1 Varietà Complesse: esercizi del 17 marzo 2004

Esercizio 1. Siano date tre n-uple di numeri complessi $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ ed una costante positiva C tali che $|\xi_i - a_i| \geq C$ e $|\xi_i - b_i| \geq C$ per ogni i. Dimostrare che

$$C^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i - a_i} - \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i - b_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_i - b_i}{(\xi_i - a_i)(\xi_i - b_i)} \right|$$

△

Esercizio 2. Siano

$$X = S^1 \times S^1 - \{ \text{ un punto } \}, \qquad Y = S^2 - \{ \text{ tre punti } \}.$$

1. Dimostrare che X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.
2. Dimostrare che X e Y non sono omeomorfi (Sugg.: X possiede una esaustione in compatti $X = \cup_n K_n$ tale che $X - K_n$ è connesso per ogni n).
3. Convincetevi (non so come) che $X \times \mathbb{R}$ e $Y \times \mathbb{R}$ sono omeomorfi.

△

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni $k \geq 2$ la serie

$$G_k(\tau) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2-(0,0)} \frac{1}{(n + m\tau)^{2k}}$$

è una funzione olomorfa $G_k \colon \mathbb{H} = \{a + ib \in \mathbb{C} \,|\, b > 0\} \to \mathbb{C}$.
Mostrare inoltre che

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)},$$

dove $g_2 = 60G_2$ e $g_3 = 140G_3$, è olomorfa in $\mathbb{H}$. (Sugg.: il polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$ non ha radici multiple.) △

Esercizio 4. Siano $i, \omega \in \mathbb{H}$ le radici di $x^2 + 1 = 0$ e $x^2 - x + 1 = 0$ rispettivamente. Verificare che $i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$, $\omega(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ e dedurre che $G_2(\omega) = 0$, $G_3(i) = 0$. △

Esercizio 5. Nelle notazioni degli esercizi precedenti, dimostrare che, dati $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Le curve ellittiche $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ e $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau'$ sono isomorfe.
2. $J(\tau) = J(\tau')$ (ricordarsi che la curva ellittica $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ è isomorfa alla cubica piana di equazione $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$).

△

Varietà Complesse (geometria algebrica) 2003-04. M.M.