperti $V_1, \dots, V_n \subset U \times [0, 1]$ ed n sezioni $h_i \in \mathcal{G}(V_i)$ tali che per ogni indice $i = 1, \dots, n$ vale:

- (1) $f(h_i) = s|_{V_i}$;
- (2) $\{x\} \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \subset V_i \subset U \times [0, 1]$.

Per il teorema di Wallace si ha

$$\{x\} \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \subset U_i \times A_i \subset V_i$$

dove U_i è un intorno aperto di x e A_i è un intorno aperto di $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$. Essendo gli A_i in numero finito non è restrittivo supporre

$$A_i = [0, 1] \cap \left] \frac{i-1}{n} - \epsilon, \frac{i}{n} + \epsilon \right[$$

per un opportuno $\epsilon > 0$, ed a meno di restringere U possiamo supporre $U_i = U$ per ogni i . A meno di ridurre ϵ possiamo anche supporre $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $|i - j| \geq 2$.

Siccome $q(h_i - h_{i+1}) = 0$, ne segue che $h_i - h_{i+1} \in \mathcal{F}(U \times (A_i \cap A_{i+1}))$ e siccome i morfismi $\mathcal{F}(U \times [0, 1]) \rightarrow \mathcal{F}_{(x, i/n)}$ sono surgettivi, a meno di restringere U e ridurre ϵ possiamo supporre che esistano $r_i \in \mathcal{F}(U \times [0, 1])$ tali che

$$r_i|_{U \times A_i \cap A_{i+1}} = h_i - h_{i+1} \in \mathcal{G}(U \times (A_{i+1} \cap A_i)).$$

A meno di sostituire h_i con $h_i + (r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1})$ si ha che le sezioni h_i coincidono sulle doppie intersezioni e quindi definiscono una sezione h di \mathcal{G} sull'aperto $U \times [0, 1]$. Chiaramente $h \in p_*\mathcal{G}(U)$ e $p_*q(h) = s$. \square

COROLLARIO 4.12.5. *Siano X uno spazio topologico e $p: X \times [0, 1] \rightarrow X$ la proiezione. Allora per ogni successione esatta*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \rightarrow \dots$$

di fasci quasi fiacchi su $X \times [0, 1]$, la successione

$$0 \rightarrow p_*\mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} p_*\mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} p_*\mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} p_*\mathcal{F}_3 \rightarrow \dots$$

è esatta su X .

DIMOSTRAZIONE. Spezzare in successioni esatte corte ed usare il teorema precedente. \square

Per uso futuro osserviamo che le ipotesi del Corollario 4.12.5 sono soddisfatte in particolare dalle risoluzioni canoniche dei fasci costanti su $X \times [0, 1]$.

COROLLARIO 4.12.6. *Siano $p: X \times [0, 1] \rightarrow X$ la proiezione e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n il morfismo*

$$p^*: H^n(X, G) \rightarrow H^n(X \times [0, 1], G)$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo per semplicità notazionale $Y = X \times [0, 1]$ e mostriamo che il morfismo naturale di fasci

$$p^\#: G_X \rightarrow p_*p^{-1}G_X$$

è un isomorfismo. Abbiamo già osservato che $p^{-1}G_X = G_Y$, quindi $H^*(Y, G) = H^*(Y, p^{-1}G_X)$, e che $p^\#: G_X \rightarrow p_*G_Y$ è dato dalla composizione con p . Dalla surgettività di p segue che $p^\#$ è iniettiva; viceversa, siano $U \subset X$ un aperto e $f \in p_*G_Y(U)$, ossia $f: U \times [0, 1] \rightarrow G$ localmente costante. Siccome le fibre di p sono connesse esiste, ed è unica, una funzione $g: U \rightarrow G$ tale che $f = gp$; per finire, siccome p è un'applicazione aperta, dal fatto che f è localmente costante segue che anche g è localmente costante.

Il Corollario 4.12.5 applicato alla risoluzione canonica del fascio $G_Y = p^{-1}G_X$ dà una successione esatta di fasci su X

$$0 \rightarrow p_*p^{-1}G_X \rightarrow p_*\mathcal{C}^0p^{-1}G_X \rightarrow p_*\mathcal{C}^1p^{-1}G_X \rightarrow p_*\mathcal{C}^2p^{-1}G_X \rightarrow \dots$$

che è anche una risoluzione fiacca.

Per l'Osservazione 4.11.4 il morfismo p^* è indotto considerando coomologia e sezioni globali del morfismo di complessi di fasci fiacchi

$$\beta: \mathcal{C}^\bullet G_X \xrightarrow{p^\#} p_*p^{-1}\mathcal{C}^\bullet G_X \xrightarrow{f_*\alpha} p_*\mathcal{C}^\bullet p^{-1}G_X.$$

Per il Corollario 4.12.5 $p_*\mathcal{C}^\bullet p^{-1}G_X$ è una risoluzione fiacca del fascio $p_*p^{-1}G_X$ e quindi per il teorema di de Rham si hanno dei diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet G_X)) & \xlongequal{\quad} & H^n(X, G_X) \\
 \downarrow \beta & & \simeq \downarrow p^\# \\
 H^n(\Gamma(X, p_* \mathcal{C}^\bullet p^{-1} G_X)) & \xrightarrow{\simeq} & H^n(X, p_* p^{-1} G_X) \\
 & \searrow & \downarrow p^* \\
 & & H^n(\Gamma(Y, \mathcal{C}^\bullet p^{-1} G_X)) \xlongequal{\quad} H^n(Y, G)
 \end{array}$$

□

COROLLARIO 4.12.7. *Siano $f, g: X \rightarrow Y$ due applicazioni omotope e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n si ha:*

$$f^* = g^*: H^n(Y, G) \rightarrow H^n(X, G).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$; conviene scrivere $f = Fi$ e $g = Fj$, dove

$$i, j: X \rightarrow X \times [0, 1], \quad i(x) = (x, 0), \quad j(x) = (x, 1).$$

Siccome $f^* = i^* F^*$, $g^* = j^* F^*$ basta dimostrare che

$$i^* = j^*: H^n(X \times [0, 1], G) \rightarrow H^n(X, G).$$

Basta adesso osservare che $pi = pj$, dunque $i^* p^* = j^* p^*$, e che p^* è un isomorfismo. □

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice **contraibile** se esiste un'applicazione continua

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

tale che $F(x, 0) = x$ per ogni $x \in X$ e $F(-, 1)$ è costante. Ad esempio, ogni sottospazio convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è contraibile: basta infatti scegliere un qualsiasi punto $y \in X$ e considerare l'applicazione

$$F(x, t) = (1 - t)x + ty.$$

COROLLARIO 4.12.8. *Siano X uno spazio contraibile e G un gruppo abeliano. Allora vale*

$$H^0(X, G) = G, \quad H^n(X, G) = 0 \quad \forall n > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per far vedere che $H^0(X, G) = G$ basta notare che poiché lo spazio è connesso $\Gamma(X, G_X) = G$.

Per $n > 0$ sappiamo per ipotesi che esistono un punto $p \in X$ ed un'applicazione continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tali che $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = p$ per ogni $x \in X$. Ciò significa che, indicando con $i: \{p\} \rightarrow X$ l'inclusione, nel diagramma

$$\{p\} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} \{p\} \xrightarrow{i} X$$

la composizione di due applicazioni consecutive è omotopa all'identità. Passando in coomologia si ha

$$H^n(X, G) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\}, G) \xrightarrow{r^*} H^n(X, G) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\}, G)$$

e la composizione di due omomorfismi consecutivi è l'identità. Ma su uno spazio discreto ogni fascio è aciclico (Esempio 4.2.6) e dunque vale che

$$H^n(\{p\}, G) = 0 \quad \forall n > 0.$$

Quindi $r^* = 0$ implica che l'identità di $H^n(X, G)$ è il morfismo nullo, da cui la tesi.

Il ragionamento appena visto si può estendere facilmente per dimostrare che se X è un retratto per deformazione di Y allora l'inclusione $X \hookrightarrow Y$ induce un isomorfismo $H^*(X, G) \cong H^*(Y, G)$. □

COROLLARIO 4.12.9. *Sia X un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^m . Allora $H^n(X, \mathbb{Z}) = 0$ per ogni $n > 0$.*

4.13. Esempio: coomologia delle sfere e degli spazi proiettivi complessi

Siamo adesso in grado di calcolare i gruppi di coomologia a coefficienti interi delle sfere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e di come agiscono in coomologia le trasformazioni $f: S^n \rightarrow S^n$ indotte da matrici ortogonali $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$.

Il caso $n = 0$ è particolarmente semplice, infatti S^0 è lo spazio discreto formato da due punti, ricordiamo che poiché è discreto ogni fascio è fiacco, e quindi, per ogni gruppo abeliano G si ha

$$H^0(S^0, \mathbb{Z}) = \{f: S^0 \rightarrow \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H^n(S^0, \mathbb{Z}) = 0, \quad n > 0.$$

Le uniche matrici ortogonali 1×1 sono ± 1 . La matrice $A = -1$ ha l'effetto di scambiare i punti di S^0 e quindi agisce in coomologia come

$$A^*: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \quad A^*(a, b) = (b, a).$$

TEOREMA 4.13.1. *Per ogni $n > 0$ si ha:*

- (1) $H^0(S^n, \mathbb{Z}) = H^n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^i(S^n, \mathbb{Z}) = 0$ per $i \neq 0, n$;
- (2) se $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, $a \in H^0(S^n, \mathbb{Z})$ e $b \in H^n(S^n, \mathbb{Z})$ si ha

$$A^*a = a, \quad A^*b = \det(A)b.$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo solo una traccia di dimostrazione, i dettagli sono lasciati per esercizio. Le affermazioni sui gruppi H^0 sono ovvie; dimostriamo quelle sui gruppi H^n , $n > 0$. Per ogni $n \geq 0$ denotiamo

$$\begin{aligned} S^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}, \\ U &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq -1\}, \\ V &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \neq 1\}. \end{aligned}$$

Notiamo che U, V sono aperti omeomorfi a \mathbb{R}^n via proiezione stereografica e quindi $H^i(U, \mathbb{Z}) = H^i(V, \mathbb{Z}) = 0$ per ogni $i > 0$. Inoltre

$$S^{n-1} \simeq \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n = 0\} \subset U \cap V$$

è un retratto per deformazione, e quindi $H^i(U \cap V) \simeq H^i(S^{n-1})$ per ogni i .

Il primo item del teorema è allora una conseguenza immediata della successione esatta di Mayer-Vietoris.

Se $n > 0$, ogni applicazione $A: S^n \rightarrow S^n$ indotta da una matrice ortogonale è omotopa ad un'applicazione ortogonale con il medesimo determinante e che lascia fisso il punto $(1, 0, \dots, 0)$ (esercizio: perché?) e che preserva quindi entrambi gli aperti U, V . La dimostrazione della seconda parte del teorema si ottiene facilmente per induzione usando di nuovo la successione esatta di Mayer-Vietoris. \square

ESEMPIO 4.13.2. Dal teorema segue facilmente che l'applicazione antipodale

$$f: S^n \rightarrow S^n, \quad f(x) = -x,$$

è omotopa all'identità se e solo se n è dispari. Infatti, se $n = 2k - 1$ allora possiamo scrivere $S^n = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\|^2 = 1\}$ ed una possibile omotopia tra f e l'identità è data da

$$F: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad F(z, t) = ze^{i\pi t}.$$

Viceversa, se n è pari, allora f è indotta dalla matrice ortogonale $-\text{Id}$ che ha determinante -1 e quindi agisce in maniera non banale su $H^n(S^n, \mathbb{Z})$.

ESEMPIO 4.13.3 (Sfere impettinabili). Mostriamo che per ogni intero $n > 0$ ed ogni applicazione continua $f: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ esiste $x \in S^{2n}$ tale che i vettori $x, f(x)$ sono linearmente dipendenti. Infatti se si avesse $f(x) \neq \lambda x$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$F(x, t) = \frac{x + tf(x)}{\|x + tf(x)\|}$$

è un'omotopia tra l'identità e l'applicazione $g(x) = x + f(x)/\|x + f(x)\|$, mentre

$$G(x, t) = \frac{(2t-1)x + tf(x)}{\|(2t-1)x + tf(x)\|}$$

è un'omotopia tra l'antipodo e l'applicazione g . Dunque l'identità è omotopa all'antipodo, ma per quanto visto nell'esempio precedente questo è impossibile.

ESEMPIO 4.13.4 (Teorema del punto fisso). Mostriamo che ogni applicazione continua $f: D^n \rightarrow D^n$ possiede un punto fisso. Supponiamo $n > 1$ (per $n = 1$ è un semplice esercizio di topologia) e che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Allora l'applicazione

$$r: D^n \rightarrow S^{n-1}, \quad r(x) = x + t(x - f(x)), \quad t \geq 0, \quad \|r(x)\| = 1,$$

è tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in S^{n-1}$, ossia $ri = Id$ dove $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ è l'inclusione. Passando in coomologia si ha quindi che la composizione di

$$H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{r^*} H^{n-1}(D^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

è l'identità, ma questo è impossibile perché D^n è contraibile e dunque $H^{n-1}(D^n, \mathbb{Z}) = 0$.

Il nostro prossimo obiettivo è determinare i gruppi di coomologia a coefficienti interi degli spazi proiettivi complessi $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; useremo la successione esatta di Mayer-Vietoris applicata al seguente risultato topologico.

LEMMA 4.13.5. *Nello spazio proiettivo complesso \mathbb{P}^n , $n > 0$, con coordinate omogenee z_0, \dots, z_n si considerino i due aperti*

$$U = \{z_0 \neq 0\}, \quad V = \mathbb{P}^n - \{[1, 0, \dots, 0]\}.$$

Allora $U \cup V = \mathbb{P}^n$ e:

- (1) U è contraibile;
- (2) V ha il tipo di omotopia di \mathbb{P}^{n-1} ;
- (3) $U \cap V$ ha il tipo di omotopia della sfera S^{2n-1} .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è identica a quella usata in [18] per dimostrare la semplice connessione: la riportiamo per comodità del lettore ringraziando contestualmente l'inventore del Ctrl-C & Ctrl-V.

L'aperto U è contraibile in quanto si ha un omeomorfismo

$$f: \mathbb{C}^n \rightarrow U, \quad f(y_1, \dots, y_n) = [1, y_1, \dots, y_n],$$

che inoltre identifica $U \cap V$ con $\mathbb{C}^n - \{0\}$ ed è ben noto dai corsi di topologia che $\mathbb{C}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ si retrae per deformazione alla sfera S^{2n-1} .

L'iperpiano $\{z_0 = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ è contenuto in V ; l'applicazione

$$R: V \times [0, 1] \rightarrow V, \quad R([z_0, z_1, \dots, z_n], t) = [tz_0, z_1, \dots, z_n],$$

è continua, ben definita e mostra che $\{z_0 = 0\}$ è un retratto per deformazione di V . □

In particolare $U \cap V$ è connesso, ogni sezione del fascio \mathbb{Z} su $U \cap V$ è dunque costante e si estende ad una sezione su U . Quindi $H^0(U, \mathbb{Z}) \oplus H^0(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(U \cap V, \mathbb{Z})$ è surgettiva e possiamo far partire la successione esatta di Mayer-Vietoris dal gruppo $H^1(U \cup V, \mathbb{Z})$:

$$0 \rightarrow H^1(U \cup V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(U, \mathbb{Z}) \oplus H^1(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(U \cap V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(U \cup V, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

che per il lemma precedente risulta equivalente a

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S^{2n-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Dato che i gruppi di coomologia di \mathbb{P}^0 e delle sfere sono noti, è un gioco da ragazzi dimostrare per induzione su n la formula:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) &= H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = H^4(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \dots = H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \\ H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{in tutti gli altri casi.} \end{aligned}$$

Inoltre, se $j: \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ è l'inclusione di un iperpiano, allora $j^*: H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z})$ è un isomorfismo per ogni $i \neq 2n$.

Coomologia di Dolbeault ed applicazioni

Torniamo adesso ad occuparci di varietà complesse, le quali risultano una grande sorgente di esempi non banali di fasci. Per ogni varietà complessa X denoteremo con:

- \mathcal{O}_X il fascio delle funzioni olomorfe $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$;
- \mathcal{M}_X il fascio delle funzioni meromorfe $U \mapsto \mathcal{M}_X(U)$;
- \mathcal{O}_X^* il fascio delle funzioni olomorfe invertibili $U \mapsto \mathcal{O}_X^*(U)$, con la struttura moltiplicativa di gruppo;
- \mathcal{A}_X^0 il fascio delle funzioni di classe C^∞ a coefficienti complessi;
- \mathcal{A}_X^p il fascio delle p -forme differenziali a coefficienti complessi.

Per ogni $x \in X$ è chiaro per definizione che l'anello dei germi $\mathcal{O}_{X,x}$ coincide con la spiga di \mathcal{O}_X nel punto x ed è un semplice esercizio per il lettore dimostrare che la spiga in x del fascio \mathcal{M}_X è isomorfa al campo delle frazioni del dominio di integrità $\mathcal{O}_{X,x}$. Abbiamo visto nel Teorema 4.3.9 che i fasci \mathcal{A}_X^p , e più in generale i fasci che ammettono una partizione dell'unità, sono aciclici, ossia $H^i(X, \mathcal{A}_X^p) = 0$ per ogni p ed ogni $i > 0$.

Se $p: E \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale olomorfo, denotiamo con $\mathcal{O}_X(E)$ il fascio delle sezioni di E , viz. per ogni aperto $U \subset X$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(E)) = \Gamma(U, E) = \{s: U \rightarrow E \text{ olomorfe} \mid ps = \text{Id}\}.$$

5.1. Il lemma di Dolbeault

Per evitare ambiguità con alcuni indici, in questa sezione l'unità immaginaria viene denotata con la lettera greca ι (iota).

Le funzioni olomorfe in n variabili possono essere caratterizzate tramite un analogo delle equazioni di Cauchy-Riemann in una variabile.

L'identificazione naturale di \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n fa corrispondere al vettore di coordinate reali x_1, \dots, x_{2n} in vettore di coordinate complesse

$$z_1 = x_1 + \iota x_2, \quad z_2 = x_3 + \iota x_4, \quad z_n = x_{2n-1} + \iota x_{2n}.$$

La medesima identificazione permette di definire, per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ lo spazio delle funzioni differenziabili $\mathcal{A}^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{C})$ e più in generale lo spazio $\mathcal{A}^p(U)$ delle p -forme differenziali a coefficienti complessi.

Se pensiamo z_i e $\bar{z}_i = x_{2i-1} - \iota x_{2i}$ come funzioni differenziabili e denotiamo con d il differenziale di de Rham, allora

$$dz_i = dx_{2i-1} + \iota dx_{2i}, \quad d\bar{z}_i = dx_{2i-1} - \iota dx_{2i},$$

$$dx_{2i-1} = \frac{dz_i + d\bar{z}_i}{2}, \quad dx_{2i} = \frac{dz_i - d\bar{z}_i}{2\iota}.$$

Possiamo quindi usare la base $dz_j, d\bar{z}_h$ per rappresentare il differenziale di de Rham di una funzione $f \in \mathcal{A}^0(U)$:

$$df = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \partial f + \bar{\partial} f,$$

dove

$$\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i, \quad \bar{\partial} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i-1}} - \iota \frac{\partial f}{\partial x_{2i}} \right),$$

$$\bar{\partial}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i-1}} + i \frac{\partial f}{\partial x_{2i}} \right).$$

TEOREMA 5.1.1. Una funzione f , di classe C^1 , è olomorfa se e solo se $\bar{\partial}f = 0$, ossia se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i-1}} + i \frac{\partial f}{\partial x_{2i}} \right) = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$ è esattamente l'equazione di Cauchy-Riemann per la funzione in una variabile $z_i \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ e tutto segue dalla Proposizione 1.3.3. \square

Per definizione di forma differenziale, per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ ed ogni k , lo spazio vettoriale $\mathcal{A}^k(U)$ è formato dalle espressioni del tipo

$$\omega = \sum_{l_1 < \dots < l_k} b_{l_1 \dots l_k}(x) dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_k}, \quad b_{l_1 \dots l_k} \in \mathcal{A}^0(U),$$

che possiamo quindi scrivere in maniera unica come

$$\omega = \sum_{p+q=k} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_q} a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q}, \quad a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} \in \mathcal{A}^0(U).$$

Viene quindi naturale definire lo spazio $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ delle (p, q) -forme differenziali come quello formato da tutte le forme del tipo

$$(5.1) \quad \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_q} a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q}$$

in modo da ottenere una decomposizione in somma diretta di spazi vettoriali

$$\mathcal{A}^k(U) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(U).$$

Si noti che se $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ e $\beta \in \mathcal{A}^{r,s}(U)$, allora $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}^{p+r, q+s}(U)$. Inoltre, per ogni $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ si può scrivere in maniera unica

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega, \quad \text{con } \partial\omega \in \mathcal{A}^{p+1,q}(U), \quad \bar{\partial}\omega \in \mathcal{A}^{p,q+1}(U) :$$

infatti, per linearità non è restrittivo supporre

$$\omega = f dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q}$$

e siccome i $dz_i, d\bar{z}_j$ sono chiusi per il differenziale di de Rham si ottiene

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q} \\ &= (\partial f + \bar{\partial} f) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q} \\ &= \partial f \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q} \\ &\quad + \bar{\partial} f \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_q} \end{aligned}$$

con il primo addendo dell'ultimo termine in $\mathcal{A}^{p+1,q}(U)$ ed il secondo in $\mathcal{A}^{p,q+1}(U)$.

Per ogni $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ le componenti di $0 = d^2\omega$ sono

$$\partial^2\omega \in \mathcal{A}^{p+2,q}(U), \quad (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega \in \mathcal{A}^{p+1,q+1}(U), \quad \bar{\partial}^2\omega \in \mathcal{A}^{p,q+2}(U),$$

e dunque valgono le uguaglianze $\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$ assieme alle formule di Leibniz:

$$\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U), \quad \beta \in \mathcal{A}^{r,s}(U),$$

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial\beta, \quad \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial}\beta.$$

Il principale risultato di questa sezione (Lemma di Dolbeault) caratterizza le forme differenziali $\bar{\partial}$ -chiusi sui polidischi. Si tratta di un risultato tutt'altro che banale che richiede una serie di risultati preliminari.

LEMMA 5.1.2. *Sia f una funzione di classe C^∞ definita su un intorno aperto $U \subset \mathbb{C}$ di un disco chiuso $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(0, r)$. Esiste allora una funzione g di classe C^∞ su $\Delta(0, r)$ tale che*

$$\frac{dg}{d\bar{z}} = f \quad \text{in} \quad \Delta(0, r).$$

Inoltre, se f è C^∞ oppure olomorfa in un ulteriore parametro, ossia $f: U \times D \rightarrow \mathbb{C}$ con D aperto e le coordinate su D come ulteriori parametri, possiamo prendere g con la medesima proprietà.

DIMOSTRAZIONE. A meno di moltiplicare f per una funzione C^∞ che vale 1 su $\bar{\Delta}$ e 0 su $\mathbb{C} - \Delta(0, r + \epsilon)$ non è restrittivo supporre che f sia definita su tutto \mathbb{C} ed a supporto compatto. Ha quindi senso definire

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} f(w + z) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w},$$

dove la seconda uguaglianza segue dal cambio di variabile $\xi = w + z$. Siamo nelle condizioni di portare la derivata dentro il segno di integrale:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(w + z)}{w} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(w + z)}{\partial \bar{z}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w}.$$

Ma nell'ultimo termine abbiamo l'uguaglianza

$$\frac{\partial f(w + z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f(w + z)}{\partial \bar{w}}$$

e possiamo anche utilizzare la formula di Cauchy generalizzata 1.2.3 su un disco compatto contenente il supporto di f ; l'integrale di f sul bordo è quindi nullo per cui:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(w + z)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z} = f(z).$$

Se f dipende da un ulteriore parametro u , diciamo $f: U \times D \rightarrow \mathbb{C}$, con u coordinata su $D \subset \mathbb{C}$ aperto, la stessa dimostrazione prova che la funzione

$$g(z, u) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{w \in \mathbb{C}} f(w + z, u) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w},$$

soddisfa $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$; se f è C^∞ oppure olomorfa in u , lo stesso vale per g . \square

È facile estendere il Lemma 5.1.2 a forme differenziali di grado qualunque.

TEOREMA 5.1.3 (Lemma di Poincaré per $\bar{\partial}$). *Sia $\Delta = \Delta(0, r) \subset \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $0 < r_i < \infty$, polidisco aperto limitato e sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un intorno aperto del compatto $\bar{\Delta}$.*

Sia $\alpha \in \mathcal{A}^{p, q}(U)$ con $q > 0$ e $\bar{\partial}$ -chiusa, ossia $\bar{\partial}\alpha = 0$; allora esiste $\beta \in \mathcal{A}^{p, q-1}(\Delta)$ tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre $p = 0$: infatti raggruppando in (5.1) i termini della seconda sommatoria si può scrivere

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}, \quad \alpha_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{A}^{0, q}(U),$$

e vale $\bar{\partial}\alpha = 0$ se e solo se $\bar{\partial}\alpha_{i_1 \dots i_p}$ per ogni $i_1 < \dots < i_p$. Se $\alpha_{i_1 \dots i_p} = \bar{\partial}\beta_{i_1 \dots i_p}$ allora

$$\alpha = \bar{\partial} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \beta_{i_1 \dots i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \right).$$

Sia quindi $\alpha \in \mathcal{A}^{0, q}(U)$ con $q > 0$ e sia k il più piccolo intero tale che l'espressione di α nella base canonica non presenta termini $d\bar{z}_j$ con $j > k$: la dimostrazione prevede induzione su k ; se $k=0$ allora $\alpha=0$ dal momento che $q>0$ e non c'è nulla da provare.

Supponiamo quindi che $k > 0$ e di aver provato il risultato nei casi $< k$; per ipotesi $\alpha = d\bar{z}_k \wedge a + b$ con $a \in \mathcal{A}^{0, q-1}(U)$ e $b \in \mathcal{A}^{0, q}(U)$ forme che contengono soltanto termini $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$. Diciamo

$$a = \sum_{i_1 < \dots < i_{q-1} < k} a_{i_1 \dots i_{q-1}} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_{q-1}}, \quad a_{i_1 \dots i_{q-1}} \in \mathcal{A}^0(U),$$

$$b = \sum_{i_1 < \dots < i_q < k} b_{i_1 \dots i_q} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q}, \quad b_{i_1 \dots i_q} \in \mathcal{A}^0(U).$$

Osserviamo che i singoli coefficienti di a sono olomorfi nelle variabili z_{k+1}, \dots, z_n , ossia

$$\frac{\partial a_{i_1 \dots i_{q-1}}}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad k < j \leq n.$$

Infatti per ipotesi si ha

$$0 = \bar{\partial}\alpha = -d\bar{z}_k \wedge \bar{\partial}a + \bar{\partial}b,$$

per ogni indice $j > k$ fissato, lo sviluppo di $\bar{\partial}b$ non può contenere entrambi i differenziali $d\bar{z}_k$ e $d\bar{z}_j$.

Sia $\Delta' \subset U$ un altro polidisco aperto tale che $\bar{\Delta} \subset \Delta' \subset \bar{\Delta}' \subset U$. Per il Lemma 5.1.2 esistono funzioni $c_{i_1 \dots i_{q-1}} \in \mathcal{A}^0(\Delta')$ che sono olomorfe nelle variabili z_{k+1}, \dots, z_n e tali che

$$\frac{\partial c_{i_1 \dots i_{q-1}}}{\partial \bar{z}_k} = a_{i_1 \dots i_{q-1}}$$

e consideriamo la forma differenziale

$$c = \sum_{i_1 < \dots < i_{q-1} < k} c_{i_1 \dots i_{q-1}} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_{q-1}}.$$

Per costruzione $\bar{\partial}c = \phi + d\bar{z}_k \wedge a$ con ϕ forma differenziale in cui compaiono solamente $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$.

Dunque sull'aperto Δ' si ha $\alpha = \bar{\partial}c + b - \phi$ e per induzione su k esiste $\psi \in \mathcal{A}^{0, q-1}(\Delta)$ tale che $\bar{\partial}\psi = b - \phi$ da cui $\bar{\partial}(c - \psi) = \alpha$. \square

Nella pratica matematica il lemma di Poincaré per l'operatore $\bar{\partial}$ ha un destino spesso effimero in quanto viene usato nella dimostrazione del prossimo risultato, detto **lemma di Dolbeault**, e poi dimenticato.

DEFINIZIONE 5.1.4. Chiameremo **polidisco generalizzato** un aperto di \mathbb{C}^n che è un prodotto di dischi aperti e copie di \mathbb{C} : in altri termini $D \subset \mathbb{C}^n$ è un polidisco generalizzato di centro p se esistono $0 < r_1, \dots, r_n \leq +\infty$ tali che

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - p_i| < r_i \forall i\}.$$

Ad esempio \mathbb{C}^n è un polidisco generalizzato.

TEOREMA 5.1.5 (Lemma di Dolbeault). *Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco generalizzato e $\alpha \in \mathcal{A}^{0, q}(D)$ tale che $\bar{\partial}\alpha = 0$. Se $q = 0$ allora α è olomorfa, mentre se $q > 0$ esiste $\beta \in \mathcal{A}^{0, q-1}(D)$ tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di polidisco generalizzato possiamo trovare una successione di polidischi aperti, limitati e concentrici Δ_i , $i \in \mathbb{N}$, tali che:

- (1) $\cup_i \Delta_i = D$;
- (2) $\bar{\Delta}_i \subset \Delta_{i+1}$ per ogni i .

Dimostriamo il teorema per induzione su q , essendo il caso $q = 0$ esattamente il criterio di olomorfia mediante equazioni di Cauchy-Riemann.

Consideriamo adesso il caso $q = 1$ e dimostriamo la seguente asserzione: *esiste una successione $\beta_i \in \mathcal{A}^{0, 0}(D)$, $i \in \mathbb{N}$, tale che:*

- (1) $\bar{\partial}\beta_i = \alpha$ nel polidisco Δ_i ;
- (2) $\max_{\bar{\Delta}_i} |\beta_{i+2} - \beta_{i+1}| < 1/2^i$.

Per il lemma di $\bar{\partial}$ -Poincaré esistono funzioni η_i su Δ_{i+1} tale che $\bar{\partial}\eta_i = \alpha$; moltiplicando ciascuna η_i per una opportuna funzione C^∞ a supporto in Δ_{i+1} che vale 1 su Δ_i otteniamo le funzioni $\gamma_i \in \mathcal{A}^{0, 0}(D)$ tali che $\bar{\partial}\gamma_i = \alpha$ nel polidisco Δ_i .

Definiamo adesso $\beta_0 = \gamma_0$, $\beta_1 = \gamma_1$ e supponiamo di aver definito, per un intero $k \geq 2$ delle funzioni $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ che soddisfano le precedenti condizioni (1) e (2). Ma allora $\bar{\partial}(\gamma_k - \beta_{k-1}) = 0$ in Δ_{k-1} , dunque $\gamma_k - \beta_{k-1} \in \mathcal{O}(\Delta_{k-1})$ per l'ipotesi induttiva. Siccome ogni funzione olomorfa nel polidisco Δ_{k-1} è rappresentata da una serie di potenze totalmente convergente nei compatti, possiamo trovare un polinomio p_k tale che

$$\max_{\Delta_{k-2}} |\gamma_k - \beta_{k-1} - p_k| < \frac{1}{2^{k-2}},$$

e basta definire $\beta_k = \gamma_k - p_k$.

Sia dunque $\beta_i \in \mathcal{A}^{0,0}(D)$ una successione come nell'asserzione e definiamo

$$\beta(x) = \lim_i \beta_i(x), \quad x \in D.$$

Su ciascun polidisco aperto Δ_i si ha

$$\beta = \beta_{i+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_{i+n+2} - \beta_{i+n+1})$$

e per quanto visto nel Teorema 1.3.5 la serie di funzioni olomorfe $\beta_{i+n+2} - \beta_{i+n+1} \in \mathcal{O}(\Delta_{i+1})$ converge totalmente ad una funzione olomorfa su Δ_i . In particolare sul polidisco Δ_i anche β è di classe C^∞ e vale $\bar{\partial}\beta = \bar{\partial}\beta_{i+1}$. Questo conclude la dimostrazione nel caso $q = 1$.

Il caso $q > 1$ è fortunatamente più semplice e segue dalla seguente asserzione: *esiste una successione $\beta_i \in \mathcal{A}^{0,q-1}(D)$, $i \in \mathbb{N}$, tale che:*

- (1) $\bar{\partial}\beta_i = \alpha$ nel polidisco Δ_i ;
- (2) $\beta_{i+1} = \beta_i$ su Δ_{i-1}

Supponiamo di aver costruito β_0, \dots, β_k come nell'asserzione. Come nel caso precedente possiamo trovare una forma $\gamma \in \mathcal{A}^{0,q-1}(D)$ tale che $\bar{\partial}\gamma = \alpha$ su Δ_{k+1} . Ma allora $\bar{\partial}(\gamma - \beta_k) = 0$ su Δ_k e per induzione su q sappiamo che esiste $\phi \in \mathcal{A}^{0,q-2}(\Delta_k)$ tale che $\bar{\partial}\phi = \gamma - \beta_k$. Moltiplicando ϕ per un opportuno mollificatore si ottiene una forma $\psi \in \mathcal{A}^{0,q-2}(D)$ tale che $\phi = \psi$ in Δ_{k-1} . Dunque $\bar{\partial}\psi = \gamma - \beta_k$ su Δ_{k-1} e si può prendere $\beta_{k+1} = \gamma - \bar{\partial}\psi$.

Per concludere, se β_k è la successione della precedente asserzione, basta definire β come il suo limite e tutto risulta ben definito e funzionante. \square

COROLLARIO 5.1.6. *Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco generalizzato e $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(D)$ tale che $\bar{\partial}\alpha = 0$. Se $q > 0$ esiste $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(D)$ tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta usare lo stesso argomento usato all'inizio della dimostrazione del Teorema 5.1.3. \square

5.2. Applicazioni del lemma di Dolbeault

Vediamo alcune interessanti conseguenze del lemma di Dolbeault, partendo da una sua diversa formulazione.

TEOREMA 5.2.1 (= Teorema 5.1.5). *Se $D \subset \mathbb{C}^n$ è un polidisco generalizzato, ossia $D = \Delta(0, R)$ con $R \in]0, +\infty]^n$, allora si ha una successione esatta*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \hookrightarrow \mathcal{A}^{0,0}(D) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,1}(D) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,n}(D) \rightarrow 0.$$

La prima conseguenza è che per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ il complesso di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U \hookrightarrow \mathcal{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,n} \rightarrow 0$$

è una risoluzione aciclica di \mathcal{O}_U : infatti per il lemma di Dolbeault ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni nei quali il precedente complesso è esatto sulle sezioni e questo implica l'esattezza a livello di fasci. Infine siccome le forme differenziali di tipo $(0, q)$ possono essere moltiplicate per funzioni C^∞ ed in particolare per partizioni dell'unità, i fasci $\mathcal{A}^{0,q}$ sono aciclici.

Applicando il teorema di de Rham astratto si ricava

COROLLARIO 5.2.2. *Per ogni aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ ed ogni intero q vale*

$$H^q(U, \mathcal{O}_U) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}: \mathcal{A}^{0,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{0,q+1}(U)}{\bar{\partial}\mathcal{A}^{0,q-1}(U)}.$$

Abbiamo quindi un'altra formulazione equivalente del Lemma di Dolbeault:

COROLLARIO 5.2.3 (= Teorema 5.1.5). *Per ogni polidisco generalizzato $D \subset \mathbb{C}^n$ ed ogni intero positivo $q > 0$ vale $H^q(D, \mathcal{O}_D) = 0$.*

In particolare $H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ per ogni $q > 0$.

PROPOSIZIONE 5.2.4. *Siano X una varietà complessa connessa tale che $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ per ogni $i > 0$ e $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione olomorfa su X con luogo di zeri $Z = V(f)$. Si assuma che f abbia matrice Jacobiana non nulla in ciascun punto di Z , di modo che Z risulti una sottovarietà complessa di codimensione 1.*

Allora ogni funzione olomorfa su Z è la restrizione di una funzione olomorfa su X e $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ per ogni $i > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto $U \subset X$ esiste un omomorfismo di gruppi $p_U: \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Z(U \cap Z)$ che ad ogni funzione olomorfa h associa la sua restrizione $p_U(h) = h|_Z$ a Z . Detto $\iota: Z \rightarrow X$ il morfismo di inclusione, si ha dunque un morfismo di fasci $\mathcal{O}_D \xrightarrow{p} \iota_* \mathcal{O}_X$.

Per il teorema di invertibilità locale, ogni $x \in Z$ possiede un intorno aperto in cui la funzione f si estende ad un sistema di coordinate olomorfe locali $z_1 = f, z_2, \dots, z_n$ ed ogni funzione olomorfa su Z è rappresentata univocamente da una serie di potenze in z_2, \dots, z_n . Questo prova che il morfismo di fasci p è surgettivo ed il suo nucleo è dato dalle funzioni localmente divisibili per la coordinata z_1 , ossia per f ; tutto equivale del tutto a dire che si ha una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

dove $\mathcal{O}_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X$ è il morfismo di moltiplicazione per f .

Per la Proposizione 4.11.1, per ogni fascio \mathcal{G} su Z vale $H^i(Z, \mathcal{G}) = H^i(X, \iota_* \mathcal{G})$; siccome $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ per ogni $i > 0$ la successione esatta lunga di coomologia dà la successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow 0$$

e gli svanimenti

$$H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0, \quad \text{per ogni } i > 0.$$

□

COROLLARIO 5.2.5. *Dati due interi non negativi n, m siano $z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m$ coordinate lineari su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ e si consideri l'aperto*

$$X_{n,m} = \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^*)^m = \{(z, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid t_i \neq 0 \forall i\}.$$

Allora vale $H^i(X_{n,m}, \mathcal{O}_{X_{n,m}}) = 0$ per ogni $i > 0$ ed ogni funzione olomorfa $f: X_{n,m} \rightarrow \mathbb{C}$ è data da una serie intera nelle variabili z_i e di Laurent nelle variabili t_j , ossia una serie del tipo

$$\sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}, \beta_j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} t_1^{\beta_1} \dots t_m^{\beta_m},$$

totalmente convergente sui compatti di $X_{n,m}$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il corollario per induzione su m : il caso $m = 0$ è già dimostrato.

Supponiamo $m > 0$, allora $X_{n,m}$ è isomorfa alla sottovarietà $\iota: Y \hookrightarrow X_{n+2, m-1}$ di equazione $g(z, t) = 0$, dove

$$g(z, t) = z_{n+1} z_{n+2} - 1$$

ed il bilomorfismo $\tau: X_{n,m} \rightarrow Y$ è dato da

$$\tau(z, t) = (z_1, \dots, z_n, t_m, t_m^{-1}, t_1, \dots, t_{m-1}), \quad \tau^{-1}(z, t) = (z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_{m-1}, z_{n+1}).$$

Siccome g rappresenta anche una coordinata locale in ogni punto di Y (la derivate rispetto a z_{n+1} e z_{n+2} non si annullano) lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione del corollario precedente fornisce una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_{n+2, m-1}} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{X_{n+2, m-1}} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

e basta applicare l'ipotesi induttiva e la successione esatta lunga di coomologia. Dal fatto che $H^1(X_{n+2, m-1}, \mathcal{O}) = 0$ segue che ogni funzione olomorfa $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ è restrizione di una funzione olomorfa su $X_{n+2, m-1}$ che sempre per induzione è data da una serie

$$\sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}, \beta_j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2} \beta_1 \dots \beta_{m-1}} z_1^{\alpha_1} \dots z_{n+2}^{\alpha_{n+2}} t_1^{\beta_1} \dots t_{m-1}^{\beta_{m-1}},$$

che tramite il biolomorfismo τ diventa

$$\sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}, \beta_j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2} \beta_1 \dots \beta_{m-1}} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} t_1^{\beta_1} \dots t_{m-1}^{\beta_{m-1}} t_m^{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}.$$

□

ESERCIZIO 5.2.6. Sia $U \subset \mathbb{C}$ intersezione di due dischi aperti. Provare che $H^1(U, \mathcal{O}_U) = 0$.

Abbiamo già osservato che le sezioni di un fibrato vettoriale olomorfo sono un fascio. Nel caso dei line bundles $p: H^d \rightarrow \mathbb{P}^n$ è consuetudine denotare con $\mathcal{O}(d)$ (od anche $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ in caso di possibile incertezza sulla varietà) il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(H^d)$.

Siamo adesso in grado di calcolare quello che a buon diritto è il *punto di partenza della geometria delle varietà proiettive*, ossia il calcolo dei gruppi di coomologia dei fasci $\mathcal{O}(d)$.

Abbiamo già osservato che, se $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ è la proiezione naturale, allora per ogni aperto $U \subset \mathbb{P}^n$ vale

$$\Gamma(U, \mathcal{O}(d)) = \{f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \mid f(\lambda z) = \lambda^d z\}.$$

TEOREMA 5.2.7. *Nelle notazioni precedenti si ha $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$ con le seguenti uniche eccezioni:*

$$\dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = \dim H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d - n - 1)) = \binom{n+d}{n}, \quad d \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano z_0, \dots, z_n coordinate omogenee su \mathbb{P}^n e consideriamo il solito ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $U_i = \{z_i \neq 0\}$. Per ogni sottoinsieme

$$A \subset [n] := \{0, \dots, n\}$$

denotiamo

$$U_A = \{[z] \in \mathbb{P}^n \mid z_a \neq 0 \forall a \in A\} = \bigcap_{a \in A} U_a$$

osservando che per ogni insieme $A \neq \emptyset$ di cardinalità $|A| = m+1$ si ha $U_A \simeq \mathbb{C}^{n-m} \times (\mathbb{C}^*)^m$. Abbiamo già osservato che il fibrato H^d si banalizza sugli aperti U_i ed a maggior ragione anche negli aperti U_A per ogni $A \neq \emptyset$.

Per il Corollario 5.2.5 si ha dunque $H^i(U_A, \mathcal{O}(d)) = 0$ per ogni $i > 0$ ed ogni $A \neq \emptyset$. Ci troviamo quindi di fronte ad un ricoprimento Leray-aciclico e di conseguenza

$$H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = H^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d))$$

in virtù del Corollario 4.8.6. Per ogni $A \subset [n]$, ponendo

$$C_A(d) := \Gamma(U_A, \mathcal{O}(d)), \quad I_A(d) := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum \alpha_i = d; \alpha_i \geq 0 \forall i \notin A\}$$

si ha

$$C_A(d) = \left\{ \sum_{I_A(d)} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n} z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} \text{ tot. conv. sui compatti} \right\}.$$

Siccome $I_A(d) \subset I_{[n]}(d)$ possiamo interpretare ciascun $C_A(d)$ come un sottospazio vettoriale di $C_{[n]}(d)$. Il complesso della cocatene ordinate di Čech è dunque

$$\prod_{|A|=1} C_A(d) \xrightarrow{\delta} \prod_{|A|=2} C_A(d) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C_{[n]}(d) \rightarrow 0,$$

dove per ogni $\beta_0 < \dots < \beta_k$, e $f = \{f_A\} \in \prod_{|A|=k} C_A(d)$ vale

$$(\delta f)_{\beta_0 \dots \beta_k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i f_{\beta_0 \dots \widehat{\beta}_i \dots \beta_k}.$$

Il calcolo dello 0-esimo gruppo di coomologia è immediato, infatti per un $f = (f_0, \dots, f_n) \in \prod_{i=0}^n C_{\{i\}}$ vale $\delta f = 0$ se e solo se $f_i = f_j$ per ogni i, j . Siccome i monomi dello sviluppo in serie di f_i possono avere esponente negativo sono nella variabile z_i , ne segue che $\delta f = 0$ se e solo se $f_0 = \dots = f_n$ è un polinomio omogeneo di grado d .

Anche il calcolo dell' n -esimo gruppo di coomologia è facile: infatti

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d)) = \frac{C_{[n]}}{\sum_{|A|=n} C_A}$$

e gli sviluppi in serie in $\sum_{|A|=n} C_A$ sono esattamente quelli in cui ogni monomio ha almeno un coefficiente non negativo. Dunque gli elementi di $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d))$ sono rappresentati dagli sviluppi in serie in cui ogni esponente è negativo, che poi sono tutti e soli quelli che si possono scrivere come

$$\frac{p(z_0^{-1}, \dots, z_n^{-1})}{z_0 \cdots z_n}$$

con p polinomio omogeneo di grado $-d - n - 1$.

Rimane da dimostrare che $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d)) = 0$ per ogni $0 < i < n$ (e quindi $n \geq 2$). Per ogni $h = 0, \dots, n$ definiamo un operatore lineare $Q_h: C_{[n]}(d) \rightarrow C_{[n]}(d)$ che sui singoli monomi vale

$$Q_h(z_0^{\alpha_0} \cdots z_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_h < 0 \\ \frac{z_0^{\alpha_0} \cdots z_n^{\alpha_n}}{|\{j \mid \alpha_j \geq 0\}|} & \text{se } \alpha_h \geq 0 \end{cases}$$

È facilissimo credere, e comunque nessuno ha voglia di dimostrarlo rigorosamente, che Q_h si estende in maniera lineare e continua (ossia commuta con le sommatorie) a tutto $C_{[n]}$. È chiaro inoltre che $Q_h(C_A(d)) \subset C_A(d)$ per ogni $\emptyset \neq A \subset [n]$ e quindi possiamo interpretare ciascun Q_h come un morfismo di complessi $Q_h: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}(d))$.

Inoltre, per ogni $h \in A \subset [n]$ con $|A| \geq 2$ si ha $Q_h(C_A(d)) \subset C_{A-\{h\}}(d)$ e possiamo quindi costruire le omotopie

$$K_h: \prod_{|A|=p+2 \geq 2} C_A \rightarrow \prod_{|A|=p+1 \geq 1} C_A,$$

dove per ogni $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ si definisce

$$K_h(f)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists j: h = \alpha_j \\ (-1)^s Q_h(f_{\alpha_0 \cdots h \cdots \alpha_p}) & \text{se } \alpha_{s-1} < h < \alpha_s \end{cases}$$

Un conto piuttosto semplice, ma brutto nella sua combinazione tra banalità e ineleganza, mostra che se $1 \leq p < n$ e $f \in \prod_{|A|=p+1} C_A$ allora

$$(\delta K_h + K_h \delta)f = Q_h(f).$$

Per semplicità facciamo qui solo il caso $h = 0$ (dove i segni creano meno confusione). Dobbiamo dimostrare che per ogni $A = \{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p\}$ con $p > 0$ si ha $(\delta K_0 f)_A + (K_0 \delta f)_A = (Q_0 f)_A$. Se $\alpha_0 = 0$ allora

$$(\delta K_0 f)_{0\alpha_1 \cdots \alpha_p} = (K_0 f)_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = (Q_0 f)_A, \quad (K_0 \delta f)_{0\alpha_1 \cdots \alpha_p} = 0.$$

Se invece $\alpha_0 > 0$, allora

$$(\delta K_0 f)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i (K_0 f)_{\cdots \widehat{\alpha_i} \cdots} = \sum_{i=0}^p (-1)^i (Q_0 f)_{0 \cdots \widehat{\alpha_i} \cdots}$$

$$(K_0 \delta f)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = Q_0(\delta f)_{0, \alpha_0 \cdots \alpha_p} = (Q_0 f)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} (Q_0 f)_{0 \cdots \widehat{\alpha_i} \cdots}.$$

Dunque abbiamo provato $K_0 \delta + \delta K_0 = Q_0$ nei gradi intermedi. Quindi il morfismo di complessi Q_0 è nullo nei gruppi di coomologia intermedi H^i ($0 < i < n$): un ragionamento analogo, oltre ad ovvie ragioni di simmetria, lo stesso vale per gli operatori Q_h per ogni $h = 0, \dots, n$. Ma adesso basta osservare che nei gradi $< n$ la somma $\sum Q_h$ è uguale all'identità. \square

5.3. La successione esponenziale e gruppi di Picard e Neron-Severi

Abbiamo già osservato che l'applicazione olomorfa

$$\exp\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \exp\pi(z) = e^{2\pi iz}$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi abeliani ed è un biolomorfismo locale: usando lo sviluppo in serie del logaritmo $-\log(1-t) = \sum t^n/n$ è facile scrivere esplicitamente, per ogni disco aperto $\Delta = \Delta(p, r) \subset \mathbb{C}^*$, $|p| \leq r$, una funzione olomorfa $s \in \mathcal{O}(\Delta)$ tale che $\exp\pi(s(z)) = z$ per ogni $z \in \Delta$.

Se U è un aperto in una varietà complessa X e $f: U \rightarrow \Delta$ è olomorfa, si ha quindi $\exp\pi(s(f(z))) = f(z)$ per ogni $z \in U$. In conclusione, se prendiamo i fasci delle funzioni olomorfe nei tre gruppi della successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp\pi} \mathbb{C}^* \rightarrow 0,$$

si ottiene una successione esatta corta di fasci su X

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp\pi} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0, \quad \text{dove} \quad \exp\pi(f) := \exp(2\pi if) = e^{2\pi if},$$

che viene detta **successione esponenziale (olomorfa)** di X .

Abbiamo quindi un ulteriore corollario del lemma di Dolbeault:

COROLLARIO 5.3.1. *Per ogni polidisco generalizzato $D \subset \mathbb{C}^n$ ed ogni intero positivo $q > 0$ vale*

$$H^q(D, \mathcal{O}_D^*) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $q > 0$, per Dolbeault si ha $H^q(D, \mathcal{O}_D) = 0$; siccome D è topologicamente contraibile si ha anche $H^{q+1}(D, \mathbb{Z}) = 0$. Basta adesso considerare la successione esatta lunga di coomologia associata alla successione esponenziale. \square

COROLLARIO 5.3.2. *Per ogni polidisco generalizzato $D \subset \mathbb{C}^n$ si ha $\text{Pic}(D) = 0$, ossia ogni line bundle su D è isomorfo a quello banale $D \times \mathbb{C} \rightarrow D$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia L un line bundle su D , prendiamo una sua banalizzazione locale (U_i, τ_i) e sia $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ il corrispondente cociclo. Abbiamo visto che L è banale se e solo se la classe di coomologia di $\{g_{ij}\}$ in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D^*)$ è banale, dove per \mathcal{U} si intende il ricoprimento aperto $D = \cup U_i$. Siccome $H^1(D, \mathcal{O}_D^*) = 0$ tutto segue dal Teorema 4.4.1 applicato alla risoluzione di Čech di \mathcal{O}_D^* , ed in particolare dal fatto (già osservato) che esistono dei morfismi naturali $\alpha_n: H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$, con α_0 un isomorfismo e α_1 iniettivo (vedi Esercizio 5.3.3). \square

ESERCIZIO 5.3.3. Provare che ogni successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2$$

induce una successione esatta

$$0 \rightarrow \frac{\text{Ker}(H^0(\mathcal{E}^1) \xrightarrow{d} H^0(\mathcal{E}^2))}{dH^0(\mathcal{E}^0)} \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Ker}(H^1(\mathcal{E}^0) \xrightarrow{d} H^1(\mathcal{E}^1)).$$

ESERCIZIO 5.3.4. Sia X una palla aperta di \mathbb{C}^n e \mathcal{F} il fascio delle funzioni di classe C^∞ a valori nel gruppo abeliano $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Dimostrare che $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$.

COROLLARIO 5.3.5. *Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ polidisco generalizzato e $X \subset D$ sottovarietà chiusa olomorfa di dimensione $n - 1$. Allora X è il luogo di zeri di una funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}_D$, ogni funzione olomorfa su X è la restrizione di una funzione olomorfa su D e $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ per ogni $i > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto $U \subset D$ esiste un omomorfismo di gruppi $\mathcal{O}_D(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap X)$ che ad ogni funzione olomorfa associa la sua restrizione ad X . Detto $\iota: X \rightarrow D$ il morfismo di inclusione, si ha dunque un morfismo di fasci $\mathcal{O}_D \xrightarrow{\iota_*} \iota_*\mathcal{O}_X$. Per definizione di sottovarietà, per ogni $x \in X$ esiste un sistema di coordinate olomorfe z_1, \dots, z_n tali che $X = \{z_1 = 0\}$ ed ogni funzione olomorfa su X è rappresentata univocamente da una serie di potenze in z_2, \dots, z_n (le coordinate su X). Dunque il morfismo di fasci ι_* è surgettivo ed il suo nucleo è dato dalle funzioni divisibili per z_1 . In altri termini, abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \iota_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Abbiamo già osservato che esiste un ricoprimento aperto $D = \cup_i U_i$ e funzioni oloomorfe $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ ($f_i = z_1$ nelle notazioni precedenti) tali che per ogni $V \subset U_i$ aperto si ha

$$X \cap V = \{x \in V \mid f_i(x) = 0\}, \quad \mathcal{I}(V) = \{f_i g \mid g \in \mathcal{O}(V)\}.$$

Siccome su U_{ij} le due funzioni f_i, f_j generano lo stesso ideale principale si ha $f_i = h_{ij} f_j$ con $h_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ ed è chiaro che $\{h_{ij}\}$ è un cociclo che sappiamo essere un cobordo per il Corollario 5.3.2. Dunque esistono funzioni invertibili $a_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ tali che $h_{ij} = a_j a_i^{-1}$ e se definiamo $g_i = a_i f_i$ si ha $g_i/g_j = 1$, ossia $g_i = g_j$ e quindi esiste $g \in \mathcal{O}(D)$ tale che $g_i = g|_{U_i}$ per ogni i . Per concludere X è il luogo di zeri di g e per concludere basta applicare la Proposizione 5.2.4. \square

COROLLARIO 5.3.6. *Per ogni varietà complessa X vale $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{U} un ricoprimento in polidischi aperti di X ; abbiamo già dimostrato che per ogni polidisco Δ vale $\text{Pic}(\Delta) = H^1(\Delta, \mathcal{O}^*) = 0$ e quindi \mathcal{U} è banalizzante per ogni line bundle su X . Dunque il gruppo $\text{Pic}(X)$ è isomorfo al gruppo delle classi di equivalenza di cocicli su \mathcal{U} , ossia al gruppo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Per il Teorema di Leray dei ricoprimenti aciclici si ha $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$. \square

Sostituendo $\text{Pic}(X)$ al posto di $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ nella successione esponenziale lunga di coomologia si ottiene una successione esatta di gruppi

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

DEFINIZIONE 5.3.7. Nelle notazioni precedenti, l'immagine di c_1 è un sottogruppo di $H^2(X, \mathbb{Z})$ che viene chiamato **gruppo di Neron-Severi** $NS(X) = c_1(\text{Pic}(X))$ ed il suo rango

$$\varrho = \text{rg}(NS(X)) = \dim_{\mathbb{C}} NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

viene detto **numero di Picard** della varietà X .

Se X è compatta, allora i gruppi $H^i(X, \mathbb{Z})$ sono finitamente generati mentre in generale lo spazio vettoriale complesso $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ è non banale. Questo implica che il gruppo di Picard è finitamente generato (come gruppo abeliano) se e solo se $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Di converso il Neron-Severi è un sottogruppo finitamente generato di $H^2(X, \mathbb{Z})$. Chiaramente $\varrho \leq \beta_2$ (secondo numero di Betti) ma in generale vale $\varrho < \beta_2$ ed a posteriori questo è un'altra caratteristica che rende la geometria delle varietà complesse molto più ricca della geometria delle varietà differenziabili.

Inoltre, si può dimostrare che se X è una varietà proiettiva, ossia una sottovarietà liscia dello spazio proiettivo, allora il nucleo di α coincide con il sottogruppo di torsione e l'immagine di α è un reticolo, ossia il quoziente $\frac{H^1(X, \mathcal{O}_X)}{\alpha(H^1(X, \mathbb{Z}))}$ è un toro complesso, detto $\text{Pic}^0(X)$, che a sua volta è una varietà proiettiva.

5.4. Il gruppo di Picard dello spazio proiettivo

Siamo adesso in grado di dimostrare che ogni line bundle sullo spazio proiettivo è del tipo H^a per qualche $a \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA 5.4.1. *Il fibrato iperpiano genera il gruppo di Picard dello spazio proiettivo, ossia $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = \{H^a \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, per ogni $n > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$, dalla successione esponenziale segue che

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) = H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

è un gruppo ciclico infinito.

Dimostriamo adesso che il gruppo $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$ è generato dal fibrato iperpiano $H^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$. Sia $L \rightarrow \mathbb{P}^n$ un line bundle che corrisponde al generatore del gruppo ciclico $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$, allora esiste un intero a tale che $L^a = H^1$; a meno di sostituire L con il suo inverso nel gruppo di Picard possiamo supporre $a > 0$ (sappiamo che $a \neq 0$ perché H^1 non è banale). Sia g_{ij} un cociclo di L rispetto al solito ricoprimento $U_i = \{z_i \neq 0\}$. Sappiamo che il cociclo di H^1 è $h_{ij} = z_j/z_i$

e quindi esistono funzioni $b_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*(U_i)$ tali che $b_j g_{ij}^a b_i^{-1} = z_j/z_i$ in U_{ij} . Prediamo per ogni i una radice a -esima di b_i : $\gamma_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*(U_i)$, $\gamma_i^a = b_i$.

Per dimostrare che le radici γ_i esistono basta osservare che la radice esiste localmente e quindi si ha una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mu_a \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^* \xrightarrow{\text{potenza alla } a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^* \rightarrow 0,$$

dove $\mu_a \subset \mathbb{C}^*$ è il sottogruppo moltiplicativo delle radici a -esime di 1. Siccome $U_i \simeq \mathbb{C}^n$ è contraibile, $H^1(U_i, \mu_a) = 0$ e quindi si ha una successione esatta di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \mu_a \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*(U_i) \xrightarrow{\text{potenza alla } a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*(U_i) \rightarrow 0.$$

Ponendo $f_{ij} = \gamma_j g_{ij} \gamma_i^{-1}$ si ottiene $f_{ij}^a = z_j/z_i$. Ad esempio, sull'aperto

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-1} \xrightarrow{\simeq} U_{01}, \quad (t, z_2, \dots, z_n) \mapsto (1, t, z_2, \dots, z_n)$$

si avrebbe quindi che $f_{01}^a = t$.

Consideriamo U_{01} come il complementare in $U_0 \simeq \mathbb{C}^n$ del chiuso analitico $X = \{t = 0\}$, si ha chiaramente che $|f_{01}| = \sqrt[a]{|t|}$ e quindi f è limitata nell'aperto $0 < |t| < 1$.

Per il teorema di estensione di Riemann la funzione f_{01} si estende a tutto U_0 con la relazione $f_{01}^a = t$ ancora valida per continuità. In particolare, in ogni punto di X la molteplicità di t è al tempo stesso uguale ad 1 ed a volte la molteplicità di f_{01} ; questo implica $a = 1$ per ovvi motivi di divisibilità in \mathbb{Z} . \square

COROLLARIO 5.4.2 (=Corollario 2.7.10). *Ogni funzione meromorfa su \mathbb{P}^n è il quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo da tempo che ogni funzione meromorfa si può scrivere come rapporto di due sezioni del medesimo line bundle, e adesso sappiamo anche chi sono i line bundles su \mathbb{P}^n e le loro sezioni. \square

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che ogni automorfismo olomorfo di \mathbb{P}^n è una proiettività. A tale scopo è utile premettere alcune considerazioni generali sul pull-back di un fibrato vettoriale olomorfo.

Siano $p: E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango m e $f: Y \rightarrow X$ un'applicazione olomorfa tra due varietà complesse. Il fibrato pull-back $p': f^*E \rightarrow Y$ è definito a livello di varietà come il prodotto fibrato

$$q: f^*E = Y \times_X E = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\} \rightarrow Y, \quad q(y, e) = y.$$

Se (U_i, τ_i) è una banalizzazione locale per E ,

$$\tau_i = (p, \tau'_i): p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^m, \quad \tau'_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{C}^m,$$

e cociclo

$$g_{ij}: U_{ij} \rightarrow GL_m(\mathbb{C}), \quad g_{ij}(x)v = \tau'_i(\tau_j^{-1}(x, v)),$$

allora $(f^{-1}(U_i), \eta_i)$ è una banalizzazione locale per f^*E , dove

$$\eta_i: q^{-1}(f^{-1}(U_i)) \rightarrow f^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^m, \quad \eta_i(y, e) = (y, \tau'_i(e)), \quad \eta_i^{-1}(y, v) = (y, \tau_i^{-1}(f(y), v)),$$

con cociclo

$$h_{ij}(y)v = \eta'_i \eta'_j^{-1}(y, v) = \eta'_i(y, \tau'_j^{-1}(f(y), v)) = \tau'_i \tau'_j^{-1}(f(y), v) = g_{ij}(f(y))v,$$

ossia $h_{ij} = g_{ij} \circ f: f^{-1}(U_{ij}) \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$. È chiaro che il cociclo h_{ij} è olomorfo e quindi che anche il fibrato f^*E è olomorfo. In parole povere si ha che il *cociclo del pull-back è uguale al pull-back del cociclo*.

È inoltre definita un'applicazione lineare a livello di sezioni globali

$$f^\#: \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(Y, f^*E), \quad f^\#(s)(y) = (y, s(f(y))).$$

Più semplicemente, se $s: X \rightarrow E$ è definita rispetto al cociclo (U_i, g_{ij}) dalle applicazioni olomorfe $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$, allora $f^\#(s)$ è definita rispetto al cociclo $(f^{-1}(U_i), g_{ij} \circ f)$ dalle applicazioni $s_i \circ f: f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{C}^m$.

È chiaro dalla definizione che $f^\#$ commuta con i luoghi di zeri di sezioni, ossia

$$V(f^\#(s)) = f^{-1}(V(s)), \quad s \in \Gamma(X, E).$$

Occorre fare attenzione che $f^\#$ è ben definita solamente con il modello esplicito di f^*E dato dal prodotto fibrato. Qualora si conosca solamente la classe di isomorfismo del fibrato f^*E il meglio che si può ottenere è il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.4.3. *Siano $f: Y \rightarrow X$ oморfo, E fibrato vettoriale oморfo su X ed H fibrato vettoriale oморfo su Y isomorfo a f^*E . Allora esiste un'applicazione lineare $\gamma: \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(Y, H)$ con le seguenti proprietà;*

- (1) γ è unica a meno di composizione a sinistra con automorfismi lineari di $\Gamma(Y, H)$ indotti da automorfismi del fibrato H ;
- (2) per ogni sezione $s \in \Gamma(X, E)$ vale $V(\gamma(s)) = f^{-1}(V(s))$;
- (3) se γ **non** è iniettiva, allora $f(Y)$ è contenuta in un chiuso analitico proprio di X .

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha: f^*E \rightarrow H$ è un isomorfismo di fibrati si definisce $\gamma = \alpha \circ f^\#$. Gli isomorfismi di fibrati lasciano invariati i luoghi di zeri di sezioni. Se $\gamma(s) = 0$ allora $Y = V(\gamma(s)) = f^{-1}(V(s))$ e quindi $f(Y) \subset V(s)$; se $s \neq 0$ allora $V(s)$ è un chiuso analitico proprio di X . \square

ESEMPIO 5.4.4. Sia $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{m+1}$ lineare iniettiva e denotiamo con $\phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ l'applicazione indotta per passaggio al quoziente. Allora, per ogni $d \in \mathbb{Z}$ la f induce un isomorfismo di line bundles su \mathbb{P}^n .

$$\tilde{f}: H_{\mathbb{P}^n}^d \xrightarrow{\simeq} \phi^* H_{\mathbb{P}^m}^d.$$

Infatti, ricordando la definizione di $H_{\mathbb{P}^m}^d$ come l'insieme delle classi di equivalenza $[z, t]$, con $z \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$, $t \in \mathbb{C}$ e $[z, t] = [u, s]$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tale che $u = \lambda z$, $s = \lambda t$, prendendo la costruzione del pull-back come prodotto fibrato si ha

$$\phi^* H_{\mathbb{P}^m}^d = \{([x], [z, t]) \in \mathbb{P}^n \times H_{\mathbb{P}^m}^d \mid [f(x)] = [z]\}.$$

Possiamo adesso definire l'isomorfismo di fibrati

$$\tilde{f}: H_{\mathbb{P}^n}^d \xrightarrow{\simeq} \phi^* H_{\mathbb{P}^m}^d, \quad [x, t] \mapsto ([x], [f(x), t]).$$

e l'applicazione lineare

$$\hat{f}: \Gamma(\mathbb{P}^n, H^d) \xrightarrow{\phi^\#} \Gamma(\mathbb{P}^n, \phi^* H^d) \xrightarrow{\tilde{f}^{-1}} \Gamma(\mathbb{P}^n, H^d).$$

Se una sezione globale $s \in \Gamma(\mathbb{P}^m, H^d)$ è definita dalla funzione $s: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomiale omogenea di grado d , ossia $s([z]) = [z, s(z)]$ per ogni $[z] \in \mathbb{P}^m$, allora

$$\phi^\# s([x]) = ([x], s(\phi([x]))) = ([x], [f(x), s(f(x))]) = \tilde{f}([x, s(f(x))])$$

e quindi $s \circ f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ è esattamente il polinomio omogeneo di grado d che definisce $\hat{f}(s)$.

Per $n = m$ e $d = 1$ ogni applicazione lineare invertibile $\text{Hom}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ è indotta per composizione con un'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ (la trasposta!) ed il conteggio precedente prova che ogni isomorfismo lineare di $\Gamma(\mathbb{P}^n, H^1)$ è del tipo \hat{f} .

TEOREMA 5.4.5. *Ogni automorfismo oморfo di \mathbb{P}^n è una proiettività.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ un bilomorfismo, allora $\varphi^* H^1 \simeq H^1$. Infatti $\varphi^\#: \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1) \rightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n, \varphi^* H^1)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. D'altra parte ogni line bundle su \mathbb{P}^n è isomorfo ad un H^d e H^1 è l'unico il cui spazio delle sezioni ha dimensione $n + 1$.

Abbiamo quindi un isomorfismo di fibrati $\alpha: \varphi^* H^1 \rightarrow H^1$ ed un isomorfismo di spazi vettoriali

$$g: \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1) \xrightarrow{\varphi^\#} \Gamma(\mathbb{P}^n, \varphi^* H^1) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1).$$

Per l'esempio precedente possiamo trovare $f \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che g è uguale a

$$\hat{f}: \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1) \xrightarrow{\phi^\#} \Gamma(\mathbb{P}^n, \phi^* H^1) \xrightarrow{\tilde{f}^{-1}} \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1), \quad \phi = [f].$$

Siccome gli isomorfismi di fibrati α e \tilde{f} lasciano inalterati i luoghi di zeri di sezioni, ne consegue che per ogni $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n, H^1)$ vale $\varphi^{-1}(V(s)) = \phi^{-1}(V(s))$. Dunque il bilomorfismo $\varphi\phi^{-1}$ lascia inalterati tutti gli iperpiani (ossia tutti e soli i luoghi di zeri delle sezioni di H^1). Per concludere basta osservare che ogni punto è intersezione di iperpiani e quindi se un'applicazione manda ogni iperpiano in sé deve necessariamente essere l'identità. \square

5.5. Coomologia di Dolbeault dei fibrati

OSSERVAZIONE 5.5.1. Sia $x \in X$ un punto di una varietà complessa fissata. Denotiamo rispettivamente con T_x e $T_{x,\mathbb{R}}$ gli spazi tangenti in x , il primo olomorfo ed il secondo pensando X come varietà differenziabile di dimensione reale $2n$. Vogliamo dimostrare i due spazi sono canonicamente isomorfi come spazi vettoriali reali. Se $\mathcal{O}_{X,x}$ denota l'anello dei germi di funzioni olomorfe in X , per definizione di spazio tangente si ha

$$T_x = \{\eta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{C}) \mid \eta(fg) = \eta(f)g(x) + f(x)\eta(g)\}.$$

Similmente, se \mathcal{E}_x denota l'anello dei germi in x di funzioni C^∞ a valori reali si ha per definizione

$$T_{x,\mathbb{R}} = \{\eta \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_x, \mathbb{R}) \mid \eta(fg) = \eta(f)g(x) + f(x)\eta(g)\}.$$

Possiamo allora definire un'applicazione \mathbb{R} -lineare canonica

$$\theta: T_{x,\mathbb{R}} \rightarrow T_x$$

tramite la formula

$$\theta(\eta)(f + ig) = \eta(f) + i\eta(g), \quad \eta \in T_{x,\mathbb{R}}, f, g \in \mathcal{E}_x, f + ig \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Lasciamo per esercizio dimostrare che θ è ben definito ed \mathbb{R} -lineare. Per dimostrare che θ è un isomorfismo possiamo fissare un sistema di coordinate locali olomorfe

$$z_1, \dots, z_n, \quad z_h = x_{2h-1} + ix_{2h}$$

ed osservare che una base di $T_{x,\mathbb{R}}$ è data dalle derivazioni $\frac{\partial}{\partial x_h}$, mentre una base di T_x come spazio vettoriale reale è data dalle derivazioni $\frac{\partial}{\partial z_h}, i\frac{\partial}{\partial z_h}$. Per ogni h, k si ha

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h-1}}\right)(z_k) = \delta_{hk}, \quad \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h}}\right)(z_k) = i\delta_{hk}$$

da cui segue

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial z_h}, \quad \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h}}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_h}.$$

Assieme al differenziale olomorfo di dz_h , che per definizione è l'applicazione \mathbb{C} -lineare

$$dz_h: T_x \rightarrow \mathbb{C}, \quad dz_h(\eta) = \eta(z_h),$$

possiamo considerare il suo coniugato

$$\overline{dz_h} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x, \mathbb{C}), \quad \overline{dz_h}(\eta) = \overline{\eta(z_h)}.$$

La composizione di dz_k con θ ci dà:

$$\begin{aligned} dz_k \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h-1}}\right) &= (dx_{2k-1} + idx_{2k})\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h-1}}\right) = \delta_{hk} \\ dz_k \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_{2h}}\right) &= (dx_{2k-1} + idx_{2k})\left(i\frac{\partial}{\partial x_{2h}}\right) = i\delta_{hk} \end{aligned}$$

da cui segue che, tramite l'identificazione data da θ si ha $dz_k \theta = dx_{2k-1} + idx_{2k}$, ossia che **la composizione con θ trasforma il differenziale olomorfo nel differenziale di de Rham**. Allo stesso modo si dimostra che

$$\overline{dz_k} \theta = dx_{2k-1} - idx_{2k} = d\overline{z_k}.$$

Concludendo e riassumendo, usando la composizione con θ come identificazione naturale

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{x,\mathbb{R}}, \mathbb{C}),$$

si ha che il differenziale olomorfo coincide con il differenziale di de Rham, $d\overline{z}_i = \overline{dz}_i$ per ogni i , i differenziali dz_1, \dots, dz_n formano una base dello spazio vettoriale complesso $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(T_x, \mathbb{C})$, ed i differenziali

$$dz_1, \dots, dz_n, d\overline{z}_1, \dots, d\overline{z}_n$$

sono una base, come spazio vettoriale complesso, di $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x, \mathbb{C})$.

Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ funzione differenziabile. Se $f_1, f_2: U \rightarrow \mathbb{R}$ sono parte reale ed immaginaria di f si ha

$$df = df_1 + idf_2$$

e di conseguenza $d\bar{f} = df_1 - idf_2 = \overline{df}$, ossia **il differenziale commuta con il coniugio**. In particolare $d\bar{z}_i = \overline{dz_i}$ per ogni coordinata z_i , quindi

$$\overline{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}} = d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_p} \wedge dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_q}$$

e dunque per una forma differenziale α si ha $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ se e solo se $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}^{q,p}(U)$.

Tutto questo implica che il **coniugio scambia gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$** :

$$\bar{\partial} \bar{f} = \overline{\partial f}, \quad \partial \bar{f} = \overline{\bar{\partial} f}.$$

Da queste semplici osservazioni segue che le forme differenziali di tipo (p, q) sono preservate per pull-back di funzioni olomorfe. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ aperti, $f: U \rightarrow V$ olomorfa. Allora per ogni $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(V)$ si ha $f^*\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$.

Infatti siano z_1, \dots, z_n coordinate su U , y_1, \dots, y_m coordinate su V e

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\bar{j}_1 < \cdots < \bar{j}_q} a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}(y) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_p} \wedge d\bar{y}_{\bar{j}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{y}_{\bar{j}_q}$$

Allora se f_1, \dots, f_m sono le componenti di f si ha

$$f^*\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\bar{j}_1 < \cdots < \bar{j}_q} a_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}(f(z)) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p} \wedge d\bar{f}_{\bar{j}_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_{\bar{j}_q}$$

e basta osservare che, siccome le f_i sono olomorfe, $\bar{\partial} f_i = \partial \bar{f}_i = 0$ da cui $df_i \in \mathcal{A}^{1,0}(U)$, $d\bar{f}_j \in \mathcal{A}^{0,1}(U)$.

Questo è tutto ciò che ci serve per poter decomporre in tipi le forme differenziali su di una varietà complessa X . Denotiamo con \mathcal{A}_X^k il fascio delle k -forme differenziali a coefficienti complessi, allora per ogni aperto $U \subset X$ si ha

$$\mathcal{A}_X^k(U) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$$

dove $\mathcal{A}_X^{p,q}(U)$ è il sottospazio vettoriale che delle forme che nelle carte locali olomorfe risultano di tipo (p, q) : si tratta di buona definizione in quanto il tipo è invariante per biolomorfismi e dunque indipendente dalla carta locale.

Il differenziale di de Rham commuta con il pull-back di forme, dunque i differenziali ∂ e $\bar{\partial}$ commutano con i pull-back via applicazioni olomorfe: segue che possiamo definire ∂ e $\bar{\partial}$ su qualunque varietà complessa. Si ha dunque un **complesso doppio** di fasci

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \partial & & \partial & & \partial & \\ \mathcal{A}_X^{2,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{2,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{2,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathcal{A}_X^{1,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{1,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{1,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathcal{A}_X^{0,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}_X^{0,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \end{array}$$

Complesso doppio vuol dire che ogni riga ed ogni colonna sono complessi ($\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$) e che in ogni quadrato del reticolo le composizioni dei lati anticommutano:

$$\partial \bar{\partial} = -\bar{\partial} \partial \iff (\partial + \bar{\partial})^2 = 0.$$

Il nucleo del differenziale $\bar{\partial}: \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}$ è esattamente il fascio Ω_X^p delle p -forme olomorfe, quelle che in coordinate locali si scrivono come

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(z) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad \bar{\partial} a_{i_1 \dots i_p} = 0,$$

ed il lemma di Dolbeault fornisce una risoluzione aciclica

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

Applicando il teorema di de Rham delle risoluzioni acicliche si ottiene:

TEOREMA 5.5.2. *Sia X una varietà complessa di dimensione $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Allora per ogni $p, q \in \mathbb{N}$ si ha*

$$H^q(X, \Omega_X^p) = \frac{\text{Ker} \left(\mathcal{A}_X^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \right)}{\bar{\partial} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X)}.$$

In particolare $H^q(X, \Omega_X^p) = 0$ per ogni $q > n$.

Dato un qualunque fibrato vettoriale olomorfo $p: E \rightarrow X$, possiamo considerare il **fascio delle sezioni olomorfe** di E , che denoteremo $\mathcal{O}_X(E)$:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(E)) = \Gamma(U, E) = \{s: U \rightarrow E \text{ olomorfa} \mid ps = \text{Id}\}.$$

Similmente possiamo considerare il **fascio delle sezioni differenziabili** di E , che denoteremo $\mathcal{A}_X^0(E)$:

$$\Gamma(U, \mathcal{A}_X^0(E)) = \{s: U \rightarrow E \text{ di classe } C^\infty \mid ps = \text{Id}\}.$$

DEFINIZIONE 5.5.3. Sia E un fibrato vettoriale olomorfo di rango m su una varietà complessa X . Per **base locale di E** su un aperto $U \subset X$ si intende una m -upla di sezioni olomorfe $e^1, \dots, e^m \in \Gamma(U, E)$ tali che per ogni $x \in U$ si abbia $e^1(x), \dots, e^m(x)$ base di E_x .

Se (U_i, τ_i) è una banalizzazione locale, allora per ogni base u^1, \dots, u^m di \mathbb{C}^m ed ogni indice i , le sezioni

$$e^h \in \Gamma(U_i, E), \quad e^h(x) = \tau_i^{-1}(x, u^h), \quad h = 1, \dots, m,$$

sono una base locale di E sull'aperto U_i .

Se e^1, \dots, e^m e $\epsilon^1, \dots, \epsilon^m$ sono due basi locali di E sullo stesso aperto U allora vi è un'unica applicazione $A: U \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ che in ogni punto associa la matrice di cambio base

$$(\epsilon^1, \dots, \epsilon^m) = (e^1, \dots, e^m)A.$$

Usando le banalizzazioni è immediato vedere (esercizio) che A è un'applicazione olomorfa.

Possiamo generalizzare alle forme differenziali e definire, per ogni p, q il fascio $\mathcal{A}_X^{p,q}(E)$ delle (p, q) -forme differenziali a coefficienti in E . Una sezione $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q}(E))$ su un aperto $U \subset X$ è un'applicazione che ad ogni punto $x \in U$ associa un'applicazione \mathbb{R} -multilineare alternante

$$\omega(x): \underbrace{T_x \times \dots \times T_x}_{p+q} \rightarrow E_x$$

che localmente si scrive come

$$\omega = \sum_{h=1}^m e^h \eta_h$$

con e_1, \dots, e_m base locale e η_h forma differenziale di tipo (p, q) .

Tale definizione è ben posta e non dipende dalla scelta della base locale. Data un'altra base locale $\epsilon^1, \dots, \epsilon^m$ esiste una matrice invertibile $A = (a_k^h(z))$ di funzioni olomorfe tali che $\epsilon_h = \sum_k e^k a_k^h$ e quindi se

$$\omega = \sum_{h=1}^m e^h \eta_h = \sum_{h=1}^m \epsilon^h \mu_h$$

allora $\eta_k = \sum_h a_k^h \mu_h$ e quindi $\eta_k \in \mathcal{A}^{p,q}$ per ogni k se e solo se $\mu_h \in \mathcal{A}^{p,q}$ per ogni h .

Le stesse considerazioni dicono che per ogni $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q}(E))$ è ben definita $\bar{\partial}\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E))$: localmente se $\omega = \sum_{h=1}^m e^h \eta_h$ con e^h base locale, si definisce $\bar{\partial}\omega = \sum_{h=1}^m e^h \bar{\partial}\eta_h$. Nelle notazioni precedenti, se $\omega = \sum_{h=1}^m \epsilon^h \mu_h$, allora $\eta_k = \sum_h a_k^h \mu_h$ e siccome le a_k^h sono funzioni olomorfe si ha $\bar{\partial}\eta_k = \sum_h a_k^h \bar{\partial}\mu_h$ da cui

$$\sum_{k=1}^m e^k \bar{\partial}\eta_k = \sum_{h,k} \eta_k a_k^h \bar{\partial}\mu_h = \sum_{h=1}^m e^h \bar{\partial}\mu_h,$$

e dunque la definizione di $\bar{\partial}$ non dipende dalla scelta della base locale.

Come si vede, il precedente argomento non consente in generale di definire il differenziale di de Rham d dato che i coefficienti olomorfi a_k^h non sono localmente costanti e quindi $da_k^h \neq 0$ in generale.

È chiaro che $\bar{\partial}^2 = 0$ ed il nucleo di $\bar{\partial}: \Gamma(U, \mathcal{A}^{p,0}(E)) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{A}^{p,1}(E))$ sono le forme differenziali olomorfe a valori in E , ossia quelle che in una base locale si scrivono $\sum_{h=1}^m e^h \eta_h$ con le $\eta_h \in \Omega^p$ forme differenziali olomorfe.

TEOREMA 5.5.4 (Teorema di Dolbeault). *Per ogni fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà X di dimensione n si ha*

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) = \frac{\text{Ker} \left(\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,q}(E)) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,q+1}(E)) \right)}{\bar{\partial} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,q-1}(E))}.$$

In particolare $H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) = 0$ per ogni $q > n$.

DIMOSTRAZIONE. Se E ha rango m , allora localmente E è somma diretta di m copie del fibrato banale e quindi, sempre localmente, il complesso di fasci

$$(5.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{A}^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}}$$

è somma diretta di m copie di

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}}$$

che è una successione esatta per il lemma di Dolbeault (basterebbe il $\bar{\partial}$ -Poincaré). Dunque anche (5.2) è una successione esatta ed i fasci $\mathcal{A}_X^{0,p}(E)$ sono aciclici in quanto le sezioni sono moltiplicabili per funzioni differenziabili.

La conclusione segue dunque dal teorema di de Rham delle risoluzioni acicliche. \square

Bibliografia

- [1] Andreotti, A.: Nine lectures in complex analysis. Note del Corso C.I.M.E. Complex analysis, Bressanone 1973. Editore Cremonese (1974) e ristampa a cura di Springer-Verlag (2010). [60](#)
- [2] Artin, M.: Algebra. Bollati Boringhieri, Torino (1997). [17](#), [39](#)
- [3] Eilenberg, S., Steenrod, N.: Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton (1952). [108](#)
- [4] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958). [70](#), [93](#), [100](#), [102](#)
- [5] Griffiths, P., Adams, J.: Topics in Algebraic and Analytic Geometry. Princeton Univ. Press (1974). [60](#)
- [6] Griffiths, P., Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. Wiley-Interscience publication (1978). [30](#), [34](#), [47](#)
- [7] Gunning, R., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall (1965). [23](#), [30](#), [60](#), [70](#)
- [8] Halmos, P.R.: Naive set theory. D. Van Nostrand Co. Princeton, N.J. (1960). [63](#)
- [9] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Springer Verlag GTM **52** (1977). [70](#), [75](#), [93](#), [108](#)
- [10] Huybrechts, D.: Complex geometry. Springer Verlag Universitext (2005). [75](#)
- [11] Jacobson, N.: Basic Algebra II. Freeman and Company (1989). [40](#)
- [12] Kelley, J.L.: General topology. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, (1955). [63](#)
- [13] Kempf, G. R.: Complex abelian varieties and theta functions. Springer-Verlag Universitext (1991). [40](#)
- [14] Kobayashi, S.: Differential geometry of complex vector bundles. Princeton Univ. Press (1987). [48](#)
- [15] Kodaira, K.: Complex manifolds and deformation of complex structures. Springer-Verlag (1986). [30](#), [47](#), [70](#), [108](#)
- [16] Lang, S.: Algebra. 3rd edition, Springer-Verlag (2002). [40](#), [93](#)
- [17] Lang, S.: Complex analysis. 4th edition, Springer-Verlag (1999). [60](#)
- [18] Manetti, M.: Topologia. Springer Unitext **71** (2014). [31](#), [63](#), [119](#), [123](#)
- [19] Morrow, J., Kodaira, K.: Complex manifolds. Holt, Rinehart and Winston (1971).
- [20] Serre, J.P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61**, 197-278 (1955). [70](#), [108](#)
- [21] Spanier, E.H.: Algebraic topology. McGraw-Hill (1966). [70](#), [100](#)
- [22] Tennison, B. R.: Sheaf Theory. Cambridge University Press (1975). [70](#)
- [23] Tu, Loring W.: An introduction to manifolds. Springer Universitext (2011). [41](#)
- [24] van der Waerden, B.L.: Algebra I. 7th edition Springer-Verlag (1991). [39](#), [40](#)
- [25] Voisin, C.: Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. Société Mathématique de France, Paris (2002). English translation: Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I, II. Cambridge Univ. Press.
- [26] Weibel, C.A.: An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge, (1994). [93](#), [100](#), [102](#)
- [27] Wells, R. O.: Differential analysis on complex manifolds. Springer-Verlag (1980).