1 Varietà Complesse: esercizi del 3 marzo 2004

Esercizio 1. Sia $(G, +)$ un gruppo topologico abeliano, X spazio topologico di Hausdorff, $f : G \to X$ continua. Il sottoinsieme dei periodi di f è per definizione

$$P = \{g \in G \mid f(x + g) = f(x)\ \forall x \in G\}.$$

Dimostrare che P è un sottogruppo chiuso di G. △

Esercizio 2. Sia $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ un sottrogruppo chiuso. Dimostrare che esiste una decomposizione in somma diretta di sottospazi vettoriali $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ tale che $V \subset \Gamma$, $\Gamma' = \Gamma \cap W$ è chiuso e discreto in W e $\Gamma = V \oplus \Gamma'$. △

Esercizio 3. Sia $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ un sottrogruppo chiuso e discreto. Dimostrare che $\Gamma = 0$ oppure esistono vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti tali che $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_k$. △

Esercizio 4. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un reticolo, cioè un sottogruppo generato da una base. Dimostrare che

$$\sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{|w|^k}$$

è convergente se e solo se $k > n$. △

Esercizio 5. Sia $\Gamma \subset \mathbb{C}$ il sottogruppo dei periodi di una funzione meromorfa non costante f. Provare che Γ è chiuso e discreto. △

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(z+1) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che f è sviluppabile in "serie di Fourier"

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cent(nz).$$

△

Varietà Complesse (geometria algebrica) 2003-04. M.M.