1 Varietà Complesse: esercizi del 22 marzo 2004

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^∞ e tale che $f(t) = 1$ se $|t| \leq 1$ e $f(t) = 0$ se $|t| \geq 2$.
Dimostrare che per ogni successione a_n di numeri reali esiste una successione $b_n \in (0, +\infty)$ tale che, per ogni $s < n$, vale

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| a_n \frac{\partial^s (f(b_n t)t^n)}{\partial t^s} \right| \leq 2^{s-n}.$$

Dedurre che ogni serie formale è lo sviluppo di Taylor in 0 di una funzione di classe C^∞. △

Esercizio 2. Assumendo noto il fatto che per ogni coppia di chiusi disgiunti $A, B \subset \mathbb{R}$ esiste una funzione $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^∞ tale che $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$, dimostrare che ogni chiuso C di $\mathbb{R}$ è il luogo di zeri di una opportuna funzione di classe C^∞. (Sugg.: non è restrittivo supporre che C sia compatto e quindi che anche $C_a := \{x \in \mathbb{R} \,|\, distanza(x, C) \leq a\}$ sia compatto per ogni $a > 0$.) △

Esercizio 3.

1. Sia $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[t]$ un polinomio monico di grado d in t tale che $f(0, \dots, 0) = 0$. Dimostrare che se f è irriducibile allora $f(0, \dots, 0, t) = t^d$. È vero il viceversa?
2. Sia $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[t]$ un polinomio monico di grado d in t. Dimostrare che se f è irriducibile allora esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che $f(0, \dots, 0, t) = (t - a)^d$.
3. Sia $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie irriducibile di molteplicità $d > 0$. Dimostrare che se f è irriducibile allora la componente omogenea di grado d in f è la potenza d-esima di un fattore lineare. (Sugg.: a meno di cambi lineari di coordinate la serie $f(0, y)$ ha molteplicità d. Preparare e considerare $g(z, t) = f(z, tz)z^{-d}$.)

△

Esercizio 4. Sia $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio monico irriducibile di grado $d > 1$ in y. Dimostrare che esistono interi positivi s, l tali che $q(t, y) = \dfrac{f(t^s, t^l y)}{t^{ld}}$ è un polinomio riducibile in y a coefficienti in $\mathbb{C}\{t\}$. (Sugg.: non è restrittivo supporre $f = y^d + \sum_{i \leq d-2} f_i(x) y^i$. Usare il punto 2 dell'esercizio precedente.) △

Esercizio 5. (Teorema di Newton-Puiseux)
Sia $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie irriducibile di molteplicità $d > 0$. Dimostrare che esistono due serie $a, b \in \mathbb{C}\{t\}$ di molteplicità positiva e non entrambe nulle tali che $f(a(t), b(t)) \equiv 0$. (Sugg. Induzione su d, preparazione di Weierstrass ed esercizio precedente.) △

Varietà Complesse (geometria algebrica) 2003-04. M.M.