Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Esercizi e Complementi di Geometria Analitica 2003/2004

Domenico Fiorenza e Marco Manetti

Premessa

Queste note sono il frutto di un pigro tentativo di organizzazione e revisione dei tanti foglietti distribuiti durante le lezioni e le esercitazioni di Geometria Analitica durante l'anno accademico 2003-04. Il materiale contenuto consiste principalmente in:

1. Argomenti di teoria non contenuti nel libro di testo (S. Abeasis: *Complementi di Algebra lineare e Geometria*).
2. Esercizi standard, di verifica delle conoscenze acquisite e di preparazione alle prove scritte di esame.
3. Esercizi impegnativi, per stimolare la creatività degli studenti.

Gli esercizi sono stati suddivisi per argomenti, e di alcuni di essi si danno soluzioni dettagliate. Alcuni esercizi particolarmente impegnativi sono segnalati da un asterisco.

Le notazioni possono variare leggermente da esercizio ad esercizio. Ad esempio, la i-esima coordinata del vettore $\mathbf{x}$ potrà essere indicata tanto da x_i che da x^i, mentre l'elemento di posto (i, j) della matrice A potrà essere indicato tanto da A_{ij} che da A^i_j. Per il birapporto di 4 punti distinti A, B, C, D della retta proiettiva abbiamo usato la convenzione

$$(ABCD) = \frac{A - C}{B - C} : \frac{A - D}{B - D} = \frac{(C - A)(D - B)}{(C - B)(D - A)}.$$

Ringraziamo Riccardo Salvati Manni per aver fornito alcuni esercizi qui presenti e, ovviamente, tutti quanti hanno seguito con interesse il corso.

Indice

Come disegnare una figura deforme, che sembrerà proporzionata da un certo punto di vista.

Tracciate su un cartone bianco e sottile un disegno qualunque e bucherellate il contorno. Disponete poi il cartoncino bucato a perpendicolo su una superficie orizzontale che supponiamo essere un altro cartone. Mettete una candela accesa dietro il cartone forato e disegnate sulla superficie orizzontale le linee create dalla luce: la qual cosa vi fornirà delle linee diverse. Fatta questa operazione, ritirate il cartone bucato e la candela; mettete l'occhio dove era la luce e vedrete il vostro disegno riprendere una forma regolare.

Joseph Pinetti: Divertimenti fisici, Capitolo III (1784)

1. Il teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 1.1. *Sia $p(z)$ un polinomio di grado positivo a coefficienti complessi. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.*

Dimostrazione. Iniziamo con alcune semplici osservazioni.
Il teorema è certamente vero se il polinomio è del tipo $p(z) = az^n + b$ con $n > 0$ e $a \neq 0$; infatti basta prendere come z_0 una radice n-esima di $-b/a$.
In qualsiasi momento possiamo agire sul polinomio p per moltiplicazione per una costante non nulla a e per traslazione $z \mapsto z + c$, $c \in \mathbb{C}$ costante; il teorema è vero per il polinomio $q(z) = ap(z + c)$ se e soltanto se è vero per il polinomio $p(z)$, infatti $p(z_0) = 0$ se e solo se $q(z_0 - c) = 0$.
Consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ definita come $f(z) = |p(z)|$ e mostriamo che possiede un punto di minimo assoluto. A meno di moltiplicazione per costanti possiamo supporre p polinomio monico, cioè

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

e quindi per la disuguaglianza triangolare

$$f(z) = |p(z)| \geq |z^n| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i = |z^n| \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|z|^{n-i}}\right).$$

Un semplice conto mostra che se $R > 0$ è sufficientemente grande e tale che

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{R^{n-i}} < \frac{1}{2}$$

allora per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R$ vale

$$f(z) \geq \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{R^n}{2} \geq f(0)$$

e quindi il minimo assoluto della funzione f sul chiuso e limitato $\{z \mid |z| \leq R\}$ è anche un minimo assoluto per la funzione f definita su tutto il piano complesso.
Sia dunque $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto di minimo locale per f e supponiamo per assurdo che $f(z_0) > 0$. A meno di traslazioni possiamo supporre $z_0 = 0$ ed a meno di moltiplicazione per invertibili possiamo supporre

$$p(z) = 1 - b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \qquad k \geq 1,\ b_k \neq 0.$$

Sia c una radice k-esima di $1/b_k$ e consideriamo la funzione continua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(ct) = |1 - t^k + t^{k+1}(\sum b_i c^i t^{i-k-1})|$.
Per $t << 1$, $g(t) = 1 - t^k + O(k + 1)$ e quindi 0 non può essere un punto di minimo relativo per g. Questo prova che l'ipotesi $f(0) \neq 0$ crea una contraddizione. □

2. Esercizi sui gruppi simmetrici

Indichiamo con Σ_n il gruppo simmetrico su n elementi, cioè il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ e con X_n^a l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di cardinalità a di $\{1, \ldots, n\}$.

Esercizio 2.1. Calcolare le cardinalità di Σ_n e di X_n^a. △

Esercizio 2.2. Per ogni $1 \leq a \leq n$ si consideri l'azione naturale di Σ_n su X_n^a. Dire, motivando la risposta, se tale azione è transitiva e se gli stabilizzatori sono isomorfi a gruppi simmetrici. △

Esercizio 2.3. (Principio di inclusione-esclusione).
Siano $A_1, \ldots, A_n$ sottoinsiemi di un insieme finito A; per ogni $I = \{i_1, \ldots, i_a\} \in X_n^a$

denotiamo con $\alpha(I)$ la cardinalità di $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_a}$.
Dimostrare che la cardinalità di $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ è uguale a

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{a-1} \sum_{I \in X_n^a} \alpha(I).$$

△

Traccia di soluzione. Ai fini della dimostrazione non è restrittivo supporre $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Per ogni coppia di numeri naturali positivi a, b denotiamo con $\binom{b}{a}$ il coefficiente binomiale di Newton, considerandolo uguale a 0 ogniqualvolta $b < a$. Per ogni $1 \le b \le n$ si ha quindi la formula

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{a-1} \binom{b}{a} = \sum_{a=1}^{b} (-1)^{a-1} \binom{b}{a} = 1 - (1-1)^b = 1.$$

Per ogni $x \in A$ denotiamo con $b(x)$ il numero di indici $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che $x \in A_i$. È chiaro che per ogni $a = 1, \dots, n$ il numero di multiindici $\{i_1, \dots, i_a\} \in X_n^a$ tali che $x \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_a}$ è uguale a $\binom{b(x)}{a}$.
Abbiamo quindi (perché?)

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{a-1} \sum_{I \in X_n^a} \alpha(I) = \sum_{a=1}^{n} (-1)^{a-1} \sum_{x \in A} \binom{b(x)}{a} = \sum_{x \in A} 1.$$

Esercizio 2.4. Per ogni $n \ge 1$, sia a_n il numero di permutazioni di $\{1, \dots, n\}$ che non hanno punti fissi, ovvero a_n è la cardinalità del complementare dell'unione di tutti gli stabilizzatori dell'azione di Σ_n su X_n^1. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

(Suggerimento: inclusione-esclusione). △

Esercizio 2.5. Due giocatori, dotati ciascuno di un sacchetto con i 90 numeri della tombola, effettuano il seguente gioco: ogni giocatore estrae un numero dal proprio sacchetto e lo deposita sul tavolo. Se i due numeri estratti sono identici vince il giocatore A ed il gioco termina, altrimenti si prosegue ed B vince se entrambi i giocatori arrivano a svuotare i sacchetti.
Chi, tra A e B, ha più probabilità di vittoria? △

Esercizio 2.6. Costruire un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ isomorfo al gruppo Σ_3 delle permutazioni su tre elementi. (Suggerimento: si consideri l'azione si Σ_3 su $\mathbb{R}^3$ indotta dalle permutazioni sui vettori della base canonica. Il piano di equazione $x+y+z=0$ è invariante per quest'azione). △

Soluzione. Una base del piano V definito dall'equazione $x + y + z = 0$ è costituita dai due vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che il gruppo Σ_3 è generato dai cicli $\sigma = (12)$ e $\tau = (123)$. L'azione di σ e τ su $\mathbb{R}^3$ è data da

$$\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}; \qquad \tau \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Per vedere come agisce Σ_3 su V, ci basta descrivere l'azione dei due generatori σ e τ sui vettori della base di V che abbiamo scelto. Si ha

$$\sigma(\mathbf{e}_1) = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1$$

$$\sigma(\mathbf{e}_2) = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

Dunque la matrice che rappresenta σ nella base data è $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda τ, si ha

$$\tau(\mathbf{e}_1) = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

$$\tau(\mathbf{e}_2) = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1$$

Dunque la matrice che rappresenta τ nella base data è $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ generato da S e T è il sottogruppo cercato.

3. Esercizi sulla traccia di matrici

Esercizio 3.1. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Dimostrare che si ha $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. △

Soluzione. Ricordiamo che la traccia di una matrice $k \times k$ è definita come $\operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{k} C_i^i$ Dunque

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_i^i = \sum_{i=1}^{m} \langle A^i, B_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_j^i B_i^j$$

Analogamente

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_i^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} B_j^i A_i^j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i^j B_j^i$$

Gli indici i e j sono indici "muti"; possiamo dunque scambiare il ruolo di i e j nella sommatoria ottenendo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(BA) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} A_j^i B_i^j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_j^i B_i^j \end{aligned}$$

ovvero $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Esercizio 3.2. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matrici $k \times k$. Dimostrare che $\operatorname{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = \operatorname{tr}(A_2 A_3 \cdots A_n A_1)$. Questo fatto si esprime dicendo che l'operazione

$$(A_1, \ldots, A_n) \mapsto \operatorname{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n)$$

è ciclicamente invariante (invariante per l'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sulle variabili $A_1, \ldots A_n$). △

Soluzione. Poniamo $B = A_2 A_3 \cdots A_n$. Sfruttando il risultato dimostrato nell'Esercizio 3.1, troviamo

$$\mathrm{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = \mathrm{tr}(A_1 B) = \mathrm{tr}(B A_1) = \mathrm{tr}(A_2 A_3 \cdots A_n A_1)$$

ESERCIZIO 3.3. Provare con un controesempio che, se $n \geq 3$, e σ è un elemento del gruppo di permutazioni su n elementi, in generale si ha $\mathrm{tr}(A_1 A_2 \cdots A_n) \neq \mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(n)})$. Questo fatto si esprime dicendo che l'operazione

$$(A_1, \ldots, A_n) \mapsto \mathrm{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n)$$

non è simmetricamente invariante (invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n sulle variabili $A_1, \ldots, A_n$). △

Soluzione. Ad esempio si possono prendere

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e $\sigma\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ definita da

$$\sigma(1) = 2; \quad \sigma(2) = 1; \quad \sigma(3) = 3.$$

Si ha infatti

$$\mathrm{tr}(A_1 A_2 A_3) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)}) = \mathrm{tr}(A_2 A_1 A_3) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

4. Esercizi sui prodotti scalari

ESERCIZIO 4.1. (regola del parallelogramma)
Mostrare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

△

ESERCIZIO 4.2. (Sfera di Apollonio)
Siano dati $x \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in]0, 1[$. Denotando $y = x/(1 - \lambda^2)$, provare che per ogni $z \in \mathbb{R}^3$ vale

$$\frac{\|z - x\|^2 - \lambda^2 \|z\|^2}{1 - \lambda^2} = \|z - y\|^2 - \lambda^2 \|y\|^2.$$

Dedurre che il luogo dei punti $p \in \mathbb{R}^3$ tali che $d(p, x) = \lambda d(p, 0)$ è una sfera e calcolarne raggio e centro. △

ESERCIZIO 4.3. Verificare l'identità tra prodotti scalari di vettori

$$\langle x - u, y - z \rangle - \langle x - z, y - u \rangle + \langle x - y, z - u \rangle = 0$$

e utilizzarla per dimostrare che le tre altezze di un triangolo xyz si incontrano in un punto u. △

ESERCIZIO 4.4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il piano α di equazione cartesiana $x + y + 2z = 0$ e la retta $r = \alpha^\perp$. Determinare una base ortonormale $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \alpha$ ed $\mathbf{e}_3 \in r$. △

Soluzione. Iniziamo col determinare una base (non necessariamente ortonormale) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \alpha$ e $\mathbf{v}_3 \in r$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt a questa base troveremo una base ortonormale $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ con le caratteristiche richieste. Come $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dobbiamo scegliere una base di α. Dall'equazione $x + y + 2z = 0$ ricaviamo

$$\begin{cases} x = -t_1 - 2t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

e dunque con le scelte canoniche $(t_1, t_2) = (1, 0)$ e $(t_1, t_2) = (0, 1)$ troviamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore $\mathbf{v}_3$ si trova immediatamente: è il vettore dei coefficienti dell'equazione cartesiana del piano, ovvero

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Adesso applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt per trasformare $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ in una base ortogonale $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Osserviamo che $\mathbf{v}_3$ è già ortogonale al piano generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, quindi basterà applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ prendendo poi $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3$. Si ha:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1$$

e dunque

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Infine, normalizzando i vettori $\{\mathbf{f}_i\}$ troviamo

$$\mathbf{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.5. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori complessi definite in $[-\pi, \pi]$. Se f, $g \in V$ definiamo

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Verificare che si tratta di un prodotto Hermitiano.
Si indichi con f_n la funzione definita ponendo $f_n(x) = e^{int}$, verificare che per distinti $m, n \in \mathbb{Z}$, f_n e f_m sono ortogonali. △

Esercizio 4.6. Sia $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Dimostrare che per ogni base ortonormale $u_1, \dots, u_n$ vale

$$\text{Traccia}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle Au_i, u_i \rangle.$$

△

Esercizio 4.7. Sia V uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare. Siano dati m vettori ortonormali $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tali che, per ogni $v \in V$ si abbia

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i\rangle^2.$$

Dimostrare che $v_1, v_2, \ldots, v_m$ è una base di V. △

Esercizio 4.8. Scegliendo la base canonica $\{E_i^j\}$ per lo spazio delle matrici reali $m \times n$, si ottiene un identificazione $M_{m,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$. Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^{mn}$ induce pertanto un prodotto scalare sullo spazio $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che questo prodotto scalare si può esprimere come $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$. △

Soluzione. Le coordinate di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ rispetto alla base canonica E_i^j sono semplicemente i coefficienti A_j^i della matrice. Il prodotto scalare indotto sullo spazio delle matrici dal prodotto standard in $\mathbb{R}^{mn}$ è pertanto

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_j^i B_j^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (A^T)_i^j B_j^i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle (A^T)^j, B_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} (A^T B)_j^j \\ &= \operatorname{tr}(A^T B).\end{aligned}$$

Esercizio 4.9. Sia $\| - \|_{m,n}$ la norma indotta su $M_{m,n}(\mathbb{R})$ dal prodotto scalare $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$. Dimostrare che se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, allora $\|AB\|_{m,m} \leq \|A\|_{m,n} \cdot \|B\|_{n,m}$. △

Soluzione. Per quanto dimostrato nell'Esercizio 4.8,

$$\|AB\|_{m,m}^2 = \langle AB, AB\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (AB)_j^i (AB)_j^i \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \left((AB)_j^i\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle A^i, B_j\rangle^2$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz sappiamo

$$\langle A^i, B_j\rangle^2 \leq \|A^i\|^2 \cdot \|B_j\|^2$$

da cui

$$\|AB\|_{m,m}^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \|A^i\|^2 \cdot \|B_j\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \|A^i\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \|B_j\|^2\right)$$

e si conclude utilizzando le uguaglianze

$$\sum_{i=1}^{m} \|A^i\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (A_j^i)^2 = \|A\|_{m,n}^2$$

$$\sum_{j=1}^{m} \|B_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} (B_j^i)^2 = \|B\|_{n,m}^2$$

5. Esercizi sulle isometrie di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

Esercizio 5.1. Determinare tutte le applicazioni lineari ortogonali di $\mathbb{R}^2$ in sé che mandano il vettore $(3,4)$ nel vettore $(0,5)$. △

Esercizio 5.2. Siano $\mathbf{v} = (1,0,1)$, $\mathbf{w} = (1,1,0)$. Per ognuno dei quattro casi seguenti dire, motivando al risposta, se esiste una matrice ortogonale $A \in O_3(\mathbb{R}) \subset M_3(\mathbb{R})$ tale che:

1. $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
2. $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ e $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$.
3. $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ e $A\mathbf{w} = -\mathbf{w}$.
4. $A\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$.

△

Soluzione. Il gruppo ortogonale $O_3(\mathbb{R})$ agisce come gruppo di isometrie di $\mathbb{R}^3$ che fissano l'origine. In particolare, per ogni $r > 0$, l'azione di $O_3(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^3$ trasforma la sfera $S_{\mathbf{O}}(r)$ di centro l'origine e raggio r in sé. Inoltre l'azione di $O_3(\mathbb{R})$ su $S_{\mathbf{O}}(r)$ è transitiva: dati due vettori aventi la stessa norma r è sempre possibile trovare una matrice ortogonale che trasforma il primo nel secondo. L'azione di $O_3(\mathbb{R})$ su $S_{\mathbf{O}}(r)$ non è però 2-transitiva: date due coppie di vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1)$ e $(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)$, tutti di norma r, non è sempre possibile trovare una matrice ortogonale A tale che $(A\mathbf{v}_1, A\mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)$. Infatti, essendo le trasformazioni ortogonali isometrie, una condizione necessaria per l'esistenza di tale A è $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2\rangle$ (questa condizione è anche sufficiente?). Questa discussione preliminare ci permette di risolvere immediatamente l'esercizio.

1. Si. Infatti $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2} = \|\mathbf{w}\|$.
2. Si. Basta prendere $A = \mathrm{Id}$
3. No. Infatti $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 1$, ma $\langle \mathbf{w}, -\mathbf{w}\rangle = -2$
4. Si. Infatti $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2} = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

Esercizio 5.3. Il gruppo O_n agisce per coniugio sullo spazio delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. Indichiamo con

$$\begin{aligned} \rho_P \colon M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto P \cdot M \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

la trasformazione lineare di $M_n(\mathbb{R})$ in sé indotta dalla matrice ortogonale P. Dimostrare che ρ_P è un'isometria di $M_n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. △

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \langle \rho_P(A), \rho_P(B)\rangle &= \langle PAP^{-1}, PBP^{-1}\rangle = \mathrm{tr}\left((PAP^{-1})^T PBP^{-1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left((P^{-1})^T A^T P^T PBP^{-1}\right) \end{aligned}$$

Poiché P è una matrice ortogonale, $P^T = P^{-1}$, da cui

$$\begin{aligned} \langle \rho_P(A), \rho_P(B)\rangle &= \mathrm{tr}\left((PA^T BP^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((A^T BP^{-1}P\right) \\ &= \mathrm{tr}\left((A^T B\right) = \langle A, B\rangle \end{aligned}$$

si è usata l'invarianza ciclica della traccia dimostrata nell'Esercizio 3.2 di pagina 3 sulle tracce di matrici.

Esercizio 5.4. Caratterizzare le matrici unitarie $U \in U_n$ con la proprietà che $UA = AU$ per ogni matrice Hermitiana A di ordine n e traccia nulla. (Sugg.: ogni matrice unitaria è coniugata in U_n ad una matrice diagonale.) △

Esercizio 5.5. Sia $H \subset M_2(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici hermitiane a traccia nulla.

1. Verificare che H ha una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione 3 e determinare un isomorfismo $\mathbb{R}^3 \cong H$ tale che il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$ corrisponde alla forma bilineare simmetrica
$$H \times H \to \mathbb{R}, \qquad (A, B) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Traccia}(AB).$$
2. Mostrare che per ogni matrice unitaria $U \in U_2(\mathbb{C})$ esiste $V \in U_2(\mathbb{C})$ tale che $V^2 = U$. (Sugg.: stesso suggerimento dell'Esercizio 5.4.)
3. Mostrare che per ogni matrice unitaria $U \in U_2(\mathbb{C})$ l'applicazione
$$H \to H, \qquad A \mapsto U^{-1}AU$$
è un'isometria di $\mathbb{R}^3$ di determinante 1.

△

6. Esercizi sulle matrici simmetriche

Nell'affrontare gli esercizi, può risultare utile ricordare che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile in un'opportuna base ortonormale.

Esercizio 6.1. Costruire, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$ tale che l'applicazione lineare indotta $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ trasforma il punto $(1, 0, 1)$ nel punto $(2, -1, -2)$ ed il piano $x - z = 0$ nel piano $x + 2y = 0$. △

Esercizio 6.2. Trovare, se esiste, una matrice simmetrica 4×4 tale che
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio 6.3. $(*)$ Dimostrare che per ogni coppia di vettori non nulli $v, w \in \mathbb{R}^n$ esiste una matrice simmetrica A tale che $Av = w$. △

Esercizio 6.4. Sia $W \subset M_4(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche A tali che $Av = 0$, dove $v = (1, 1, 1, 1)$. Provare che W è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione. △

Esercizio 6.5. $(*)$ sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione k. Calcolare, in funzione di k, la dimensione del sottospazio $W \subset M_n(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche A tali che $AV \subset V$. △

Esercizio 6.6. $(*)$ Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Provare che esiste B simmetrica reale tale che $B^2 = A$ se e solo se $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. △

Esercizio 6.7. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare:
1. Se A è simmetrica e $\langle Ax, x\rangle = 0$ per ogni x allora $A = 0$.
2. Vale $\langle Ax, x\rangle = 0$ per ogni x se e soltanto se $A + A^T = 0$.

△

Esercizio 6.8. Una matrice quadrata A si dice antisimmetrica se $A^T = -A$. Verificare che ogni matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ si può scrivere in modo unico come $M = A + S$, con A antisimmetrica e S simmetrica. Se A è antisimmetrica reale, verificare che A^2 è simmetrica e che le radici del polinomio caratteristico di A sono multipli reali dell'unità immaginaria. △

Esercizio 6.9. Sia A una matrice simmetrica reale $n \times n$. Esprimere la norma di A in termini degli autovalori di A. △

Soluzione. Poiché A è una matrice simmetrica reale, esiste una matrice ortogonale P tale che $PAP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$, dove i λ_i sono gli autovalori di A. Utilizzando le notazione dell'Esercizio 5.3 di Pagina 7 sulle isometrie, possiamo scrivere questo fatto come $\rho_P(A) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$. Poiché ρ_P è una isometria di $M_n(\mathbb{R})$, troviamo

$$\|A\| = \|\rho_P(A)\| = \|\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| = \sqrt{{\lambda_1}^2 + \cdots + {\lambda_n}^2}.$$

Esercizio 6.10. Sia A una matrice simmetrica reale $n \times n$. Dimostrare che A ha almeno un autovalore minore od uguale a $\|A\|/\sqrt{n}$ ed almeno un autovalore maggiore od uguale a $\|A\|/\sqrt{n}$. △

Soluzione. Siano $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ il minimo ed il massimo autovalore di A. Si ha

$$\|A\|^2 = {\lambda_1}^2 + \cdots + {\lambda_n}^2$$

da cui

$$n \cdot \lambda_{\min}^2 \leq \|A\|^2 \leq n \cdot \lambda_{\max}^2$$

ovvero

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\|A\|}{\sqrt{n}} \leq \lambda_{\max}$$

7. Esercizi su proiezioni ortogonali e riflessioni

Ricordiamo che, fissato un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$, ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come $x = v + w$, con $v \in V$ e $w \in V^\perp$. Le applicazioni lineari $P_V, R_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definite da

$$x = v + w \mapsto P_V(x) = v, \qquad x = v + w \mapsto R_V(x) = v - w$$

si dicono rispettivamente *proiezione ortogonale su V* e *riflessione di centro V*. Notiamo che $R_V + I = 2P_V$.

Esercizio 7.1. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il piano generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 2)$. Trovare le matrici 3×3 corrispondenti alla proiezione ortogonale su V ed alla riflessione di centro V. △

Esercizio 7.2. Scrivere la matrice che rappresenta nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ la riflessione S_α rispetto al piano α di equazione cartesiana $x + y + 2z = 0$. △

Soluzione. La riflessione rispetto al piano α è $S_\alpha(\mathbf{v}) = (2\pi_\alpha - \mathrm{Id})(\mathbf{v})$, dove π_α è la proiezione sul piano α. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è una base ortonormale di α, la proiezione π_α è data da

$$\pi_\alpha(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$$

Una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è stata calcolata nell'esercizio precedente. Troviamo

$$\pi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-x+y}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x-y+z}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x - 1y - 2z \\ -1x + 5y - 2z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta π_α rispetto alla base canonica ha per colonne le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si tratta pertanto della matrice

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta la riflessione S_α (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) è dunque

$$M_{S_\alpha} = 2\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Un altro modo di determinare la matrice M_{S_α} è il seguente. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ determinata nella soluzione del primo esercizio. La trasformazione lineare S_α è rappresentata nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare S_α è rappresentata dalla matrice

$$M_{S_\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1}$$

Poiché la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è ortonormale, la matrice del cambiamento di base è una matrice ortogonale, e dunque la sua inversa coincide con la trasposta:

$$M_{S_\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Nota: tra le due soluzioni proposte per questo esercizio c'è una differenza importante: nella prima non si utilizza il vettore $\mathbf{e}_3$.

Esercizio 7.3. Siano v_1 e v_2 due vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ tali che $\|v_1\| = \|v_2\|$. Dimostrare che esiste un iperpiano $W \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che la riflessione S_W rispetto a W scambia v_1 e v_2. △

Soluzione. Ricordiamo che, se α è un vettore non nullo, la riflessione rispetto all'iperpiano $\alpha^\perp$ è data da

$$S_{\alpha^\perp}(v) = v - 2\frac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \cdot \alpha$$

Poiché $v_1 \neq v_2$, il vettore $w = v_1 - v_2$ è non nullo. Sia $W = w^\perp$; l'iperpiano W è l'iperpiano cercato. Infatti

$$S_W(v_1) = v_1 - 2\frac{\langle v_1, v_1 - v_2\rangle}{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle} \cdot (v_1 - v_2)$$

$$= \frac{-\|v_1\|^2 \cdot v_1 + \|v_2\|^2 \cdot v_1 + 2\|v_1\|^2 \cdot v_2 - 2\langle v_1, v_2\rangle \cdot v_2}{\|v_1\|^2 - 2\langle v_1, v_2\rangle + \|v_2\|^2}$$

Utilizzando $\|v_1\| = \|v_2\|$ si trova

$$S_W(v_1) = \frac{2\|v_1\|^2 - 2\langle v_1, v_2\rangle}{2\|v_1\|^2 - 2\langle v_1, v_2\rangle} \cdot v_2 = v_2,$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Esercizio 7.4. Sia $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una matrice ortogonale. Dimostrare che se $A \neq \mathrm{Id}$ allora esiste un iperpiano W tale che $S_W A$ ha più punti fissi di A (al solito, S_W indica la riflessione rispetto all'iperpiano W). △

Soluzione. Supponiamo $A \neq \mathrm{Id}$. Allora $\mathrm{Fix}(A) \neq \mathbb{R}^n$. Poniamo $V = \mathrm{Fix}(A)$ e decomponiamo $\mathbb{R}^n$ come $V \oplus V^\perp$. Sia $v \in V^\perp$ diverso da zero. Poiché i punti fissi di A sono tutti in V, non può essere $A(v) = v$. Pertanto v ed $A(v)$ sono vettori distinti, ed hanno la stessa norma in quanto per ipotesi A è un'isometria. Sia $w = v - A(V)$ e sia $W = w^\perp$. Dall'esercizio precedente sappiamo che $S_W(v) = A(v)$. Inoltre, A è ortogonale e fissa V, dunque A manda $V^\perp$ in sé. Ne segue che $w = v - A(v)$ è un elemento di $V^\perp$ e dunque $V \subseteq w^\perp = W$. Ma la restrizione di S_W all'iperpiano W è l'identità e quindi anche $S_W\big|_V = \mathrm{Id}\big|_V$. Consideriamo adesso l'applicazione lineare $S_W A$. Si ha

$$S_W A\big|_V = \mathrm{Id}\big|_V$$

e dunque $\mathrm{Fix}(S_W A) \geq \mathrm{Fix}(A)$. Inoltre da $S_W(v) = A(v)$ segue

$$S_W A(v) = {S_W}^2(v) = v$$

Pertanto $S_W A$ fissa anche il vettore v che non veniva fissato da A e dunque $\mathrm{Fix}(S_W A) > \mathrm{Fix}(A)$.

Esercizio 7.5. Sia $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una matrice ortogonale. Dimostrare che esistono k riflessioni rispetto ad iperpiani tali che $A = S_1 \cdots S_k$, con $k \leq n$ (con $k = 0$ nel caso particolare $A = \mathrm{Id}$). △

Soluzione. Vogliamo dimostrare che esistono $S_1, \ldots, S_k$ tali che $S_1 \cdots S_k = A$. Questo è equivalente a chiedere che esistano $S_1, \ldots, S_k$ tali che $S_k \cdots S_1 A = \mathrm{Id}$, ovvero $\mathrm{Fix}(S_k \cdots S_1 A) = \mathbb{R}^n$. Sfruttiamo il risultato dell'esercizio precedente. Se $A = \mathrm{Id}$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti (vedi esercizio precedente) esiste una riflessione S_1 tale che $\mathrm{Fix}(S_1 A) > \mathrm{Fix}(A)$. Poniamo $B_1 = S_1 A$; si tratta ancora di una matrice ortogonale. Se $\mathrm{Fix}(B_1) = \mathbb{R}^n$ abbiamo finito, altrimenti esiste una riflessione S_2 tale che $\mathrm{Fix}(S_2 B_1) > \mathrm{Fix}(B_1)$. Procedendo in questo modo costruiamo una catena crescente di sottospazi di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Fix}(A) < \mathrm{Fix}(S_1 A) < \mathrm{Fix}(S_2 S_1 A) < \cdots$$

Dopo al più $n - \dim \mathrm{Fix}(A)$ passi il procedimento deve avere termine: $\mathrm{Fix}(S_k \cdots S_1 A) = \mathbb{R}^n$ per qualche $k \leq n - \dim \mathrm{Fix}(A)$ e dunque, in particolare, per qualche $k \leq n$.

Esercizio 7.6. Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^n$, definiamo la simmetria $S_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ come

$$S_u(x) = \begin{cases} x & \text{se } u = 0, \\ x - 2\dfrac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u & \text{se } u \neq 0 \end{cases}$$

Dimostrare che S_u è la riflessione di centro $u^\perp$. △

Esercizio 7.7. Sia $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione ortogonale definita dalla matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Scrivere A come composizione di due simmetrie. △

Esercizio 7.8. Provare che, per ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$, la riflessione R_V è rappresentata nella base canonica da una matrice simmetrica ed ortogonale. △

Esercizio 7.9. (∗) Dimostrare che ogni matrice simmetrica ed ortogonale è la riflessione di centro un opportuno sottospazio. △

Esercizio 7.10. Il Signor B. fu colto da crisi maniacale mentre si stava dedicando al suo passatempo preferito: calcolare matrici di proiezioni ortogonali su piani di $\mathbb{R}^3$. L'ultima matrice, rimasta incompiuta, è

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Riuscite a dirmi su quale piano il Signor B. stava proiettando ed a completare la matrice? △

Soluzione. Indichiamo con A la matrice lasciata incompiuta dal signor B. ; di questa matrice sappiamo tre cose:

1. A rappresenta una proiezione e dunque $A^2 = A$;
2. inoltre si tratta di una proiezione ortogonale, dunque A è simmetrica;
3. infine l'immagine di A è un piano e dunque rango$A = 2$.

Poiché A è simmetrica,

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & x \\ 1/2 & y & z \\ x & z & t \end{pmatrix},$$

per certi numeri reali x, y, z, t che dobbiamo determinare. Dalla relazione $A^2 = A$ otteniamo

$$A_1^1 = (A^2)_1^1 = \langle A^1, A_1 \rangle$$

ovvero

$$1/2 = 1/2 + x^2$$

da cui si ricava $x = 0$. Ne segue

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & y & z \\ 0 & z & t \end{pmatrix},$$

Di nuovo, da $A^2 = A$ segue

$$A_2^1 = (A^2)_2^1 = \langle A^1, A_2 \rangle$$

ovvero

$$1/2 = 1/4 + (1/2)y$$

da cui si ricava $y = 1/2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & z \\ 0 & z & t \end{pmatrix},$$

Utilizziamo ancora la relazione $A^2 = A$:

$$A_2^2 = (A^2)_2^2 = \langle A^2, A_2 \rangle$$

ovvero

$$1/2 = 1/4 + z^2$$

da cui si ricava $z = 0$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

Rimane da determinare t; utilizzando di nuovo la relazione $A^2 = A$ troviamo

$$A_3^3 = (A^2)_3^3 = \langle A^3, A_3 \rangle$$

ovvero

$$t = t^2$$

Ci sono pertanto due possibilità: $t = 0$ oppure $t = 1$. Ma la matrice A deve avere rango 2, dunque non può essere $t = 0$. Ne segue $t = 1$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il piano su cui si proietta è chiaramente quello generato dai due vettori $(1/2, 1/2, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Esercizio 7.11. $(*)$ Provare che una matrice A rappresenta, nella base canonica, la proiezione ortogonale su di un sottospazio se e solo se è simmetrica e $A^2 = A$. △

Esercizio 7.12. $(*)$ Dimostrare che una matrice ortogonale è diagonalizzabile se e soltanto se è simmetrica. △

Soluzione. L'implicazione A simmetrica implica A diagonalizzabile è ovvia (ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$). Dimostriamo l'implicazione inversa. Sia $A \in O_n(\mathbb{R})$ diagonalizzabile. La diagonalizzabilità di A significa che esiste una base di autovettori per A:

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \text{ autovettore di } A} V_\lambda,$$

dove V_λ indica l'autospazio di A relativo all'autovalore λ. Ma A è anche ortogonale, dunque i suoi autovalori possono essere solamente ± 1. Infatti se $\mathbf{v}$ è un autovettore di autovalore λ, allora

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|A\mathbf{v}\|^2 = \|\lambda\mathbf{v}\|^2 = \lambda^2\|\mathbf{v}\|$$

da cui $\lambda^2 = 1$. Dunque

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_{-1}$$

Dimostriamo adesso che i due autospazi V_1 V_{-1} sono ortogonali tra loro. Per far questo consideriamo due vettori: $\mathbf{v}_1 \in V_1$ e $\mathbf{v}_{-1} \in V_{-1}$. Si ha

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1} \rangle = \langle A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_{-1} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_{-1} \rangle = -\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1} \rangle$$

da cui

$$2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1} \rangle = 0$$

e dunque $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1} \rangle = 0$. Ma allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A (perché?) e dunque esiste una matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = D$, con D diagonale. Ne segue $A = PDP^{-1} = PDP^T$ e quindi

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T = A$$

ovvero A è simmetrica, come volevamo dimostrare.

8. Esercizi sullo spazio vettoriale duale

Esercizio 8.1. Si considerino i seguenti vettori di $V = \mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,2)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,1,1)$. Si verifichi che formano una base.
Detta $e_1^*, e_2^*, e_3^* \in V^*$ la corrispondente base duale, calcolare $(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(1,-1,-2)$. △

Esercizio 8.2. Siano v_1, v_2 vettori non nulli di uno spazio vettoriale (reale o complesso) V e sia

$$W = \{f \in V^* \mid f(v_1 + v_2) = f(v_1) - f(v_2)\}.$$

Provare che W è un sottospazio vettoriale di V^* e se ne calcoli la dimensione. △

Esercizio 8.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su di un campo $\mathbb{K}$. Mostrare che ogni sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$ è il nucleo di un funzionale lineare $f \in V^*$. Inoltre, dati $f, g \in V^*$, vale $\ker f = \ker g$ se e solo se esiste una costante invertibile $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f = \lambda g$. △

Esercizio 8.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $g_1, \ldots, g_n, f \in V^*$. Dimostrare che

$$\cap_{i=1}^n \ker g_i \subset \ker f$$

se e solo se f è combinazione lineare di $g_1, \ldots, g_n$. △

Esercizio 8.5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f_1, \ldots, f_n$ una base di V^*. Si denoti

$$H_0 = \{v \in V \mid \sum f_i(v) = 0\}, \qquad H_i = \ker f_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Sia $A\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $AH_i \subset H_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Provare che A è un multiplo dell'identità. △

Esercizio 8.6. Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di uno spazio vettoriale reale V e $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ la corrispondente base duale. Per ogni coppia di funzionali lineari $f\colon V \to \mathbb{R}$, $g\colon V^* \to \mathbb{R}$ definiamo

$$b(f,g) = \sum_{i=1}^n f(e_i) g(e_i^*) \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $b(f,g)$ non dipende dalla scelta della base. (Suggerimento: se $i\colon V \to V^{**}$ denota l'isomorfismo naturale, scrivere $g = i(v)$.) △

Esercizio 8.7. Sia V uno spazio vettoriale su di un campo infinito.

1. Dimostrare che V non è unione finita di sottospazi vettoriali propri.
2. Dati $v_1, \ldots, v_s$ vettori non nulli di V, mostrare che esiste $f \in V^*$ tale che $f(v_i) \neq 0$ per ogni i.

△

Esercizio 8.8. Siano V, W spazi vettoriali su di un campo $\mathbb{K}$ e V^* il duale di V. Siano $f, g\colon W \to V^*$ applicazioni lineari iniettive.
Dimostrare che, se $\ker f(x) = \ker g(x)$ per ogni $x \in W$ allora esiste una costante $a \in \mathbb{K}$ tale che $f = ag$. (Sugg.: Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di W, porre $e_0 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ e provare che $f(e_i)$, $g(e_i)$ sono linearmente dipendenti per ogni $i = 0, \ldots, n$). △

9. Forme bilineari

Sia V uno spazio di dimensione finita su di un campo $\mathbb{K}$; un'applicazione

$$\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$$

si dice una *forma bilineare* se per ogni $v \in V$ le due applicazioni

$$\varphi(-,v)\colon V \to \mathbb{K}, \qquad w \mapsto \varphi(w,v),$$

$$\varphi(v,-)\colon V \to \mathbb{K}, \qquad w \mapsto \varphi(v,w)$$

sono lineari. In altri termini φ è bilineare se per ogni terna di vettori $v,w,z \in V$ e per ogni coppia di scalari $a,b \in \mathbb{K}$ vale

$$\varphi(v, aw+bz) = a\varphi(v,w) + b\varphi(v,z), \qquad \varphi(aw+bz, v) = a\varphi(w,v) + b\varphi(z,v).$$

Se $A\colon W \to V$ è un'applicazione lineare, allora l'applicazione

$$A^*\varphi\colon W \times W \to \mathbb{K}, \qquad A^*\varphi(x,y) = \varphi(Ax, Ay)$$

è bilineare.

Lemma 9.1. *Se $e_1, \dots, e_n$ è una base fissata di V, allora per ogni n^2-upla di scalari φ_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ esiste unica un'applicazione bilineare $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(e_i, e_j) = \varphi_{ij}$ per ogni i,j.*

Dimostrazione. *Esistenza.* Se $x = \sum x_i e_i$ e $y = \sum y_i e_i$, basta considerare

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j} \varphi_{ij} x_i y_j.$$

Unicità. Se φ è una forma bilineare su V; utilizzando la bilinearità segue che

$$\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

e quindi φ è univocamente definita dagli scalari $\varphi(e_i, e_j)$. □

Si noti che se B è la matrice di coefficienti $b_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, allora la relazione

$$\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

può essere scritta come

$$\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = x^T B y$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Definizione 9.2. Una forma bilineare $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ si dice:

1. *Simmetrica* se $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ per ogni $x,y \in V$.
2. *Antisimmetrica* se $\varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 0$ per ogni $x,y \in V$.
3. *Alternante* se $\varphi(x,x) = 0$ per ogni $x \in V$.

È facile osservare che ogni forma alternante è anche antisimmetrica, infatti per ogni $x,y \in V$

$$0 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) = \varphi(x,y) + \varphi(y,x).$$

Viceversa se φ è antisimmetrica ed il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2 (cioè $2 := 1+1 \neq 0$) allora φ è anche alternante: infatti, ponendo $x = y$ vale $\varphi(x,x) + \varphi(x,x) = 0$.

Forme quadratiche e bilineari simmetriche. Da questo momento supporremo che $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ (e quindi anche $4, 8, 16, \ldots \neq 0$).
Se $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare simmetrica, definiamo la *forma quadratica* associata come l'applicazione

$$\Phi\colon V \to \mathbb{K}, \qquad \Phi(v) = \varphi(v, v).$$

Notiamo che per ogni coppia di vettori $x, y \in V$ vale

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y))$$

e quindi ogni forma bilineare simmetrica è univocamente determinata dalla forma quadratica associata; in particolare la restrizione di Φ ad un sottospazio vettoriale $W \subset V$ è identicamente nulla se e solo se la restrizione di φ a $W \times W$ è identicamente nulla.

Esempio 9.3.
1. Il prodotto scalare canonico su $V = \mathbb{R}^n$ è una forma bilineare simmetrica.
2. Il *piano iperbolico* su $\mathbb{K}$ si definisce come lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^2$ dotato della forma bilineare simmetrica
$$U\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$
3. Abbiamo visto che su $\mathbb{K}^n$ ogni forma bilineare prende la forma $x^T B y$ per un'opportuna matrice B. Tale forma è simmetrica se e solo se la matrice B è simmetrica.

Definizione 9.4. Il *nucleo* di una forma bilineare simmetrica φ è il sottospazio vettoriale

$$\ker \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v, w) = 0 \ \forall w \in V\} = \{v \in V \mid \varphi(v, -) = 0\}$$

e la *nullità* di φ è la dimensione si $\ker \varphi$.

La forma φ si dice *degenere* se $\ker \varphi \neq 0$, *nondegenere* se $\ker \varphi = 0$.

In altri termini φ è nondegenere se e solo se per ogni $v \neq 0$ esiste $w \in V$ tale che $\varphi(v, w) \neq 0$. Bisogna fare attenzione alla reale possibilità che la restrizione di una forma nondegenere ad un sottospazio vettoriale proprio possa essere degenere.

Esercizio 9.5. Il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ed il piano iperbolico sono nondegeneri. Il nucleo della forma $x^T B y$ su $\mathbb{K}^n$ è uguale al nucleo della matrice simmetrica B. △

Sia $\Phi\colon V \to \mathbb{K}$ la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica φ. Per ogni applicazione lineare $A\colon W \to V$ poniamo $A^*\Phi(x) = \Phi(Ax)$. Poiché

$$A^*\Phi(x) = \Phi(Ax) = \varphi(Ax, Ax) = A^*\varphi(x, x)$$

si osserva immediatamente che $A^*\Phi\colon W \to \mathbb{K}$ è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica $A^*\varphi$.

Definizione 9.6. Diremo che due forme bilineari simmetriche $\varphi, \psi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sono *congruenti* se esiste un'applicazione lineare invertibile $A\colon V \to V$ tale che $\varphi = A^*\psi$.
Diremo che due forme quadratiche $\Phi, \Psi\colon V \to \mathbb{K}$ sono *congruenti* se esiste un'applicazione lineare invertibile $A\colon V \to V$ tale che $\Phi = A^*\Psi$.

Lemma 9.7.
1. *Due forme bilineari simmetriche sono congruenti se e solo se le forme quadratiche associate sono congruenti.*
2. *La congruenza è una relazione di equivalenza sull'insieme delle forme bilineari simmetriche e/o quadratiche.*

Dimostrazione. Siano Φ, Ψ le forme quadratiche associate a due forme bilineari simmetriche φ, ψ. Se esiste $A\colon V \to V$ lineare invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$ allora per ogni $x \in V$ vale $\Phi(v) = \varphi(v, v) = \psi(Ax, Ax) = A^*\psi(x, x)$ e quindi $\Phi = A^*\Psi$.
Viceversa se $\Phi = A^*\Psi$ allora per ogni $x, y \in V$ vale

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)) = \frac{1}{2}(\Psi(A(x+y)) - \Psi(Ax) - \Psi(Ay)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Psi(Ax + Ay) - \Psi(Ax) - \Psi(Ay)) = \psi(Ax, Ay)$$

e quindi $\varphi = A^*\psi$.
Se $A, B\colon V \to V$ sono lineari invertibili allora

$$(AB)^*\varphi(x, y) = \varphi(ABx, ABy) = A^*\varphi(Bx, By) = A^*B^*\varphi(x, y)$$

da cui segue che $(AB)^*\varphi = A^*B^*\varphi$.
Denotiamo con $\sim$ la relazione di congruenza, cioè $\varphi \sim \psi$ se e soltanto se esiste $A\colon V \to V$ lineare invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$. Tale relazione è:

1. *Riflessiva* poiché $I^*\varphi = \varphi$, essendo I l'identità su V.
2. *Simmetrica* poiché se $\varphi = A^*\psi$ allora $(A^{-1})^*\varphi = (A^{-1})^*A^*\psi = (A^{-1}A)^*\psi = \psi$.
3. *Transitiva* poiché se $\varphi = A^*\psi$ e $\psi = B^*\eta$ allora $\varphi = A^*B^*\eta = (AB)^*\eta$.

□

Si noti che se due forme bilineari simmetriche φ, ψ sono congruenti, diciamo $\varphi = A^*\psi$ e $e_1, \dots, e_n$ è una base di V, allora $\epsilon_1 = Ae_1, \dots, \epsilon_n = Ae_n$ è ancora una base di V e vale $\varphi(e_i, e_j) = \psi(\epsilon_i, \epsilon_j)$ per ogni i, j.
Viceversa se esistono due basi $e_1, \dots, e_n$ e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ di V tali che $\varphi(e_i, e_j) = \psi(\epsilon_i, \epsilon_j)$ per ogni i, j, allora, detta A l'applicazione lineare tale che $Ae_i = \epsilon_i$, allora $\varphi = A^*\psi$.

Lemma 9.8. *Siano $\varphi, \psi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ forme bilineari simmetriche e $A\colon V \to V$ invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$. Allora $A(\ker\varphi) = \ker\psi$. In particolare la nullità di una forma bilineare simmetrica è invariante per congruenza.*

Dimostrazione. Sia $v \in V$, poiché A^{-1} è surgettiva si ha che $v \in \ker\varphi$ se e solo se $\varphi(v, A^{-1}w) = 0$ per ogni w. Siccome $\varphi(v, A^{-1}w) = \psi(Av, w)$ ne segue che $v \in \ker\varphi$ se e soltanto se $Av \in \ker\psi$. □

Definizione 9.9. Sia φ una forma bilineare simmetrica su V; due vettori $x, y \in V$ si dicono φ-ortogonali se $\varphi(x, y) = 0$.
Una base $e_1, \dots, e_n$ di V si dice φ-ortogonale se $\varphi(e_i, e_j) = 0$ per ogni $i \neq j$.

Rispetto ad una base φ-ortogonale $e_1, \dots, e_n$, la forma quadratica associata prende la forma

$$\Phi(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2, \qquad \lambda_i = \Phi(e_i), \quad x = \sum x_i e_i.$$

Se ordiniamo gli indici in modo tale che $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$ e $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$ allora per ogni $x = \sum x_i e_i$ e per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\varphi(x, e_j) = x_j\lambda_j$ e quindi $x \in \ker\varphi$ se e solo se $x_j\lambda_j = 0$ per ogni j se e solo se $x_j = 0$ per ogni $j > s$. Ne segue che il nucleo di φ coincide con il sottospazio vettoriale generato da $e_1, \dots, e_s$; abbiamo quindi dimostrato il seguente

Corollario 9.10. *Il numero di indici i tali che $\varphi(e_i, e_i) = 0$, calcolati rispetto ad una base φ-ortogonale $e_1, \dots, e_n$ non dipende dalla scelta della base ed è un invariante per congruenza.*

Rimane da vedere che è sempre possibile trovare basi φ-ortogonali. Questo segue dal seguente

Teorema 9.11. *Ogni forma bilineare simmetrica φ ammette basi φ-ortogonali.*

Dimostrazione. Diamo due distinte dimostrazioni del teorema: la prima, breve ed elegante, mostrerà solamente l'esistenza. La seconda, simile al procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, darà anche un metodo di costruzione della base.

Prima dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su $n = \dim V$; se $n = 1$ qualsiasi vettore non nullo è una base φ-ortogonale. Se $n > 1$ si possono avere due casi, nel primo Φ è identicamente nulla e quindi anche φ è nulla ed ogni base è φ-ortogonale. Se invece esiste $v_1 \in V$ tale che $\varphi(v_1, v_1) \neq 0$ allora denotiamo $W = \{w \in V \mid \varphi(v_1, w) = 0\}$. Poiché W è il nucleo dell'applicazione lineare $\varphi(v_1, -)\colon V \to \mathbb{K}$ si ha $\dim W \geq n - 1$ e, siccome $v_1 \notin W$ si ha $\dim W = n - 1$ e $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$. Per induzione esiste una base $v_2, \dots, v_n \in W$ φ-ortogonale. È allora chiaro che $v_1, v_2, \dots, v_n$ è la base cercata.

Seconda dimostrazione. Diremo che una base $e_1, \dots, e_n$ è k-ortogonale se $\varphi(e_i, e_j) = 0$ per ogni $i < k$ e per ogni $j > i$. Ogni base è 1-ortogonale. Illustriamo un algoritmo che permette, a partire da una base k-ortogonale di trovarne un'altra $k+1$-ortogonale.
1) Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di k-ortogonale, se $\varphi(e_k, e_j) = 0$ per ogni $j > k$ allora la base è già $k+1$-ortogonale e non c'è da faticare. Altrimenti sia $l \leq n$ il minimo indice tale che $\varphi(e_k, e_l) \neq 0$. Se $k = l$ poniamo $\epsilon_i = e_i$ per ogni i e andiamo direttamente al punto 3), se invece $l > k$ passare prima dal punto 2).
2) Se $\varphi(e_k, e_l) \neq 0$, dalla formula $\varphi(e_k + e_l, e_k + e_l) - \varphi(e_k - e_l, e_k - e_l) = 4\varphi(e_k, e_l) \neq 0$ segue che i due addendi al primo membro non possono essere entrambi nulli e possiamo certamente trovare $a \in \{1, -1\} \subset \mathbb{K}$ in modo che $\varphi(e_k + ae_l, e_k + ae_l) \neq 0$. La base $\epsilon_i = e_i$ se $i \neq k$ e $\epsilon_k = e_k + ae_l$ è k-ortogonale e soddisfa la condizione $\varphi(\epsilon_k, \epsilon_k) \neq 0$.
3) Poniamo $v_i = \epsilon_i$ per ogni $i \leq k$, mentre se $i > k$ poniamo

$$v_i = \epsilon_i - \frac{\varphi(\epsilon_i, \epsilon_k)}{\varphi(\epsilon_k, \epsilon_k)}\epsilon_k.$$

Si verifica facilmente che $v_1, \dots, v_n$ è una base $(k+1)$-ortogonale.
Partendo da una qualsiasi base, ripetendo il percorso n volte arriviamo ad una base n-ortogonale che, per definizione, è una base φ-ortogonale. $\square$

Definizione 9.12. Il *rango* di una forma bilineare simmetrica $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è uguale a

$$r(\varphi) = \dim V - \dim \ker \varphi.$$

Essendo la dimensione del nucleo un invariante per congruenza, anche il rango è un invariante per congruenza.
Su $\mathbb{K}^n$, con base canonica $b_1, \dots, b_n$, ogni forma bilineare simmetrica φ si può scrivere come $\varphi(x, y) = x^T By$, dove B è la matrice di coefficienti $B_{ij} = \varphi(b_i, b_j)$.
Se $A\colon V \to V$ è lineare invertibile, allora $A^*\varphi(x, y) = \varphi(Ax, Ay) = x^T A^T BAy$ e quindi $A^T BA$ è la matrice corrispondente alla forma $A^*\varphi$. Ne segue che *a forme bilineari simmetriche congruenti corrispondono matrici simmetriche congruenti*, dove due matrici B, C si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile A tale che $C = A^T BA$.

La forma quadratica corrispondente ad una matrice simmetrica B è

$$\Phi(x) = x^T Bx = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}x_i x_j = \sum_{i\leq j} q_{ij}x_i x_j,$$

dove $q_{ii} = B_{ii}$ e $q_{ij} = B_{ij} + B_{ji} = 2B_{ij}$ se $i < j$.

Lemma 9.13. *Sia B una matrice simmetrica, il nucleo della forma bilineare $\varphi(x, y) = x^T By$ è uguale al nucleo di B. In particolare φ e B hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Se $By = (a_1, \dots, a_n)^T$ allora $x^T By = \sum a_i x_i$ e quindi $y \in \ker \varphi$ se e solo se $a_i = 0$ per ogni i. □

Il caso complesso. Supponiamo adesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e dimostriamo il seguente

Teorema 9.14. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Due forme bilineari simmetriche $\varphi, \psi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Sia $z_1, \dots, z_n$ un sistema di coordinate lineari su V. Mostriamo che ogni forma quadratica Φ di rango r è congruente alla forma standard

$$I_r(z) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2.$$

Consideriamo una base φ-ortogonale $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, a meno di permutazioni di indici abbiamo $\Phi(\epsilon_i) = 0$ se $i > r$ e $\Phi(\epsilon_i) = \lambda_i \neq 0$ se $i \leq r$. Scegliamo per ogni $i \leq r$ una radice quadrata μ_i di λ_i.
Consideriamo la nuova base

$$v_i = \epsilon_i \text{ se } i > r, \qquad v_i = \frac{\epsilon_i}{\mu_i} \text{ se } i \leq r.$$

Per costruzione vale $\Phi(v_i) = 0$ se $i > r$ e $\Phi(v_i) = 1$ se $i \leq r$ e quindi Φ è congruente alla forma I_r. □

Il caso reale.

Definizione 9.15. Una forma quadratica $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ su di uno spazio vettoriale reale V si dice:

1. *definita positiva* (e talvolta scriveremo $\Phi > 0$) se $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in V$, $x \neq 0$.
2. *definita negativa* ($\Phi < 0$) se $\Phi(x) < 0$ per ogni $x \in V$, $x \neq 0$, o equivalentemente se $-\Phi$ è definita positiva.
3. *semidefinita positiva* ($\Phi \geq 0$) se $\Phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in V$.
4. *semidefinita negativa* ($\Phi \leq 0$) se $\Phi(x) \leq 0$ per ogni $x \in V$, o equivalentemente se $-\Phi$ è semidefinita positiva.

Ad esempio la forma quadratica associata al prodotto scalare canonico è definita positiva. Una forma bilineare simmetrica si dice un *prodotto scalare* se la forma quadratica associata è definita positiva.

Se φ è una forma bilineare simmetrica, in un sistema di coordinate $x_1, \dots, x_n$ corrispondente ad una base φ-ortogonale, la forma quadratica associata si scrive

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

È immediato osservare che $\Phi > 0$ (risp.: $\Phi \geq 0$, $\Phi < 0$, $\Phi \leq 0$ se e solo se $\lambda_i > 0$ (risp.: $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i < 0$, $\lambda_i \leq 0$) per ogni $i = 1, \dots, n$.

Lemma 9.16. *Sia $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, $A\colon V \to V$ lineare invertibile e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora la restrizione di $A^*\Phi$ a W è definita positiva se e solo se lo è anche la restrizione di Φ a AW.*
Identico risultato si ottiene sostituendo il termine definita con semidefinita e/o positiva con negativa.

Dimostrazione. Basta ricordarsi che per ogni $w \in W$ vale $A^*\Phi(w) = \Phi(Aw)$. □

Dal precedente lemma segue immediatamente che, per ogni forma quadratica Φ, i due numeri

1. $\Phi_+ =$ massima dimensione di un sottospazio $W \subset V$ tale che la restrizione di Φ a W è definita positiva.
2. $\Phi_- = (-\Phi)_+ =$ massima dimensione di un sottospazio $W \subset V$ tale che la restrizione di Φ a W è definita negativa.

sono invarianti per congruenza.

Definizione 9.17. Il numero intero $\sigma = \Phi_+ - \Phi_-$ è detto *segnatura* della forma quadratica Φ. (Alcuni intendono per segnatura la coppia di numeri (Φ_+, Φ_-).)

Teorema 9.18 (Teorema di Sylvester). *Data la forma quadratica, scritta, rispetto ad una opportuna base, in forma diagonale,*

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,$$

si considerino i numeri

1. $p =$ *numero di indici i tali che* $\lambda_i > 0$.
2. $q =$ *numero di indici i tali che* $\lambda_i < 0$.

Allora vale $\Phi_+ = p$ *e* $\Phi_- = q$. *In particolare p e q non dipendono dalla particolare base* φ*-ortogonale scelta e sono invarianti per congruenza.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare $\Phi_+ = p$: infatti considerando la forma quadratica opposta i coefficienti λ_i cambiano tutti di segno e $(-\Phi)_+ = \Phi_-$. A meno di permutazione di indici possiamo supporre $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$ e $\lambda_{p+q+1}, \dots, \lambda_n = 0$.
Sia $L \subset V$ il sottospazio definito dalle equazioni $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$ e denotiamo con $\pi\colon V \to L$ la proiezione sulle prime p coordinate $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.
La restrizione di Φ al sottospazio L è definita positiva e quindi, per definizione di Φ_+, si ha $p \leq \Phi_+$.
Viceversa, sempre per definizione di Φ_+, esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di dimensione Φ_+ tale che $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in W$, $x \neq 0$.
Dimostriamo che l'applicazione lineare $\pi\colon W \to L$ è iniettiva; da questo seguirà che $\Phi_+ = \dim W \leq \dim L = p$.
Sia dunque $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$ tale che $\pi(x) = 0$, ciò significa che $x_1 = \dots = x_p = 0$ e quindi che $\Phi(x) = \sum_{i>p} \lambda_i x_i^2 \leq 0$. D'altra parte Φ è definita positiva su W e la condizione $\Phi(x) \leq 0$ implica necessariamente $x = 0$. □

Corollario 9.19. *Due forme quadratiche definite su di uno spazio vettoriale reale V sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango e la stessa segnatura.*

Dimostrazione. Fissiamo un isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^n$ (cioè fissiamo una base); consideriamo poi, per ogni coppia di interi positivi p, q tali che $p + q \leq n$, la forma quadratica

$$I_{p,q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

e dimostriamo che ogni forma quadratica è congruente ad $I_{p,q}$ per opportuni p, q. Notiamo poi che, per il teorema di Sylvester gli interi p, q sono invarianti per congruenza e sono determinati dal rango $r = p + q$ e dalla segnatura $\sigma = p - q$.
Sia dunque Φ una forma quadratica; sappiamo che esiste un sistema di coordinate lineari $y_1, \dots, y_n$ su $\mathbb{R}^n$ rispetto al quale

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

A meno di permutazioni di indici possiamo assumere $\lambda_i > 0$ se $i \leq p$, $\lambda_i < 0$ se $p < i \leq p+q$ e $\lambda_i = 0$ se $i > p+q$. Nel sistema di coordinate

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{\lambda_i}\, y_i & \text{se } i \leq p \\ z_i = \sqrt{-\lambda_i}\, y_i & \text{se } p < i \leq p+q \\ z_i = y_i & \text{se } p+q < i \end{cases}$$

la forma quadratica diventa

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} z_i^2$$

che è congruente a $I_{p,q}$. □

Esempio 9.20. Calcoliamo rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

Denotiamo con φ la forma bilineare simmetrica associata a Φ. Nella base canonica b_1, b_2, b_3 la matrice simmetrica corrispondente $B = (\varphi(b_i, b_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applichiamo l'algoritmo di ortogonalizzazione; poiché $\varphi(b_1, b_1) \neq 0$, si passa alla base

- $c_1 = b_1 = (1, 0, 0)$
- $c_2 = b_2 - \dfrac{\varphi(b_2, b_1)}{\varphi(b_1, b_1)} b_1 = b_2 + b_1 = (1, 1, 0)$
- $c_3 = b_3 - \dfrac{\varphi(b_3, b_1)}{\varphi(b_1, b_1)} b_1 = b_3 + b_1 = (1, 0, 1)$

La matrice $C = (\varphi(c_i, c_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ripete l'algoritmo costruendo la nuova base

- $d_1 = c_1 = (1, 0, 0)$
- $d_2 = c_2 = (1, 1, 0)$
- $d_3 = c_3 - \dfrac{\varphi(c_3, c_2)}{\varphi(c_2, c_2)} c_2 = c_3 - c_2 = (0, -1, 1)$

La matrice $D = (\varphi(d_i, d_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per il teorema di Sylvester, la forma Φ ha rango 2 e segnatura 0 ($p = q = 1$).

Definizione 9.21. Un vettore $x \in V$ si dice *isotropo* (rispetto ad una forma quadratica Φ) se $\Phi(x) = 0$.

Esercizio 9.22. Sia φ una forma bilineare simmetrica reale di rango r e segnatura σ. Provare:

1. $r - \sigma$ è pari.
2. φ è semidefinita positiva se e solo se $r = \sigma$.
3. φ è semidefinita negativa se e solo se $r = -\sigma$.
4. φ è semidefinita se e solo se ogni vettore isotropo appartiene al nucleo di φ.
5. Usare i punti 1, 2 e 4 per trovare, senza bisogno di far calcoli, rango e segnatura della forma quadratica dell'Esempio 9.20.

△

10. Il teorema di Cartesio

Teorema 10.1. *Sia $p(t)$ un polinomio di grado positivo a coefficienti reali. Il numero di radici reali positive, contate con molteplicità, di p è minore od uguale al numero dei cambiamenti di segno della successione ordinata dei coefficienti di p, dove i coefficienti nulli devono essere omessi .*

Ad esempio, il numero dei cambiamenti di segno di t^3+t^2-t+1 è 2 mentre quello di t^4+t^2+2 è 0. Denotiamo con $s(p(t))$ il numero dei cambiamenti di segno.
Prima di affrontare la dimostrazione, diamo una diversa caratterizzazione di $s(p(t))$.
Supponiamo il polinomio di grado n e scriviamo $p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $a_n \neq 0$
Chiameremo *serpente di lunghezza h in $p(t)$* una successione strettamente decrescente di interi $n=i_0>i_1>\cdots>i_h\geq 0$ tale che

1. $a_{i_j}\neq 0$ per ogni j e,
2. se $h>0$ allora a_{i_j} e $a_{i_{j+1}}$ hanno segni opposti per ogni $j=0,\ldots,h-1$.

Diremo che un serpente $n=i_0>i_1>\cdots>i_h$ è *strisciante* se a_{i_k} e a_j hanno segni concordi ogniqualvolta $i_k>j>i_{k+1}$ e $a_j\neq 0$.
È facile osservare che per ogni serpente in $p(t)$ ne esiste uno strisciante della stessa lunghezza e che $s(p(t))$ coincide con la massima lunghezza di un serpente in $p(t)$. Ad esempio, il serpente strisciante massimale di $t^5+t^4-2t^3+t^2+t-1$ è $\{5,3,2,0\}$.

Lemma 10.2. *Per ogni polinomio $p(t)\in\mathbb{R}[t]$ e per ogni numero reale positivo $c>0$ vale*

$$s((t-c)p(t)) > s(p(t)).$$

Dimostrazione. Sia $s=s(p(t))$, n il grado di p, b la molteplicità in p della radice 0 e scriviamo $p(t)=\sum_{i=b}^{n} a_i t^i$, dove $a_b, a_n\neq 0$. Denotiamo con $n=i_0> i_1>\ldots>i_s\geq b$ l'unico serpente strisciante di lunghezza s in $p(t)$: per dimostrare il lemma è sufficiente dimostrare che $n+1=i_0+1>i_1+1>\cdots>i_s+1>i_{s+1}=b$ è un serpente in $(t-c)p(t)$.
Infatti $(t-c)p(t)=\sum_{i=b}^{n+1}(a_{i-1}-ca_i)t^i$ e, poiché per ogni k, a_{i_k+1} è nullo oppure di segno opposto a a_{i_k}, segue che a_{i_k} e $a_{i_k}-ca_{i_k+1}$ hanno lo stesso segno e quindi $n+1=i_0+1>i_1+1>\ldots>i_s+1$ è un serpente in $(t-c)p(t)$. Inoltre dato che a_b e a_{i_s} hanno lo stesso segno, $a_{i_s}-ca_{i_s+1}$ e $-ca_b$ risultano di segno opposto e quindi anche $n+1=i_0+1>i_1+1>\cdots>i_s+1>b$ è un serpente in $(t-c)p(t)$. □

Dal Lemma 10.2 segue immediatamente il Teorema 10.1. Infatti se $c_1,\ldots,c_k$ sono le radici reali positive, contate con molteplicità, di $p(t)$, è possibile scrivere

$$p(t)=(t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_k)q(t)$$

e quindi $s(p(t))\geq k+s(q(t))\geq k$.

Corollario 10.3. *Sia $p(t)$ un polinomio di grado positivo a coefficienti reali. Se tutte le radici di p sono reali allora Il numero di radici positive, contate con molteplicità, di p è uguale al numero dei cambiamenti di segno della successione ordinata dei coefficienti di p, dove i coefficienti nulli devono essere omessi.*

Dimostrazione. Moltiplicando un polinomio $p(t)$ per t^s, il numero dei cambiamenti di segno resta invariato; non è quindi restrittivo supporre che $p(0)\neq 0$ e quindi che tutte le radici siano reali e non nulle.
Siano $c_1,\ldots,c_k$ le radici positive e $-d_{k+1},\ldots,-d_n$ quelle negative, contate con molteplicità.
Le radici del polinomio $p(-t)$ sono allora $-c_1,\ldots,-c_k,d_{k+1},\ldots,d_n$ e quindi per il Teorema 10.1 $s(p(t))\geq k$, $s(p(-t))\geq n-k$. Basta chiaramente dimostrare che $s(p(t))+s(p(-t))\leq n$.
I coefficienti dei due polinomi $p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $p(-t)=\sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ sono legati dalle relazioni $b_i=(-1)^i a_i$.

Se i coefficienti a_i sono tutti diversi da 0 allora a_i ed a_{i+1} hanno lo stesso segno se e solo se b_i e b_{i+1} hanno segni opposti ed è immediato osservare che $s(p(t))+s(p(-t)) = n$. Se p ha qualche coefficiente nullo consideriamo un nuovo polinomio $q(t)$ ottenuto da $p(t)$ sostituendo ad ogni coefficiente nullo un qualsiasi numero reale $\neq 0$. Siccome $s(q(t)) \geq s(p(t))$ e $s(q(-t)) \geq s(p(-t))$, la dimostrazione segue. □

Esercizio 10.4. Mostrare con un esempio che il Corollario 10.3 è in generale falso se il polinomio p possiede alcune radici complesse non reali. △

Esercizio 10.5. Sia $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ un polinomio di grado n con tutte le radici reali non nulle. Provare che se $a_i = 0$ allora a_{i-1} e a_{i+1} sono $\neq 0$ ed hanno segni opposti. (Suggerimento: guardare alla dimostrazione del Corollario 10.3.) △

Esercizio 10.6. Il polinomio $t^7 + t^6 + t^4 + t^2$ possiede esattamente 3 radici reali contate con molteplicità. △

Esercizio 10.7. Sia $p(t)$ un polinomio avente tutte le radici reali e siano $a < b \in \mathbb{R}$ tali che $p(a), p(b) \neq 0$. Determinare una formula per il numero di radici comprese tra a e b. △

Osservazione 10.8. È possibile dimostrare che, se $c > 0$ allora per ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ la differenza $s((t-c)p(t)) - s(p(t))$ è dispari (vedi il libro di Kuros: *Corso di algebra superiore*, pag. 239).

Esercizio 10.9. Sia A una matrice reale antisimmetrica. Dimostrare che i coefficienti del polinomio

$$p(t) = \det(tI - A)\det(tI + A)$$

sono tutti non negativi. △

11. Esercizi sulle forme bilineari e sulle forme quadratiche

Esercizio 11.1. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ una cui base è data da $\cos t$, $\sin t$. Si definisca

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Verificare che si tratta di un prodotto scalare . Trovare la matrice associata rispetto alla base data. △

Esercizio 11.2. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivata prima e seconda continua e tali che

$$F(tX) = t^2 F(X) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $F(X)$ è una forma quadratica. △

Esercizio 11.3. Sia $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(a,b,c,d) = a^2 - 4ab + 4ad - 2b^2 + 2bc - 2bd - 2cd + 4d^2.$$

Si determinino rango e segnatura di q, ed una base per la forma canonica si q. △

Soluzione. La matrice che rappresenta la forma quadratica q rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Q è $p_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda \mathrm{Id}) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - 17\lambda^2 + 11\lambda = \lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 17\lambda + 11)$. Dunque $\lambda = 0$ è una radice di $p_Q(\lambda)$ con molteplicità uno. Ne segue

$$\mathrm{rango}(q) = 4 - 1 = 3.$$

Per stabilire la segnatura di q utilizziamo la regola di Cartesio. La successione dei segni dei coefficienti del polinomio $p_Q(\lambda)$ è $(+,-,-,+)$. Abbiamo pertanto due variazioni, ovvero $p_Q(\lambda)$ ha esattamente[1] due radici positive: la segnatura[2] q è

$$\mathrm{segnatura}(q) = (2, 1).$$

Per determinare una base per la forma canonica di q torniamo alla matrice Q. Il significato di Q è il seguente: se indichiamo con $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ la forma bilineare simmetrica associata a q, allora

$$\begin{array}{cccc}
\langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle = 1; & \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = -2; & \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle\!\rangle = 2; \\
\langle\!\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle = -2; & \langle\!\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = -2; & \langle\!\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\!\rangle = 1; & \langle\!\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \rangle\!\rangle = -1; \\
\langle\!\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = 1; & \langle\!\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle\!\rangle = -1; \\
\langle\!\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle = 2; & \langle\!\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \rangle\!\rangle = -1; & \langle\!\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle\!\rangle = -1; & \langle\!\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle\!\rangle = 4;
\end{array}$$

Il nostro obiettivo è determinare una base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ nella quale la forma quadratica q sia rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vale a dire, cerchiamo una base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ tale che

$$\begin{array}{cccc}
\langle\!\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle\!\rangle = 1; & \langle\!\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_1, \varepsilon_3 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_1, \varepsilon_4 \rangle\!\rangle = 0; \\
\langle\!\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle\!\rangle = 1; & \langle\!\langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_2, \varepsilon_4 \rangle\!\rangle = 0; \\
\langle\!\langle \varepsilon_3, \varepsilon_1 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_3, \varepsilon_2 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_3, \varepsilon_3 \rangle\!\rangle = -1; & \langle\!\langle \varepsilon_3, \varepsilon_4 \rangle\!\rangle = 0; \\
\langle\!\langle \varepsilon_4, \varepsilon_1 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_4, \varepsilon_2 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_4, \varepsilon_3 \rangle\!\rangle = 0; & \langle\!\langle \varepsilon_4, \varepsilon_4 \rangle\!\rangle = 0;
\end{array}$$

cioè, una base q-ortonormale di $\mathbb{R}^4$. Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt. Poiché $\langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle \neq 0$, definiamo una nuova base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 + t_2 \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3 + t_3 \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}'_4 &= \mathbf{e}_4 + t_4 \mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

ed imponiamo le condizioni di q-ortogonalità

$$\langle\!\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_4 \rangle\!\rangle = 0.$$

Troviamo così

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle + t_2 \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle &= 0 \\
\langle\!\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle + t_3 \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle &= 0 \\
\langle\!\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle + t_4 \langle\!\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle\!\rangle &= 0
\end{aligned}$$

[1] poiché Q è una matrice simmetrica reale, sappiamo che tutte le radici del polinomio $p_Q(\lambda)$ sono reali.

[2] con segnatura di una forma quadratica simmetrica reale qui si intende la coppia (p, q), dove p indica il numero di autovalori positivi ed q il numero di autovalori negativi. Altre volte chiamiamo segnatura la differenza $p - q$; è evidente come si passa da un dato all'altro.

ovvero

$$t_2 = 2; \qquad t_3 = 0; \qquad t_4 = -2;$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_4 &= \mathbf{e}_4 - 2\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}'$ è

$$Q_1 = {A_1}^T Q A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Procediamo in modo del tutto analogo: poiché $\langle\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2 \rangle\rangle = -6 \neq 0$, definiamo una nuova base $\mathcal{B}''$ di $\mathbb{R}^4$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_1 &= \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}''_2 &= \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}''_3 &= \mathbf{e}'_3 + t_3\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}''_4 &= \mathbf{e}'_4 + t_4\mathbf{e}'_2 \end{aligned}$$

ed imponiamo le condizioni di q-ortogonalità

$$\langle\langle \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3 \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_4 \rangle\rangle = 0.$$

Troviamo così

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_2 \rangle\rangle + t_3 \langle\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2 \rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle \mathbf{e}'_4, \mathbf{e}'_2 \rangle\rangle + t_4 \langle\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2 \rangle\rangle = 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$t_3 = 1/6; \qquad t_4 = 1/2;$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1'' &= \mathbf{e}_1' \\
\mathbf{e}_2'' &= \mathbf{e}_2' \\
\mathbf{e}_3'' &= \mathbf{e}_3' + \frac{1}{6}\mathbf{e}_2' \\
\mathbf{e}_4'' &= \mathbf{e}_4' + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2'
\end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}''$ è

$$Q_2 = {A_2}^T Q_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento ancora una volta. Poiché $\langle\langle \mathbf{e}_3'', \mathbf{e}_3'' \rangle\rangle = 1/6 \neq 0$, definiamo una nuova base $\mathcal{B}'''$ di $\mathbb{R}^4$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1''' &= \mathbf{e}_1'' \\
\mathbf{e}_2''' &= \mathbf{e}_2'' \\
\mathbf{e}_3''' &= \mathbf{e}_3'' \\
\mathbf{e}_4''' &= \mathbf{e}_4'' + t_4\mathbf{e}_3'
\end{aligned}$$

ed imponiamo la condizione di q-ortogonalità

$$\langle\langle \mathbf{e}_3''', \mathbf{e}_4''' \rangle\rangle = 0.$$

Troviamo così $\langle\langle \mathbf{e}_4'', \mathbf{e}_3'' \rangle\rangle + t_4 \langle\langle \mathbf{e}_3'', \mathbf{e}_3'' \rangle\rangle = 0$ ovvero $t_4 = 3$, da cui

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1''' &= \mathbf{e}_1'' \\
\mathbf{e}_2''' &= \mathbf{e}_2'' \\
\mathbf{e}_3''' &= \mathbf{e}_3'' \\
\mathbf{e}_4''' &= \mathbf{e}_4'' + 3\mathbf{e}_3''
\end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}'''$ è

$$Q_3 = {A_3}^T Q_2 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo praticamente finito: si tratta solo di normalizzare e riordinare i vettori in modo che gli autovalori positivi vengano prima di quelli negativi: una base per la forma canonica di q è

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathbf{e}_1'' \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{6}\mathbf{e}_3'' \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{e}_2'' \\ \varepsilon_4 &= \mathbf{e}_4'' \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}'''$ è

$$Q_4 = {A_4}^T Q_3 A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

come si voleva. Per scrivere esplicitamente la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ basta ricordarsi che questa è stata ottenuta a partire dalla base canonica applicando le trasformazioni lineari A_1, A_2, A_3 ed A_4. Ne segue che il vettore ε_i è semplicemente l'i-esima colonna della matrice $A_1A_2A_3A_4$. Si ha:

$$A_1A_2A_3A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un'ultima osservazione. Indichiamo con (a', b', c', d') le coordinate di $\mathbb{R}^4$ relative alla base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$. Il fatto che in questa base la forma quadratica q si scriva in forma canonica significa che

$$q(a, b, c, d) = (a')^2 + (b')^2 - (c')^2 = q'(a', b', c', d').$$

Rendiamo più esplicito questo fatto esprimendo le coordinate (a', b', c', d') in termini delle coordinate (a, b, c, d). Si ha, chiaramente,

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} a' &= a - 2b + 2d \\ b' &= \frac{\sqrt{6}}{6}c - \frac{\sqrt{6}}{2}d \\ c' &= \sqrt{6}b - \frac{\sqrt{6}}{6}c - \frac{\sqrt{6}}{2}d \\ d' &= d \end{cases}$$

e l'identità $q(a, b, c, d) = q'(a', b', c', d')$ scritta sopra si può leggere come l'identità

$$a^2 - 4ab + 4ad - 2b^2 + 2bc - 2bd - 2cd + 4d^2$$
$$= (a - 2b + 2d)^2 + \frac{(c - 3d)^2}{6} - \frac{(6b - c - 3d)^2}{6}.$$

Esercizio 11.4. Sia $q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $\det A$. Calcolare la segnatura della forma quadratica. Trovare una base per la forma canonica metrica di $q(A)$. △

Soluzione. Se scriviamo una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora rispetto alle coordinate (a, b, c, d) l'applicazione $q\colon A \mapsto \det(A)$ si scrive

$$q(a, b, c, d) = ad - bc$$

Si tratta evidentemente di un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate: q è una forma quadratica. La matrice associata alla forma quadratica q è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare rango e segnatura di q basta calcolare il polinomio caratteristico di Q. Si trova $p_Q(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}$. Il termine noto di questo polinomio è diverso da zero, dunque $\lambda = 0$ non è un autovalore di Q. Ne segue

$$\mathrm{rango}(q) = 4$$

Per determinare la segnatura di q basta scrivere la successione dei segni dei coefficienti del polinomio $p_Q(\lambda)$. Si tratta della successione di segni $(+, -, +)$. La regola di Cartesio ci dice pertanto che $p_Q(\lambda)$ ha esattamente due radici positive. La segnatura di q è dunque

$$\mathrm{segnatura}(q) = (2, 2)$$

Per determinare una base per la forma canonica di q torniamo all matrice Q. Tutti gli elementi sulla diagonale sono nulli, ma l'elemento di posto $(1, 4)$, e dunque anche quello di posto $(4, 1)$ sono diversi da zero. Perciò, se indichiamo con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, definiamo una nuova base $\mathcal{B}'$ come

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_4 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}'$ è

$$Q_1 = {A_1}^T Q A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la "cornice esterna" della matrice Q_1 è già in forma canonica. Questo significa che per portare Q_1 a forma canonica ci basterà operare sul minore "centrale"

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso tutti gli elementi sulla diagonale sono nulli. Allora poniamo

$$\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3; \qquad \mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3.$$

I vettori $\mathbf{e}'_1$ ed $\mathbf{e}'_4$, invece, "vanno già bene" e dunque la base $\mathcal{B}''$ sarà definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_1 &= \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_4 &= \mathbf{e}'_4 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta questo cambio di base è la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la forma quadratica q nella base $\mathcal{B}''$ è

$$Q_2 = {A_2}^T Q_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto, per ottenere la forma canonica basta scambiare il secondo ed il terzo vettore della base: definiamo $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ come

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \mathbf{e}_1''\\ \varepsilon_2 &= \mathbf{e}_3''\\ \varepsilon_3 &= \mathbf{e}_2''\\ \varepsilon_4 &= \mathbf{e}_4''\end{aligned}$$

Per determinare esplicitamente i vettori ε_i, basta osservare che la matrice dell'ultimo cambio di base è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ed ε_i è l'i-esima colonna della matrice $A_1A_2A_3$. Si ha

$$A_1A_2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

dunque, in termini di matrici 2×2,

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Il fatto che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ sia una base per la forma canonica di

$$\det\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

è equivalente alla seguente identità:

$$\det \begin{pmatrix} x+t & y+z\\ -y+z & x-t\end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2 - t^2.$$

Esercizio 11.5. Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + y^2 + 4yz - z^2.$$

Si determinino rango e segnatura di q, ed una base per la forma canonica si q. $\triangle$

Soluzione. La matrice che rappresenta la forma quadratica q rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Q è $p_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda \mathrm{Id}) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 1$. Dunque $\lambda = 0$ non è una radice di $p_Q(\lambda)$. Ne segue

$$\mathrm{rango}(q) = 3.$$

Per stabilire la segnatura di q utilizziamo la regola di Cartesio. La successione dei segni dei coefficienti del polinomio $p_Q(\lambda)$ è $(-, +, +, -)$. Abbiamo pertanto due variazioni, ovvero $p_Q(\lambda)$ ha esattamente due radici positive: la segnatura di q è

$$\mathrm{segnatura}(q) = (2, 1).$$

Per determinare una base per la forma canonica di q torniamo alla matrice Q. Poiché $Q_{11} = 1 \neq 0$ la matrice del primo cambio di base è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{Q_{12}}{Q_{11}} & -\frac{Q_{13}}{Q_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la matrice Q per A_1 a destra e per ${A_1}^T$ a sinistra troviamo

$$Q_1 = {A_1}^T Q A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Prima riga e prima colonna sono sistemate. Andiamo a guardare l'elemento di posto $(2, 2)$ della matrice Q_1. Troviamo $(Q_1)_{22} = -3 \neq 0$. Dunque la matrice del secondo cambio di base è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(Q_1)_{23}}{(Q_1)_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la matrice Q_1 per A_2 a destra e per ${A_2}^T$ a sinistra troviamo

$$Q_2 = {A_2}^T Q_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice diagonale. Per rendere gli elementi sulla diagonale di norma uno basta fare il cambio di base rappresentato dalla matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Troviamo così

$$Q_3 = {A_3}^T Q_2 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rimane da scambiare l'elemento di posto $(2, 2)$ con l'elemento di posto $(3, 3)$: l'ultimo cambio di base necessario per mettere la forma quadratica iniziale in forma canonica affine è quello rappresentato dalla matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha infatti

$$Q_4 = {A_4}^T Q_3 A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

come si voleva. In definitiva, il cambio di coordinate che mette q in forma canonica è rappresentato dalla matrice $A = A_1 A_2 A_3 A_4$. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y', z') le nuove coordinate di $\mathbb{R}^3$, allora

$$q(x, y, z) = (x')^2 + (y')^2 - (z') = q'(x', y', z').$$

Per esprimere le coordinate (x', y', z') in termini delle coordinate (x, y, z), basta osservare che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ (1/\sqrt{3})z \\ \sqrt{3}y - (2/\sqrt{3})z \end{pmatrix}$$

e l'identità $q(x, y, z) = q'(x', y', z')$ scritta sopra si può leggere come l'identità

$$x^2 + 4xy + y^2 + 4yz - z^2 = (x + 2y)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}z\right)^2.$$

Esercizio 11.6. Siano $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ lineari e linearmente indipendenti come vettori di V^*. Mostrare che $\Phi(x) = f(x)g(x)$ è una forma quadratica di rango 2 e segnatura 0. Cosa si può dire se f e g sono linearmente dipendenti? △

Esercizio 11.7. Sia $H \subset M_3(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche a traccia nulla. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon H \to \mathbb{R}$, $\Phi(A) = \text{Traccia}(A^2)$. △

Esercizio 11.8. Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

△

Esercizio 11.9. Determinare tutti i vettori isotropi della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

△

Esercizio 11.10. Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_4 - x_3^2.$$

△

Soluzione. La matrice associata alla forma quadratica Φ è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Q è

$$p_Q(t) = \begin{pmatrix} -t & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = t^4 - \frac{9}{4}t^2 - \frac{5}{4}t = t\left(t^3 - \frac{9}{4}t - \frac{5}{4}\right).$$

Dunque $t = 0$ è una radice del polinomio caratteristico di Q di molteplicità 1. Ne segue rango$(\Phi) = 4 - 1 = 3$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_Q(t)$ è $(+, -, -)$. C'è una sola variazione, quindi $p_Q(t)$ ha esattamente una radice positiva. Dunque segnatura$(\Phi) = (1, 2)$.

Esercizio 11.11. Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_4x_1.$$

△

Esercizio 11.12. Sia V uno spazio vettoriale reale, $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e $f\colon V \to V$ lineare tale che $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$ per ogni $x, y \in V$. Dimostrare che:

1. Se φ è non degenere allora f è iniettiva.
2. Il rango di f è maggiore od uguale al rango di φ.

△

Soluzione. Osserviamo che, se $x \in \ker f$, allora $\varphi(x, y) = \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(0, f(y)) = 0$ per ogni $y \in V$. Dunque $x \in \ker \varphi$. Vale a dire $\ker f \subseteq \ker \varphi$. In particolare, se φ è non degenere, allora $\ker \varphi = 0$ e dunque anche $\ker f = 0$, ovvero f è iniettiva, il che risolve il punto (1.). Per quanto riguarda il punto (2.), si ha

$$\text{rango}(f) = \dim V - \dim \ker f \geq \dim V - \dim \ker \varphi = \text{rango}(\varphi).$$

Esercizio 11.13. Sia G un sottogruppo finito di $GL_n(\mathbb{R})$ e sia e $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare:

1. $$\varphi(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$$

   è una forma bilineare simmetrica definita positiva e $g^*\varphi = \varphi$ per ogni $g \in G$.
2. φ coincide con il prodotto scalare canonico se e soltanto se $G \subset O_n$.
3. G è coniugato in $GL_n(\mathbb{R})$ ad un sottogruppo del gruppo ortogonale O_n.

△

Soluzione. Per quanto riguarda il punto (1), è evidente che φ è bilineare simmetrica e che $\varphi(x, x) \geq 0$ qualunque sia x. Resta da mostrare che $\varphi(x, x) > 0$ se $x \neq 0$. Questo segue da

$$\begin{aligned} \varphi(x, x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gx \rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\langle x, x \rangle + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G \setminus \{1\}} \langle gx, gx \rangle \geq \frac{1}{|G|}\langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Infine mostriamo che φ è G-invariante. Sia g un arbitrario elemento di G. Allora

$$\begin{aligned}(g^*\varphi)(x,y) &= \varphi(gx,gy)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\langle hgx, hgx\rangle\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}\langle hgx, hgx\rangle\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\langle hx, hx\rangle = \varphi(x,y)\end{aligned}$$

Passiamo al punto (2). È chiaro che $G \subset O_n$ implica $\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$. Viceversa, se $\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$, allora

$$\langle gx, gy\rangle = \varphi(gx,gy) = \varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$$

per ogni $g \in G$. Dunque gli elementi di G sono isometrie rispetto al prodotto scalare standard, ovvero $G \subset O_n$. Per finire, il punto (3). Poiché φ è simmetrica definita positiva, si ha

$$\varphi(x,y) = \langle x, Ay\rangle$$

con A matrice reale simmetrica definita positiva. Ma allora $A = B^t \cdot B$ per qualche $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Preso comunque $g \in G$, si ha

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \langle x, (B^{-1})^t\cdot A\cdot B^{-1}y\rangle\\ &= \langle B^{-1}x, A\cdot B^{-1}y\rangle\\ &= \varphi(B^{-1}x, B^{-1}y)\\ &= \varphi(gB^{-1}x, gB^{-1}y)\\ &= \langle gB^{-1}x, AgB^{-1}y\rangle = \langle BgB^{-1}x, BgB^{-1}y\rangle\end{aligned}$$

Dunque BgB^{-1} è un'isometria rispetto al prodotto scalare standard, e quindi $BgB^{-1} \in O_n$. Poiché questo discorso vale per ogni $g \in G$, si ha $BGB^{-1} \subset O_n$.

Ricordiamo che un sottospazio vettoriale $H \subset V$ si dice *isotropo* per una forma bilineare simmetrica φ definita su V se la restrizione di φ a $H \times H$ è degenere; H si dice *anisotropo* se non è isotropo; H si dice totalmente isotropo se la restrizione di φ è identicamente nulla su H.

Esercizio 11.14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e sia $\varphi\colon V\times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.
Per ogni sottospazio vettoriale $H \subset V$, definiamo

$$H^{\varphi\perp} = \{x \in V \mid \varphi(x,y) = 0\,\forall y \in H\}.$$

Dimostrare:

1. $\dim H^{\varphi\perp} + \dim H \geq \dim V$.
2. H è anisotropo se e soltanto se $H \cap H^{\varphi\perp} = 0$.
3. H è anisotropo se e soltanto se $H \oplus H^{\varphi\perp} = V$.

△

Esercizio 11.15. Sia $B = (b_{ij})$ una matrice $n\times n$ simmetrica a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica $\neq 2$ e sia $H \subset \mathbb{K}^n$ un iperpiano di equazione $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Provare che:

1. H è isotropo per la forma $x^T By$ se e soltanto se esiste $x \in H$ tale che $Bx = (a_1,\dots,a_n)^T$.

2. H è isotropo per la forma $x^T By$ se e soltanto se

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & a_n \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Dedurre che ogni iperpiano è isotropo se e soltanto se il rango di B è $\leq n-2$. △

Esercizio 11.16. Sia $B = (b_{ij})$ una matrice $n \times n$ simmetrica a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica $\neq 2$. Definiamo un'applicazione $\varphi \colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mediante la formula

$$\varphi(x,y) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & y_n \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare:

1. φ è bilineare simmetrica. Interpretare, in funzione di B, i coefficienti della matrice A tale che $\varphi(x,y) = x^T Ay$.
2. Determinare, in funzione del rango di B, il rango di φ.
3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\det B \neq 0$ determinare, in funzione della segnatura di B, la segnatura di φ.

△

Esercizio 11.17. Siano φ, ψ forme bilineari simmetriche su di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che se φ è non degenere esiste $f \colon V \to V$ lineare tale che $\psi(x,y) = \varphi(x, f(y))$. (Sugg.: se B è una matrice simmetrica invertibile, $x^T Ay = x^T BB^{-1} Ay$.) △

12. Altri esercizi sulle matrici simmetriche

Esercizio 12.1. Per ogni $n > 0$ sia $B_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice simmetrica di coefficienti

$$b_{ij} = i + j - 2, \qquad i,j = 1, \dots, n.$$

Determinare rango e segnatura di B_1, B_2 e B_3. △

Soluzione. Si ha $B_1 = (0)$ e dunque, evidentemente rango$(B_1) = 0$ e segnatura$(B_1) = (0,0)$. Per quanto riguarda B_2, si ha

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di B_2 è

$$p_{B_2}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 1.$$

Il termine noto di questo polinomio è diverso da zero, dunque rango$(B_2) = 2$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_{B_2}(t)$ è $(+,-,-)$. C'è una sola variazione, quindi $p_{B_2}(t)$ ha esattamente una radice positiva. Dunque segnatura$(B_2) = (1,1)$. Infine,

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di B_3 è

$$p_{B_2}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 2 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 2 & 3 & 4-t \end{pmatrix} = -t^3 + 6t^2 + 6t = t\,(-t^2 + 6t + 6).$$

Dunque $t = 0$ è una radice del polinomio caratteristico di B_3 di molteplicità 1. Ne segue rango$(B_3) = 3-1 = 2$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_{B_3}(t)$ è $(-, +, +)$. C'è una sola variazione, quindi $p_{B_3}(t)$ ha esattamente una radice positiva. Dunque segnatura$(B_3) = (1, 1)$.

Esercizio 12.2. Per ogni $n \geq 3$ sia $B_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice simmetrica di coefficienti

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \leq i \leq n-1 \text{ e } 2 \leq j \leq n-1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare rango e segnatura di B_3, B_4. △

Esercizio 12.3. Determinare rango e segnatura della matrice B_n introdotta nell'Esercizio 12.1 per ogni $n \geq 4$. (Suggerimento: valutare la differenza di due colonne adiacenti della matrice B_n.) △

Soluzione. La matrice B_n ha la forma

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-2 \end{pmatrix}$$

Sottraiamo all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terzultima e così via (quest'operazione lascia invariato il rango della matrice). Troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2 (ci sono solamente due colonne linearmente indipendenti). Abbiamo così dimostrato

$$\text{rango}(B_n) = 2, \qquad \forall n \geq 4.$$

Per quanto riguarda la segnatura, osserviamo che il minore 2×2 in alto a sinistra ha rango 2 e dunque la segnatura di B_n coincide con la segnatura di questo minore. Ma il minore 2×2 in alto a sinistra è proprio B_2 e abbiamo già calcolato, nell'Esercizio 12.1, che la sua segnatura è (1,1). Ne segue

$$\text{segnatura}(B_n) = (1, 1), \qquad \forall n \geq 4.$$

Esercizio 12.4. Determinare rango e segnatura di B_n introdotta nell'Esercizio 12.2 per ogni $n > 4$. △

Esercizio 12.5. Sia $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica semidefinita positiva. Provare che $\det(I + A) \geq 1$. △

Esercizio 12.6. $(*)$ Siano $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ matrici simmetriche semidefinite positive. Provare che $\det(I + AB) \neq 0$. △

Esercizio 12.7. Sia $A = (A_{ij})$ una matrice simmetrica reale $n \times n$ di rango 1 semidefinita positiva. Dimostrare che esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $A_{ij} = a_i a_j$ per ogni i, j. △

Esercizio 12.8. (*) Sia $A = (A_{ij})$ una matrice simmetrica reale $n \times n$ con le seguenti proprietà:

1. $A_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$.
2. Per ogni i vale $\sum_j A_{ij} \geq 0$.

Provare che A è semidefinita positiva. △

Esercizio 12.9. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica reale $n \times n$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori, contati con molteplicità. Dimostrare che per ogni $i = 1, \ldots, n$ vale

$$a_{ii} \geq \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

(Suggerimento: per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A + tI$ è definita positiva?). △

Esercizio 12.10. Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ simmetriche e definite positive. È vero o falso che la matrice simmetrica $AB + BA$ è definita positiva? △

Esercizio 12.11. Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica ha rango pari e che per ogni piano $H \subset \mathbb{R}^n$ esiste, unica a meno di costanti moltiplicative, una matrice antisimmetrica A di ordine n e rango 2 tale che H =immagine di A. △

Esercizio 12.12. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\langle Ax, y\rangle = 0$ allora $\langle x, Ay\rangle = 0$. Dimostrare che A è simmetrica o antisimmetrica. (Sugg.: svolgere l'Esercizio 8.8 di Pagina 14 sui duali e dimostrare che per ogni $y \in V = \mathbb{R}^n$ i due funzionali lineari $f_x, g_x \in V^*$, $f_x(y) = \langle Ax, y\rangle$, $g_x(y) = \langle A^T x, y\rangle$ sono linearmente dipendenti nello spazio vettoriale duale.) △

13. Esercizi sugli spazi e le applicazioni affini

Nel seguito supporremo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Ricordiamo che per *combinazione baricentrica* di $m + 1$ punti $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{K}^n$ si intende una combinazione lineare $\sum_{i=0}^m a_i p_i$ tale che $\sum_{i=0}^m a_i = 1$.

Esercizio 13.1. Siano $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ non allineati. Dimostrare che ogni punto di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere in modo unico come combinazione baricentrica di p_0, p_1, p_2. △

Esercizio 13.2. Siano $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{K}^n$ punti fissati e siano $q_0, \ldots, q_s$ combinazioni baricentriche di $p_0, \ldots, p_m$. Mostrare che ogni combinazione baricentrica di $q_0, \ldots, q_s$ è anche combinazione baricentrica di $p_0, \ldots, p_m$. △

Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{K}^n$ si dice un *sottospazio affine* se è chiuso per combinazioni baricentriche, cioè se per ogni $p_0, \ldots, p_m \in H$ e per ogni $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ tali che $\sum a_i = 1$ si ha $\sum a_i p_i \in H$. Il sottoinsieme vuoto è un sottospazio affine.

Esercizio 13.3. Dato un qualsiasi sottoinsieme $S \subset \mathbb{K}^n$, sia $\langle S\rangle$ l'insieme di tutte le combinazioni baricentriche di elementi di S. Provare che $\langle S\rangle$ è un sottospazio affine. In particolare per ogni $p, q \in \mathbb{K}^n$, la retta

$$\overline{pq} = \{p + t(q - p) \mid t \in \mathbb{K}\} = \{(1 - t)p + tq \mid t \in \mathbb{K}\}$$

è un sottospazio affine. △

Esercizio 13.4. Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine se e soltanto se $\overline{pq} \subset H$ per ogni $p, q \in H$. △

Esercizio 13.5. Intersezione di sottospazi affini è ancora un sottospazio affine. △

Una applicazione $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ si dice *affine* se commuta con le combinazioni baricentriche, cioè se per ogni $p_0, \ldots, p_s \in \mathbb{K}^n$ e per ogni $a_0, \ldots, a_s \in \mathbb{K}$ tali che $\sum a_i = 1$ si ha $f(\sum a_i p_i) = \sum a_i f(p_i)$. In particolare le applicazioni lineari sono affini.

Esercizio 13.6. Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione affine. Dimostrare:

1. Se $H \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine allora $f(H)$ è un sottospazio affine.
2. Se $K \subset \mathbb{K}^m$ è un sottospazio affine allora $f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) \in K\}$ è un sottospazio affine.

△

Esercizio 13.7. Composizione di applicazioni affini è un'applicazione affine. △

Un'applicazione affine e bigettiva $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ viene detta una *affinità*.

Esercizio 13.8. Se $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un'affinità allora anche f^{-1} è un'affinità. △

Dato un vettore $v \in \mathbb{K}^n$, la traslazione di v è l'applicazione

$$T_v\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad T_v(x) = v + x$$

Esercizio 13.9. Provare che le traslazioni sono affinità e che $T_vT_w = T_{v+w}$. △

Esercizio 13.10. Sia $H \subset \mathbb{K}^n$ un sottoinsieme non vuoto e $v \in H$. Provare che H è un sottospazio affine se e soltanto se $T_{-v}(H)$ è un sottospazio vettoriale. In tal caso mostrare che $T_{-w}(H) = T_{-v}(H)$ per ogni $w \in H$. △

Esercizio 13.11. Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione. Dimostrare che f è affine se e soltanto se l'applicazione $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $g(x) := f(x) - f(0)$, è lineare.
Dedurre che ogni applicazione affine $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è la composizione di un'applicazione lineare e di una traslazione in $\mathbb{K}^m$. △

Esercizio 13.12. $(*)$ Determinare, se esiste, una affinità f di $\mathbb{C}^2$ tale che $f(L) \neq L$ per ogni retta (affine) $L \subset \mathbb{C}^2$. △

Esercizio 13.13. Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione affine e siano $f(0) = (b_1, \ldots, b_m)$, $f(e_i) - f(0) = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$, dove $e_1, \ldots, e_n$ indica la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Provare che f manda il punto $(x_1, \ldots, x_n)$ nel punto $(y_1, \ldots, y_m)$ che soddisfa la relazione

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Caratterizzare inoltre le matrici $(n+1) \times (n+1)$ corrispondenti alle traslazioni in $\mathbb{K}^n$. △

Esercizio 13.14. Siano $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una applicazione affine e $H \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine.
Dimostrare che esiste un sottospazio vettoriale $K \subset \mathbb{K}^n$ tale che $f^{-1}(f(v)) \cap H = v + K$ per ogni $v \in H$. △

Esercizio 13.15. Una applicazione $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è affine se e solo se per ogni $p, q \in \mathbb{K}^n$, $a \in \mathbb{K}$ vale $f(ap + (1-a)q) = af(p) + (1-a)f(q)$. △

Sia $H \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine: diremo che un'applicazione $f\colon H \to \mathbb{K}^m$ è affine se commuta con le combinazioni baricentriche.

Esercizio 13.16. Sia $H \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine non contenente 0 e $f\colon H \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione affine. Dimostrare che f è la restrizione ad H di un'applicazione lineare $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. △

Esercizio 13.17. Siano $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 1)$ e $P_3 = (3, 3)$. Siano inoltre $Q_1 = (1, 8)$, $Q_2 = (0, 7)$ e $Q_3 = (7, 3)$. Si determini l'affinità di $\mathbb{R}^2$ che trasforma P_i in Q_i per $i = 1, 2, 3$. △

Soluzione. Poniamo $\mathbf{v}_1 = P_2 - P_1$, $\mathbf{v}_2 = P_3 - P_1$, $\mathbf{w}_1 = Q_2 - Q_1$ e $\mathbf{w}_2 = Q_3 - Q_1$. L'affinità cercata è

$$\mathbf{v} \mapsto A(\mathbf{v} - P_1) + Q_1$$

dove A è la trasformazione lineare che manda $\mathbf{v}_i$ in $\mathbf{w}_i$ per $i = 1, 2$. In termini di matrici,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix};$$

Dunque la matrice A è determinata dall'equazione

$$A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & 7/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

In conclusione, l'affinità cercata è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5/4 & 7/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}x + \frac{7}{2}y - \frac{29}{4} \\ \\ -\frac{3}{2}x - 2y + \frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

14. Esercizi sulle coniche

Esercizio 14.1. Si studi la conica di equazione $3x^2+2xy+3y^2+2x+2y-17/2 = 0$, e se ne disegni il grafico. △

Soluzione. Dobbiamo studiare l'equazione $f(x, y) = 0$, dove $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 2y - 17/2 = 0$. Iniziamo con l'osservare che f è la somma di una forma quadratica, una forma lineare ed una costante: se poniamo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, allora f si può scrivere come

$$f(x, y) = \langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle + \langle L, \mathbf{v} \rangle + k$$

dove

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad k = -\frac{17}{2}$$

Cominciamo col diagonalizzare la forma quadratica $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle$. Il polinomio caratteristico di Q è $p_Q(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Ne segue che gli autovalori di Q sono 2 e 4, ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui la forma quadratica $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle$ è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In termini di matrici, esiste una matrice ortogonale A tale che

$$A^{-1}QA = A^T QA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice A è semplicemente la matrice che ha per colonne gli autovettori della matrice Q. Iniziamo col determinare il 2-autospazio. Si ha $\mathbf{v} \in \ker(Q - 2\mathrm{Id})$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne segue che una base del 2-autospazio di Q è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Analogamente, il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al 4-autospazio di Q se e solo se

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque una base del 2-autospazio di Q è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. I due vettori cosìtrovati sono chiaramente ortogonali, essendo autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica reale. Normalizzandoli troviamo una base ortonormale, descritta dalla matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Facciamo il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Come cambia la funzione f? Se scriviamo $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, allora $\mathbf{v} = A\mathbf{v}'$ e dunque

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \langle A\mathbf{v}', QA\mathbf{v}' \rangle + \langle L, A\mathbf{v}' \rangle + k \\ &= \langle \mathbf{v}, A^T QA\mathbf{v}' \rangle + \langle A^T L, \mathbf{v}' \rangle + k \end{aligned}$$

Sappiamo per costruzione che

$$A^T QA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi l'unico termine che dobbiamo calcolare nell'equazione precedente è il vettore

$$A^T L = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dunque, nelle coordinate $\{x', y'\}$ la conica ha equazione

$$2(x')^2 + 4(y')^2 + 2\sqrt{2}x' - 17/2 = 0$$

L'espressione a sinistra dell'uguale può essere scritta come

$$\langle \mathbf{v}', Q'\mathbf{v}' \rangle + \langle L', \mathbf{v}' \rangle + k'$$

dove

$$Q' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad L' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad k' = -\frac{17}{2}$$

Poiché la matrice della forma quadratica è non degenere (non ha l'autovalore zero) possiamo eliminare il termine lineare mediante una traslazione. Infatti, se introduciamo nuove coordinate mediante la formula

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + \mathbf{p}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

allora l'equazione della conica diventa

$$\langle \mathbf{v}'' + \mathbf{p}, Q'(\mathbf{v}'' + \mathbf{p}) \rangle + \langle L', \mathbf{v}' + \mathbf{p} \rangle + k' = 0$$

ovvero

$$\langle \mathbf{v}'', Q'\mathbf{v}'' \rangle + \langle 2Q'\mathbf{p} + L', \mathbf{v}'' \rangle + \langle \mathbf{p}, Q'\mathbf{p} \rangle + \langle L', \mathbf{p} \rangle + k' = 0$$

Dunque il vettore di traslazione $\mathbf{p}$ che elimina il termine lineare è dato dalla soluzione dell'equazione $2Q'\mathbf{p} + L'$. Si ha pertanto

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2}(Q')^{-1}L' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta di $\mathbf{p}$ l'equazione della conica si riduce alla forma

$$\langle \mathbf{v}'', Q'\mathbf{v}'' \rangle + k'' = 0$$

dove

$$k'' = k' + \langle L', \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p}, Q'\mathbf{p} \rangle = -\frac{17}{2} - 1 + \frac{1}{2} = -9$$

In definitiva, nelle coordinate $\{x'', y''\}$ la conica ha equazione

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 9$$

ovvero

$$\frac{(x'')^2}{(3/\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{(3/2)^2} = 1$$

Si tratta dell'ellisse con un semiasse di lunghezza $3/\sqrt{2}$ e l'altro semiasse di lunghezza $3/2$. Per disegnarla dobbiamo capire a che rette corrispondono gli assi $x'' = 0$ e $y'' = 0$ in termini delle coordinate originali $\{x, y\}$. Abbiamo

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}' = A(\mathbf{v}'' + \mathbf{p})$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2x'' + \sqrt{2}/2y'' - 1/4 \\ -\sqrt{2}/2x'' + \sqrt{2}/2y'' - 1/4 \end{pmatrix}$$

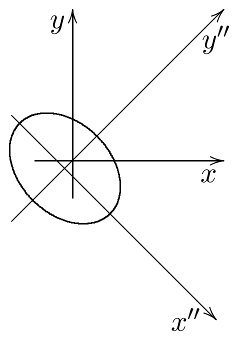
Dunque l'asse $x'' = 0$ corrisponde alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre l'asse $y'' = 0$ corrisponde alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e il centro del nuovo sistema di coordinate corrisponde al punto che ha coordinate $(x, y) = (-1/4, -1/4)$. Un disegno della conica è il seguente:



Esercizio 14.2. Si studi la conica di equazione $\frac{4}{5}x^2 + \frac{24}{5}xy + \frac{11}{5}y^2 + 5x + 10y + \frac{89}{16} = 0$, e se ne disegni il grafico. △

Soluzione. Dobbiamo studiare l'equazione $f(x, y) = 0$, dove $f(x, y) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{24}{5}xy + \frac{11}{5}y^2 + 5x + 10y + \frac{89}{16} = 0$. Iniziamo con l'osservare che f è la somma di una forma quadratica, una forma lineare ed una costante: se poniamo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, allora f si può scrivere come

$$f(x, y) = \langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle + \langle L, \mathbf{v} \rangle + k$$

dove

$$Q = \begin{pmatrix} 4/5 & 12/5 \\ 12/5 & 11/5 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}; \qquad k = \frac{89}{16}$$

Cominciamo col diagonalizzare la forma quadratica $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle$. Il polinomio caratteristico di Q è $p_Q(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Ne segue che gli autovalori di Q sono 4 e -1, ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui la forma quadratica $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle$ è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In termini di matrici, esiste una matrice ortogonale A tale che

$$A^{-1}QA = A^T QA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è semplicemente la matrice che ha per colonne gli autovettori della matrice Q. Iniziamo col determinare il 4-autospazio. Si ha $\mathbf{v} \in \ker(Q - 4\mathrm{Id})$ se e solo se $-16x+12y = 0$. Ne segue che una base del 4-autospazio di Q è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Analogamente, il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al (-1)-autospazio di Q se e solo se $9x + 12y = 0$ e dunque una base del (-1)-autospazio di Q è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. I due vettori cosìtrovati sono chiaramente ortogonali, essendo autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica reale. Normalizzandoli troviamo una base ortonormale, descritta dalla matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante di questa matrice è uguale ad 1, essa rappresenta una rotazione. Facciamo il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Come cambia la funzione f? Se scriviamo $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, allora $\mathbf{v} = A\mathbf{v}'$ e dunque

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \langle A\mathbf{v}', QA\mathbf{v}' \rangle + \langle L, A\mathbf{v}' \rangle + k \\ &= \langle \mathbf{v}', A^T QA\mathbf{v}' \rangle + \langle A^T L, \mathbf{v}' \rangle + k \end{aligned}$$

Sappiamo per costruzione che

$$A^T QA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi l'unico termine che dobbiamo calcolare nell'equazione precedente è il vettore

$$A^T L = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dunque, nelle coordinate $\{x', y'\}$ la conica ha equazione

$$4(x')^2 - (y')^2 + 11x' - 2y' + \frac{89}{16} = 0$$

L'espressione a sinistra dell'uguale può essere scritta come

$$\langle \mathbf{v}', Q'\mathbf{v}' \rangle + \langle L', \mathbf{v}' \rangle + k'$$

dove

$$Q' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad L' = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad k' = \frac{89}{16}$$

Poiché la matrice della forma quadratica è non degenere (non ha l'autovalore zero) possiamo eliminare il termine lineare mediante una traslazione. Infatti, se introduciamo nuove coordinate mediante la formula

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + \mathbf{p}$$

allora l'equazione della conica diventa

$$\langle \mathbf{v}'', Q'\mathbf{v}''\rangle + \langle 2Q'\mathbf{p} + L', \mathbf{v}''\rangle + \langle \mathbf{p}, Q'\mathbf{p}\rangle + \langle L', \mathbf{p}\rangle + k' = 0$$

Dunque il vettore di traslazione $\mathbf{p}$ che elimina il termine lineare è dato dalla soluzione dell'equazione $2Q'\mathbf{p} + L' = 0$. Si ha pertanto

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2}(Q')^{-1}L' = \begin{pmatrix} -11/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta di $\mathbf{p}$ l'equazione della conica si riduce alla forma

$$\langle \mathbf{v}'', Q'\mathbf{v}''\rangle + k'' = 0$$

dove

$$k'' = k' + \langle L', \mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}, Q'\mathbf{p}\rangle = \frac{89}{16} - \frac{121}{8} + 2 + \frac{121}{16} - 1 = -1$$

In definitiva, nelle coordinate $\{x'', y''\}$ la conica ha equazione

$$4(x'')^2 - (y'')^2 = 1$$

ovvero

$$(2x'')^2 - (y'')^2 = 1$$

Si tratta dell'iperbole con asintoti $y'' = \pm 2x''$ e vertici nei punti aventi coordinate $(x'', y'') = (\pm 1/2, 0)$. Per disegnarla dobbiamo capire a che rette corrispondono gli assi $x'' = 0$ e $y'' = 0$ in termini delle coordinate originali $\{x, y\}$. Abbiamo

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}' = A(\mathbf{v}'' + \mathbf{p})$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5x'' - 4/5y'' - 13/8 \\ 4/5x'' + 3/5y'' - 1/2 \end{pmatrix}$$

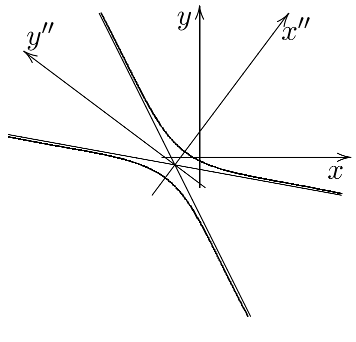
Dunque l'asse delle x'' (ovvero la retta $y'' = 0$) corrisponde alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/8 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mentre l'asse delle y'' (ovvero la retta $x'' = 0$) corrisponde alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/8 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e il centro del nuovo sistema di coordinate corrisponde al punto che ha coordinate $(x, y) = (-13/8, -1/2)$. Gli asintoti passano (oltre che per il centro del nuovo sistema di coordinate) per i punti di coordinate $(x'', y'') = (1, \pm 2)$, ovvero per il punto di coordinate $(x, y) = (-21/8, 3/2)$ e per il punto di coordinate $(x, y) = (23/40, -9/10)$. Un disegno della conica è il seguente:



Possiamo riorganizzare questi calcoli nel modo seguente. Innanzi tutto, l'equazione della conica

$$\frac{4}{5}x^2 + \frac{24}{5}xy + \frac{11}{5}y^2 + 5x + 10y + \frac{89}{16} = 0$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x^2 + \frac{24}{5}xy + \frac{11}{5}y^2 + 5xz + 10yz + \frac{89}{16}z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

La prima equazione è una forma quadratica nelle tre variabili (x, y, z) e dunque possiamo metterla in forma canonica mediante congruenze con applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sé. D'altronde, queste applicazioni lineari devono preservare anche la seconda equazione, e dunque devono mandare il piano $z = 1$ in sé. Infine, se non vogliamo alterare la forma della conica, il piano $z = 1$ deve essere mandato in sé isometricamente. In definitiva, vogliamo mettere la forma quadratica data dalla prima equazione in forma canonica mediante una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sé che induca una isometria affine del piano $z = 1$ in sé. Le trasformazioni lineari di questo tipo sono il sottogruppo di $GL_3(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

Nel nostro caso la matrice della forma quadratica è

$$Q = \begin{pmatrix} 4/5 & 12/5 & 5/2 \\ 12/5 & 11/5 & 5 \\ 5/2 & 5 & 89/16 \end{pmatrix}$$

e i calcoli fatti prima ci dicono che la prima matrice con la quale effettuare la congruenza è la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È bene osservare che A_1 si calcola a partire dalla matrice Q: il minore 2×2 in alto a sinistra di A_1 infatti altro non è se non una base ortonormale di autovettori per la matrice 2×2 costituita dal minore 2×2 in alto a sinistra di Q. La congruenza con A_1 trasforma Q nella matrice

$$Q_1 = A_1{}^T Q A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 11/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11/2 & 1 & 89/16 \end{pmatrix}$$

e questa altro non è se non la matrice che rappresenta la conica

$$4(x')^2 - (y')^2 + 11x' - 2y' + \frac{89}{16} = 0$$

che avevamo trovato prima. Adesso eliminiamo i termini fuori dalla diagonale di Q_1 mediante il solito metodo: il primo cambio di base è quello descritto dalla matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(Q_1)_{12}}{(Q_1)_{11}} & -\frac{(Q_1)_{13}}{(Q_1)_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A priori questa matrice non può essere accettata, in quanto il minore 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{(Q_1)_{12}}{(Q_1)_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

potrebbe non rappresentare una matrice ortogonale. Ma la matrice Q_1 è stata ottenuta diagonalizzando il minore 2×2 in alto a sinistra di Q, e dunque il termine $(Q_1)_{12}$ è sicuramente zero. Ne segue che

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{(Q_1)_{13}}{(Q_1)_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e questa matrice ha il minore 2×2 in alto a sinistra evidentemente ortogonale. Nel nostro caso si ha

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La congruenza con A_2 trasforma Q_1 in

$$Q_2 = {A_2}^T Q_1 A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il secondo cambio di coordinate è quello descritto dalla matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(Q_2)_{23}}{(Q_2)_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si tratta, anche in questo caso, di una matrice il cui minore 2×2 in alto a sinistra è ortogonale, quindi descrive un cambio di coordinate "lecito". Nel nostro caso

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La congruenza con A_3 trasforma Q_2 in

$$Q_3 = {A_3}^T Q_1 A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice che descrive la conica in forma canonica metrica. Prima di andare aventi facciamo un'osservazione importante. Innanzi tutto, trasformando Q_1 mediante una congruenza per una matrice della forma A_2, la seconda riga rimane inalterata. Ne segue $(Q_2)_{22} = (Q_1)_{22}$ e $(Q_2)_{23} = (Q_1)_{23}$. Dunque A_3 si poteva scrivere direttamente a partire da Q_1 (cioè prima ancora di aver calcolato Q_2) come

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(Q_1)_{23}}{(Q_1)_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, la matrice che fa passare da Q_1 alla forma canonica Q_3 è semplicemente il prodotto $T = A_2 A_3$. Poiché sia A_2 che A_3 si possono scrivere in termini dei coefficienti di Q_1, questo deve essere possibile anche per T. Un rapido calcolo mostra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{(Q_1)_{13}}{(Q_1)_{11}} \\ \\ 0 & 1 & -\frac{(Q_1)_{23}}{(Q_1)_{22}} \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè T è la matrice che rappresenta una traslazione di vettore $\begin{pmatrix} -\frac{(Q_1)_{13}}{(Q_1)_{11}} \\ \\ -\frac{(Q_1)_{23}}{(Q_1)_{22}} \end{pmatrix}$ nel piano $z = 1$. In pratica, una volta arrivati alla matrice Q_1 (ovvero, una volta eliminato il termine in xy), si passa direttamente alla forma canonica metrica mediante la congruenza per la matrice T scritta sopra (non occorre cioè, determinare separatamente le due matrici A_2 ed A_3, né tantomeno calcolare la matrice intermedia Q_2). Nel nostro caso

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque rappresenta una traslazione di vettore $\begin{pmatrix} -11/8 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel piano $z = 1$; si tratta precisamente della traslazione che avevamo determinato in precedenza. Il cambio di coordinate che mette la conica in forma canonica metrica è descritto dalla matrice

$$A_1 T = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & -13/8 \\ 4/5 & 3/5 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che sul piano $z = 1$ corrisponde all'affinità

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x'' - \frac{4}{5}y'' - \frac{13}{8} \\ y = \frac{4}{5}x'' + \frac{3}{5}y'' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

che coincide con l'affinità trovata in precedenza.

Esercizio 14.3. Determinare il tipo affine della conica di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$$

△

Soluzione. La matrice associata all'equazione della conica data è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Il primo cambio di coordinate affine è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito a questo cambio di coordinate la matrice della conica diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4\sqrt{2}/3 \\ 0 & -4\sqrt{2}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Il secondo cambio di coordinate affine è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito a questo cambio di coordinate la matrice della conica diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4\sqrt{2}/3 \\ 0 & -4\sqrt{2}/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dunque, nelle nuove coordinate l'equazione della conica è

$$3(x')^2 + \frac{8}{3}(y')^2 = 2$$

ovvero

$$\frac{3}{2}(x')^2 + \frac{4}{3}(y')^2 = 1$$

Si tratta di un'ellisse.

Esercizio 14.4. Determinare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, il tipo affine della conica reale di equazione

$$xy + y^2 + tx^2 + x = 1.$$

△

Esercizio 14.5. Si studi dal punto di vista affine (senza determinare gli autovalori della parte quadratica) la conica di equazione $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 2y - 17/2 = 0$, e se ne disegni il grafico. △

Soluzione. Scriviamo l'equazione della conica come

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz + 2yz - \frac{17}{2}z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Dato che dobbiamo studiare la conica dal punto di vista affine, non ci è più richiesto che le affinità del piano $z = 1$ (vedi l'esercizio precedente) siano isometrie. Vale a dire, stavolta possiamo usare per le congruenze tutte le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & b^1 \\ a^2_1 & a^2_2 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

La matrice che rappresenta la forma quadratica scritta sopra è

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -17/2 \end{pmatrix}$$

per portare Q in forma canonica affine, la matrice del primo cambio di base è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice Q si trasforma in

$$Q_1 = {A_1}^T Q A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -53/6 \end{pmatrix}$$

La matrice del secondo cambio di coordinate è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice Q_1 si trasforma in

$$Q_2 = {A_2}^T Q_1 A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

A questo punto vorremmo normalizzare gli elementi lungo la diagonale. Ma una normalizzazione è descritta da una matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

e la forma delle matrici che stiamo considerando ci prescrive $\lambda_3 = 1$. Dunque non possiamo normalizzare l'elemento di posto $(3,3)$ con un cambio di base descritto da una matrice diagonale. Allora usiamo il seguente trucco: se $\lambda \neq 0$, allora l'equazione $f(x) = 0$ e l'equazione $\lambda \cdot f(x) = 0$ sono in realtà la stessa equazione. Possiamo perciò moltiplicare o dividere tutti i coefficienti dell'equazione della conica per una costante non nulla ottenendo ancora la stessa conica. Nel nostro caso, per far comparire un -1 (ovvero la "versione normalizzata" di -9) nella posizione $(3,3)$ basta moltiplicare tutti i coefficienti per $1/9$. Otteniamo così la matrice

$$Q_2' = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È bene ripetere che in questo passaggio non abbiamo fatto nessun cambio di base, le due matrici Q_2 e Q_2' rappresentano la stessa equazione (nelle stesse coordinate). Adesso che l'elemento di posto $(3,3)$ è sistemato, possiamo normalizzare gli altri due col cambio di coordinate descritto dalla matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(27/8)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In definitiva, nelle coordinate finali (x', y') la conica ha equazione $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Si tratta cioè della "circonferenza" di raggio uno nel nuovo sistema di riferimento[3]. Per disegnarla, basta osservare che la circonferenza di raggio uno si inscrive nel quadrato di vertici $(x', y') = (\pm 1, \pm 1)$ ed è tangente ai lati nei punti di coordinate $(x', y') = (\pm 1, 0)$ e $(x', y') = (0, \pm 1)$. Abbiamo dunque bisogno di determinare le coordinate di questi punti nel vecchio sistema di riferimento. Il cambio di coordinate dalle (x, y) alle (x', y') è descritto dalla matrice prodotto

$$A_1 A_2 D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ & & \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[3]Il termine "circonferenza" è virgolettato in quanto stiamo lavorando in un sistema di riferimento affine; dunque, a rigori, non ha alcun senso parlare di circonferenze. È tuttavia utile pensare alla nostra conica come ad una circonferenza vista in un sistema di riferimento "distorto".

Si tratta cioè dell'affinità

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}x' - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}y' - \frac{1}{4} \\ \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}y' - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Come verifica, sostituiamo queste espressioni per x e y nell'equazione originale della conica. L'equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 2y - 17/2 = 0$$

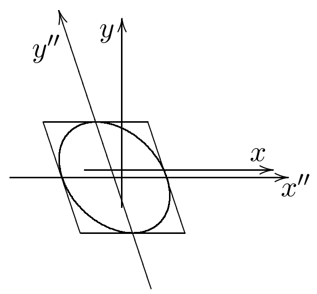
diventa

$$9(x')^2 + 9(y')^2 = 9,$$

ovvero

$$(x')^2 + (y')^2 = 1.$$

Avendo esplicitato la relazione tra le (x, y) e le (x', y'), è immediato disegnare il "quadrato" di vertici $(x', y') = (\pm 1, \pm 1)$ e la "circonferenza" ad esso inscritta, ottenendo così il grafico della conica data.



Si può verificare che il grafico ottenuto coincide con quello ottenuto mettendo la conica in forma canonica metrica come fatto nell'Esercizio 14.1.

15. Esercizi sulle matrici e le applicazioni nilpotenti

Si consiglia di svolgere gli esercizi nella sequenza proposta.

Una applicazione lineare $f: V \to V$ di uno spazio vettoriale in sé si dice *nilpotente* se esiste un intero $d > 0$ tale che $f^d = 0$. Per convenzione poniamo $f^0 = Id$ per ogni endomorfismo lineare f.

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice nilpotente se è nilpotente l'applicazione lineare indotta $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Esercizio 15.1. Dimostrare che una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ è nilpotente se e soltanto se Traccia$(A) =$ Traccia$(A^2) = 0$. Continua il risultato ad essere vero se sostituiamo $\mathbb{R}$ con un altro campo $\mathbb{K}$? △

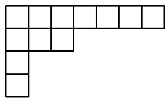
Esercizio 15.2. Utilizzare la relazione $(I - f)(I + f + \cdots + f^d) = I - f^{d+1}$ per dimostrare che se f è nilpotente allora $I + f$ è invertibile. △

Esercizio 15.3. Mostrare con un esempio che, se $f, g: V \to V$ sono nilpotenti, allora fg e $f + g$ possono essere non nilpotenti. △

Una *partizione* di un numero intero positivo n è una successione $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \in \mathbb{N}$ tale che $a_i \geq a_{i+1}$ per ogni $i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = n$ (si noti che necessariamente $a_i = 0$ per ogni $i \geq n$).

Esercizio 15.4. Scrivere tutte le partizioni di 4. △

Un modo molto comodo di scrivere le partizioni è mediante i cosiddetti *diagrammi di Young*. Il diagramma di Young della partizione $a_0, a_1, \ldots$ è semplicemente un diagramma a forma di scala, in cui la prima riga è costituita da a_0 quadretti, la seconda riga da a_1 quadretti, e cosìvia. Ad esempio, il diagramma di Young della partizione di 12 data da $7, 3, 1, 1, 0, 0, \ldots$ è



Esercizio 15.5. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n ed $f \colon V \to V$ è un'applicazione lineare nilpotente, poniamo

$$a_0 = n - \text{rango}(f), a_1 = \text{rango}(f) - \text{rango}(f^2), \ldots, a_i = \text{rango}(f^i) - \text{rango}(f^{i+1}), \ldots$$

Dimostrare:

1. $\sum a_i = n$
2. $a_i = \dim(\ker f \cap \operatorname{Imm} f^i)$ per ogni i
3. $a_0, a_1, \ldots$ è una partizione di n.
4. $f^n = 0$ e $\text{rango}(f^i) = \text{rango}(f^{i+1})$ se e soltanto se $f^i = 0$.

$\triangle$

Esercizio 15.6. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $< n$ nella variabile x e sia $D \colon V \to V$ l'operatore di derivazione. Dire se i seguenti tre operatori sono nilpotenti e, nel caso, calcolarne le partizioni di n associate:

$$D,\ D - xD^2,\ D - xD^2 + \frac{x^2}{2} D^3 \colon V \to V.$$

$\triangle$

Esercizio 15.7. Sia $a_0, \ldots, a_i, \ldots$ la partizione associata ad una applicazione nilpotente $f \colon V \to V$. Dimostrare che:

1. $\dim \ker f^k = \sum_{i<k} a_i$ per ogni $k > 0$.
2. Esiste una base $e_1, \ldots, e_n$ di V con la seguente proprietà: per ogni coppia j, k di interi positivi, vale $e_j \in \ker f^k$ se e solo se $j \le \sum_{i<k} a_i$.
3. f si rappresenta, in un'opportuna base, con una matrice triangolare superiore avente gli elementi della diagonale tutti nulli (Sugg.: $f(\ker f^k) \subset \ker f^{k-1}$).

$\triangle$

Esercizio 15.8. Una matrice quadrata è nilpotente se e soltanto se è coniugata ad una matrice triangolare strettamente superiore (cioè $a_{ij} = 0$ se $i \ge j$). Utilizzare questo fatto per determinare il polinomio caratteristico di una matrice nilpotente.

$\triangle$

Esercizio 15.9. $(*)$ Sia $f \colon V \to V$ lineare e nilpotente ed indichiamo $H = \operatorname{Imm}(f) \subset V$. Per ogni $v \in V$, $v \neq 0$, denotiamo con $\nu(v)$ il più piccolo intero positivo d tale che $f^d(v) = 0$.
Sia $v \in V - H$ un vettore fissato tale che $d = \nu(v) \le \nu(w)$ per ogni $w \in V - H$; dimostrare:

1. $v, f(v), \ldots, f^{d-1}(v)$ sono linearmente indipendenti e $\nu(f(v)) = d - 1$.
2. $f^i(v)$ non appartiene all'immagine di f^{i+1} per ogni $i < d$.
3. Detto W il sottospazio di dimensione d generato da $v, f(v), \ldots, f^{d-1}(v)$, mostrare che $f(W) \subset W$ e determinare la partizione di d associata alla restrizione di f a W.
4. Determinare una base di $W \cap f^i(V)$ per ogni i.
5. Dimostrare, per induzione su d, che esiste un sottospazio $Z \subset V$ tale che $V = W \oplus Z$ e $f(Z) \subset Z$.
   (Sugg.: se $d = 1$ basta prendere come Z un qualsiasi iperpiano che contiene H e non contiene v. Se $d > 1$, per induzione esiste una decomposizione $H = (W \cap H) \oplus Z_1$ tale che $f(Z_1) \subset Z_1$. Considerare $K = \{x \in V \mid f(x) \in Z_1\}$, Z

un iperpiano in K contenente Z_1 e non contenente $f^{d-1}(v)$ e dimostrare che $V = W \oplus Z$.)

$\triangle$

Esercizio 15.10. $(*)$ *Forma canonica di Jordan (leggasi giordàn) per le applicazioni nilpotenti.*
Sia V un spazio vettoriale di dimensione finita e $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare nilpotente con partizione associata $a_0, a_1, \ldots$.
Utilizzare l'Esercizio 15.9 per dimostrare che esistono vettori $v_1, v_2, \ldots, v_{a_0}$, detti *generatori ciclici*, tali che i vettori non nulli della forma $f^j(v_i)$, $j \geq 0$, formano una base di V. $\triangle$

Esercizio 15.11. $(*)$ $A \in M_n(\mathbb{C})$ è nilpotente se e solo se le matrici $A, A^2, \ldots, A^n$ hanno tutte traccia nulla. $\triangle$

Esercizio 15.12. Sia A una matrice di $M_n(\mathbb{C})$ con un unico autovalore λ (di molteplicità n). Dimostrare che $A - \lambda \mathrm{Id}$ è nilpotente. $\triangle$

Soluzione. Poiché A ha il solo autovalore λ, con molteplicità n, coniugando A con un opportuno elemento $P \in GL_n(\mathbb{C})$ si ottiene una matrice triangolare superiore con tutti λ sulla diagonale. Ma allora $P^{-1}AP - \lambda\mathrm{Id}$ è strettamente triangolare superiore, e dunque nilpotente. Ma $P^{-1}AP - \lambda\mathrm{Id} = P^{-1}(A - \lambda\mathrm{Id})P$ e da questo segue immediatamente che $A - \lambda\mathrm{Id}$ è nilpotente.

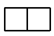
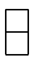
Esercizio 15.13. Scrivere le forme canoniche delle matrici nilpotenti di ordine n, per $n = 1, 2, 3, 4$. $\triangle$

Soluzione. Le forme canoniche delle matrici nilpotenti $n \times n$ sono in corrispondenza biunivoca con i diagrammi di Young di ordine n. Se indichiamo con A una matrice nilpotente, la lunghezza della prima riga del diagramma di Young corrispondente ad A è uguale a $\dim \ker A$; la lunghezza della seconda riga è $\dim(\ker A^2/\ker A)$ e così via. Si ha

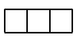
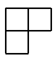
$n = 1)$

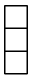
 $\mapsto (0)$

$n = 2)$

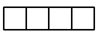
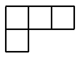
 $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;  $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

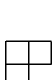
$n = 3)$

 $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;  $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

 $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 4)$

 $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;  $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

 $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;  $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Esercizi sull'esponenziale di matrici

Esercizio 16.1. Sullo spazio delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$ si consideri la norma

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (A^i_j)^2$$

Dimostrare che la serie

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

converge assolutamente per ogni matrice A. △

Soluzione. La serie delle norme è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!}$$

Poiché $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, si ha $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, per cui la serie delle norme è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

che converge per ogni A (in particolare, converge ad $e^{\|A\|}$).

Esercizio 16.2. Si consideri l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ definita da

$$x + \sqrt{-1}\, y \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Dimostrare che si tratta di un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare iniettiva che è anche un omomorfismo di anelli. △

Soluzione. Che φ sia $\mathbb{R}$-lineare ed iniettiva è evidente; mostriamo che è un omomorfismo di anelli. Siano $z_1 = x_1 + \sqrt{-1}\, y_1$ e $z_2 = x_2 + \sqrt{-1}\, y_2$ due elementi di $\mathbb{C}$. Allora

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1 \cdot z_2) &= \varphi\left((x_1x_2 - y_1y_2) + \sqrt{-1}(x_1y_2 + x_2y_1)\right) \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2).
\end{aligned}$$

Esercizio 16.3. Sia φ l'applicazione dell'Esercizio 16.2. Calcolare $\varphi(e^{\sqrt{-1}\,\vartheta})$ e dedurne l'isomorfismo $U_1 \simeq SO_2$. △

Soluzione. Si ha

$$\varphi(e^{\sqrt{-1}\,\vartheta}) = \varphi(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Dunque φ induce un omomorfismo di gruppi $\varphi\colon U_1 \to SO_2$ che è evidentemente un isomorfismo.

Esercizio 16.4. Dotiamo $\mathbb{C}$ dell'usuale norma euclidea e $M_2(\mathbb{R})$ della norma definita nell'Esercizio 16.1. Dimostrare che l'applicazione φ dell'Esercizio 16.2 è continua. △

Soluzione. Poiché φ è lineare, basta dimostrare che

$$\lim_{z\to 0} \varphi(z) = 0$$

ovvero che

$$\lim_{z\to 0} \|\varphi(z)\| = 0$$

Infatti se questa condizione è verificata, si ha, preso comunque $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\|\varphi(z) - \varphi(z_0)\| = \|\varphi(z - z_0)\| \to 0 \qquad \text{per } z \to z_0$$

Se $z = x + \sqrt{-1}\,y$, allora

$$\|\varphi(z)\|^2 = 2(x^2 + y^2) = 2|z|^2 \to 0 \qquad \text{per } z \to 0.$$

Esercizio 16.5. Calcolare

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

△

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} &= \exp\left(\varphi(\sqrt{-1}\,\vartheta)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\varphi(\sqrt{-1}\,\vartheta)\right)^n}{n!} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varphi\left(\frac{(\sqrt{-1}\,\vartheta)^n}{n!}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \varphi\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\sqrt{-1}\,\vartheta)^n}{n!}\right) \\
&= \varphi \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\sqrt{-1}\,\vartheta)^n}{n!}\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-1}\,\vartheta)^n}{n!}\right) \\
&= \varphi(e^{\sqrt{-1}\,\vartheta}) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esercizio 16.6. Sia $\mathbb{K}$ uguale a $\mathbb{R}$ oppure a $\mathbb{C}$. Un'applicazione

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R} &\to M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto A(t) \end{aligned}$$

si dice differenziabile se tutte le componenti $A^i_j(t)$ sono funzioni differenziabili. La derivata di A rispetto a t è la matrice che ha come componenti le derivate $\dfrac{dA^i_j(t)}{dt}$.

Dimostrare che il prodotto di matrici differenziabili è differenziabile e si ha

$$\frac{d(A \cdot B)}{dt} = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}$$

△

Soluzione. Siano $A(t) \in M_{m,l}(\mathbb{K})$ e $B(t) \in M_{l,n}(\mathbb{K})$ differenziabili. Il loro prodotto è la matrice $(A \cdot B)(t) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definita da

$$(A \cdot B)^i_j(t) = \sum_{k=1}^{l} A^i_k(t) B^k_j(t)$$

Essendo somma di prodotti di funzioni differenziabili, $(A \cdot B)^i_j(t)$ è differenziabile. Dunque

$$t \mapsto (A \cdot B)(t)$$

è un'applicazione differenziabile. La derivata di $(A \cdot B)(t)$ è data da

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d(A \cdot B)}{dt}\right)^i_j &= \frac{d(A \cdot B)^i_j}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{l} A^i_k(t) B^k_j(t)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{dA^i_k(t)}{dt} \cdot B^k_j(t) + A^i_j(t) \cdot \frac{dB^k_j(t)}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}\right)^i_j
\end{aligned}$$

Esercizio 16.7. Sia $A \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ differenziabile e tale che

1. $A(t) \in SO_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $A(0) = \mathrm{Id}$

Dimostrare che

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}$$

è antisimmetrica. △

Soluzione. Poiché $A(t) \in SO_n$, in particolare $A(t)$ è ortogonale, dunque $A^T(t) \cdot A(t) = \mathrm{Id}$. Derivando quest'uguaglianza rispetto a t troviamo

$$\frac{dA^T(t)}{dt} \cdot A(t) + A^T(t) \cdot \frac{dA(t)}{dt} = 0$$

È immediato osservare che la derivata della trasposta è la trasposta della derivata, dunque possiamo riscrivere l'uguaglianza qui sopra come

$$\left(\frac{dA(t)}{dt}\right)^T \cdot A(t) + A^T(t) \cdot \frac{dA(t)}{dt} = 0$$

Valutando in $t = 0$ troviamo

$$\left(\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}\right)^T + \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 16.8. Sia $A \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ differenziabile e tale che

1. $A(t) \in U_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $A(0) = \mathrm{Id}$

Dimostrare che

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}$$

è antihermitiana (una matrice B si dice antihermitiana se $B^* = -B$). △

Soluzione. È del tutto analogo all'esercizio precedente.

Esercizio 16.9. Dimostrare che si ha

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dedurne che la soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è data da

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \cdot \mathbf{x}_0$$

△

Soluzione. Dalla definizione di derivata di una matrice segue immediatamente che, se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione differenziabile, si ha $\dfrac{d(f(t) \cdot A)}{dt} = \dfrac{df(t)}{dt} \cdot A$. In particolare,

$$\frac{d(t^n \cdot A)}{dt} = n\, t^{n-1} \cdot A$$

Per definizione

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(A)^n}{n!}$$

Si tratta di una serie di potenze con raggio di convergenza infinito. Dunque, in particolare, la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e possiamo scambiare l'operazione di derivazione con quella di serie, ottenendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n \frac{A^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \frac{A^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A \cdot t^{n-1} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot t^n \frac{A^n}{n!}
\end{aligned}$$

La moltiplicazione a sinistra per una matrice è un'applicazione lineare e continua (verificarlo) e dunque possiamo portar fuori "$A\cdot$" dalla serie, ottenendo

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A \cdot e^{ta}$$

Mettendo A in evidenza a destra anziché a sinistra si ottiene l'altra uguaglianza. Mostriamo infine che

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \cdot \mathbf{x}_0$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Si ha

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{tA} \cdot \mathbf{x}_0 = A \cdot e^{tA} \cdot \mathbf{x}_0 = A \cdot \mathbf{x}(t)$$

Inoltre

$$\mathbf{x}(0) = e^0 \cdot \mathbf{x}_0 = \mathrm{Id} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

Esercizio 16.10. Sia $\mathbb{K}$ uguale a $\mathbb{R}$ oppure a $\mathbb{C}$, e sia P un elemento di $GL_n(\mathbb{K})$. Dimostrare che il coniugio per P

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{K}) &\to M_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto P^{-1}AP \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare e continua (rispetto alla solita norma). Dedurne che

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$$

△

Soluzione. La linearità è ovvia. La continuità segue immediatamente dalla disuguaglianza

$$\|P^{-1} \cdot A \cdot P\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|P\|$$

Dunque possiamo portare il coniugio fuori dalla serie che definisce $e^{P^{-1}AP}$:

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}AP} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} P^{-1}\frac{A^n}{n!}P \\ &= P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) P = P^{-1}e^A P \end{aligned}$$

Esercizio 16.11. Risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 6y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

con dato iniziale

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

△

Soluzione. Per quanto dimostrato nell'Esercizio 16.9, la soluzione del sistema è data da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

dunque A ha due autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Avendo due autovalori distinti, A è diagonalizzabile. Una base per l'1-autospazio è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre una base per il 2-autospazio è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ne segue

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dall'Esercizio 16.10 segue pertanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4e^t - 3e^{2t})\, x_0 + (6e^t - 6e^{2t})\, y_0 \\ (-2e^t + 2e^{2t})\, x_0 + (-3e^t + 4e^{2t})\, y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = (4e^t - 3e^{2t})\, x_0 + (6e^t - 6e^{2t})\, y_0 \\ y(t) = (-2e^t + 2e^{2t})\, x_0 + (-3e^t + 4e^{2t})\, y_0 \end{cases}$$

Esercizio 16.12. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dimostrare che, se A e B commutano, allora $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. Provare con un esempio che, se A e B non commutano, in generale $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$. △

Soluzione. Se A e B commutano, allora $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{A^k B^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) = e^A \cdot e^B \end{aligned}$$

Come esempio di matrici che non commutano, prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$e^{A+B} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$$

ma

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 16.13. Risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

con dato iniziale

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

$\triangle$

Soluzione. Per quanto dimostrato nell'Esercizio 16.9, la soluzione del sistema è data da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

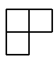
Calcoliamo gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$$

dunque A ha un unico autovalore, con molteplicità tre: $\lambda = 1$. Osserviamo che

$$A - 1 \cdot \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathrm{rg}(A - 1 \cdot \mathrm{Id}) = 1$ e $\dim(\ker(A - 1 \cdot \mathrm{Id})) = 2$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è minore della sua molteplicità algebrica: A non è diagonalizzabile. Per mettere A in una forma "semplice" al fine di calcolare esplicitamente l'esponenziale e^{tA}, utilizziamo i risultati degli esercizi 15.12 e 15.13 sulle matrici nilpotenti. Poniamo $B = A - \mathrm{Id}$. Dall'Esercizio 15.12 sulle matrici nilpotenti segue che B è nilpotente. Ma allora esiste $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che $P^{-1}BP$ sia in forma canonica. Poiché $\dim(\ker(A - 1 \cdot \mathrm{Id})) = 2$, il diagramma di Young di B è



e dunque la forma canonica di B è

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne segue

$$P^{-1}AP = P^{-1}(\mathrm{Id} + B)P = \mathrm{Id} + P^{-1}BP = \mathrm{Id} + B_0$$

e dunque

$$P^{-1}tAP = t\mathrm{Id} + tB_0$$

Le matrici $t\mathrm{Id}$ e tB_0 commutano, dunque (Esercizio 16.12)

$$\begin{aligned} e^{t\mathrm{Id}+tB_0} &= e^{t\mathrm{Id}} \cdot e^{tB_0} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tornando al sistema di equazioni differenziali, otteniamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= e^{P(t\mathrm{Id}+tB_0)P^{-1}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rimane da determinare la matrice P: le colonne di P sono le coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dei vettori di una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta l'applicazione lineare B è in forma canonica. Dal diagramma di Young di B (o, equivalentemente, dalla forma di B_0) si vede che $\mathbf{e}_3$ è un qualunque vettore di $\ker B^2$ che non appartiene a $\ker B$, $\mathbf{e}_2 = B\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}_1$ è un vettore di $\ker B$ indipendente da $\mathbf{e}_2$. Inoltre, poiché $B^2 = 0$, come $\mathbf{e}_3$ si può prendere un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ che non stia in $\ker B$. Scegliamo

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = B\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione

$$\begin{cases} x(t) = (-3te^t + e^t)x_0 - 2te^t y_0 - te^t z_0 \\ y(t) = 3te^t x_0 + (e^t + 2te^t)y_0 + te^t z_0 \\ z(t) = 3te^t x_0 + 2te^t y_0 + (e^t + te^t)z_0 \end{cases}$$

Esercizio 16.14. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dimostrare che

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A}$$

△

Soluzione. Siano $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ gli autovalori di A (non necessariamente distinti). Esiste $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\det(e^A) &= \det(P^{-1}e^A P) = \det e^{P^{-1}AP}\\ &= \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}\\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\mathrm{tr}A}\end{aligned}$$

Esercizio 16.15. Sia $\mathbb{K}$ uguale a $\mathbb{R}$ oppure a $\mathbb{C}$. Si dimostri che l'operazione di trasposizione

$$^T\colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$$

è lineare e continua. Dedurne che, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, allora $(e^A)^T = e^{A^T}$. △

Soluzione. La trasposizione è evidentemente lineare. Per provare la continuità basta osservare che $\|A^T\| = \|A\|$. L'identità $e^{A^T} = (e^A)^T$ segue immediatamente.

Esercizio 16.16. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisimmetrica. Dimostrare che $e^A \in SO_n$. △

Soluzione. Sia A antisimmetrica. Allora $A^T = -A$. In particolare A commuta con A^T. Dagli Esercizi 16.12 e 16.15 otteniamo

$$(e^A)^T(e^A) = e^{A^T}e^A = e^{A^T+A} = e^0 = \mathrm{Id}$$

Dunque $e^A \in O_n$. Inoltre, poiché A è antisimmetrica, $\mathrm{tr}A = 0$ dunque (Esercizio 16.14) $\det(e^A) = 1$, ovvero $e^A \in SO_n$.

Esercizio 16.17. Dimostrare che l'operazione di coniugazione complessa

$$\overline{}\colon M_{m,n}(\mathbb{C}) \to M_{m,n}(\mathbb{C})$$

è $\mathbb{R}$-lineare e continua. Dedurne che, se $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$ e $(e^A)^* = e^{A^*}$. △

Soluzione. Del tutto analogo all'Esercizio 16.15.

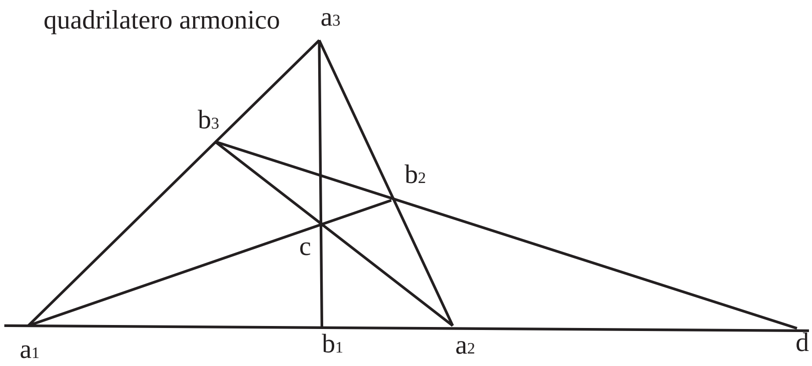
Esercizio 16.18. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ antihermitiana (cioè $A^* = -A$). Dimostrare che $e^A \in U_n$. Se inoltre $\mathrm{tr}A = 0$, allora $e^A \in SU_n$. △

Soluzione. Del tutto analogo all'Esercizio 16.16.

17. Il quadrilatero armonico

Per quadrilatero completo si intende la configurazione di un insieme di 4 rette nel piano proiettivo, tre delle quali non siano concorrenti, e dei sei punti nelle quali esse si intersecano.
Se $p, q \in \mathbb{P}^n$ sono punti distinti, denoteremo con $\overline{pq}$ la retta proiettiva $p + q$ da essi generata.

Teorema 17.1. (del quadrilatero armonico)
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo su di un campo di caratteristica $\neq 2$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^2$ punti non allineati e $b_2 \in \overline{a_2a_3}$, $b_3 \in \overline{a_3a_1}$ tali che $b_i \neq a_j$ per ogni i, j. Siano c il punto di intersezione di $\overline{a_1b_2}$ e $\overline{a_2b_3}$; b_1 il punto di intersezione di $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{a_3c}$; d il punto di intersezione di $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{b_2b_3}$ (vedi figura). Allora vale $(a_1a_2b_1d) = -1$.



Il quadrilatero citato nel teorema si riferisce a quello formato dalle 4 rette $\overline{a_1a_3}$, $\overline{a_1b_2}$, $\overline{a_2a_3}$ e $\overline{a_2b_3}$.

Dimostrazione. Denotiamo con L la retta $\overline{a_1a_2}$, con M la retta $\overline{b_2b_3}$ e con $e \in M$ il punto di intersezione con la diagonale $\overline{a_3c}$.
Siccome i punti c e a_3 sono esterni alle rette L e M, possiamo considerare le due proiezioni di centri c e a_3

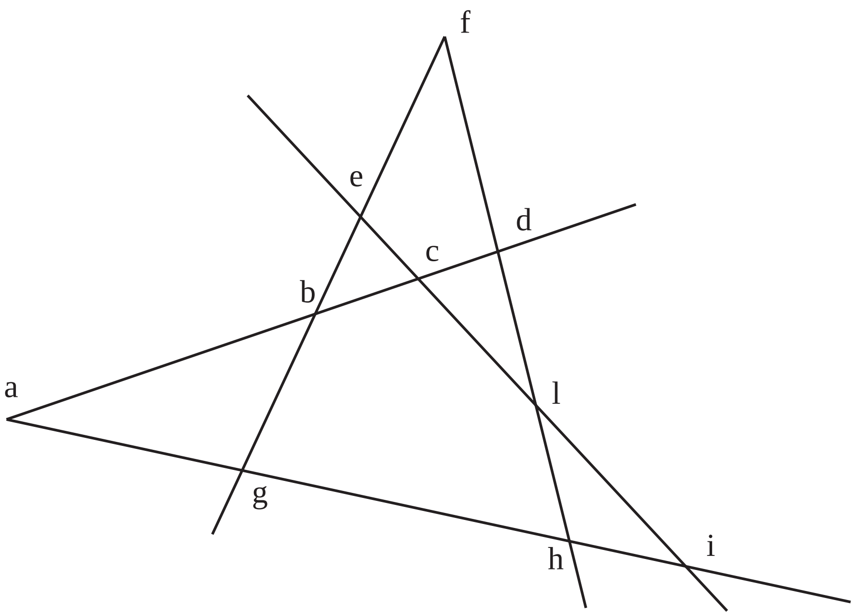
$$\pi_c, \pi_{a_3} \colon L \to M.$$

Dalla figura appare chiaro che $\pi_c(a_1) = b_2$, $\pi_c(a_2) = b_3$, $\pi_c(b_1) = e$, $\pi_c(d) = d$ e quindi per l'invarianza del birapporto $(a_1a_2b_1d) = (b_2b_3ed)$.
Similmente $\pi_{a_3}(a_2) = b_2$, $\pi_{a_3}(a_1) = b_3$, $\pi_{a_3}(b_1) = e$, $\pi_{a_3}(d) = d$ e quindi per l'invarianza del birapporto $(a_2a_1b_1d) = (b_2b_3ed)$.
Dunque $(a_1a_2b_1d) = (a_2a_1b_1d)$ ma, dalla formula generale $(BACD) = (ABCD)^{-1}$, segue che $(a_1a_2b_1d) = (a_1a_2b_1d)^{-1}$ e, non potendo essere il birapporto uguale ad 1, dovrà essere necessariamente -1. □

Esercizio 17.2. Nelle notazioni della dimostrazione, provare che $(a_3ceb_1) = -1$. △

Esercizio 17.3. Verificare che, dati 5 punti distinti A, B, C, D, E sulla retta proiettiva vale $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$ △

Esercizio 17.4. Per pentagono completo si intende la figura formata da 5 rette in $\mathbb{P}^2$, tre delle quali non concorrenti, e dai 10 punti nei quali esse si intersecano. Con riferimento alla figura



dimostrare che $(hldf)(ihag) = (ilce)$. △

18. Esercizi di geometria proiettiva

Esercizio 18.1. Si consideri l'azione di $\mathbb{K}^*$ su $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ indotta dall'operazione di moltiplicazione per uno scalare. Indichiamo lo spazio delle orbite con il simbolo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Dimostrare che si ha $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$. △

Soluzione. Innanzi tutto osserviamo che $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ si può scrivere come l'unione disgiunta dei due sottoinsiemi stabili per l'azione di $\mathbb{K}^*$ definiti come

$$X_1 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ tali che } x_0 \neq 0\}$$

$$X_2 = \{(0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

Come rappresentante dell'orbita dell'elemento $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X_1$ possiamo prendere l'elemento

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

In questo modo abbiamo una biiezione $X_1/\mathbb{K}^* \simeq \mathbb{K}^n$. Per quanto riguarda X_2, osserviamo che c'è una biiezione tra X_2 e $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ compatibile con l'azione di $\mathbb{K}^*$. Dunque $X_2/\mathbb{K}^* \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

Esercizio 18.2. Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si può scrivere come l'unione

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{K} \cup \{*\}$$

dove $\{*\}$ indica l'insieme costituito da un solo punto. △

Soluzione. Per induzione su $n \geq 0$. Per $n = 0$, dobbiamo dimostrare che lo spazio delle orbite per l'azione di $\mathbb{K}^*$ su $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ si riduce a un punto. Ma questo equivale a dire che $\mathbb{K}^*$ agisce transitivamente sugli elementi non nulli di $\mathbb{K}$ il che è evidente. Il passo induttivo è dato dall'esercizio precedente.

Esercizio 18.3. Determinare l'equazione della retta proiettiva contenuta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e passante per i punti $[1, 3, -1]$ e $[0, 1, 1]$. △

Soluzione. La retta cercata è la proiettivizzazione del piano π in $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1, 3, -1)$ e $(0, 1, 1)$. Si ha $(x_0, x_1, x_2) \in \pi$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 3 & 1 \\ x_2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$4x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

che è l'equazione cercata. Un altro modo di risolvere il problema è il seguente: l'equazione di una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è della forma

$$a\,x_0 + b\,x_1 + c\,x_2 = 0$$

Imponendo il passaggio per i punti $[1, 3, -1]$ e $[0, 1, 1]$ otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è

$$\begin{cases} b = -a/4 \\ c = a/4 \end{cases}$$

Dunque l'equazione della retta è $\frac{a}{4}(4x_0 - x_1 + x_2) = 0$, ovvero

$$4x_0 - x_1 + x_2 = 0.$$

Esercizio 18.4. Determinare l'equazione del piano proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti $[0, 1, 1, 0]$, $[1, 0, 0, 1]$ e $[0, 1, 0, 1]$. △

Soluzione. Si tratta di un esercizio del tutto analogo al precedente: il piano cercato è la proiettivizzazione del sottospazio vettoriale V di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0, 1)$. Si ha $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in V$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

che è l'equazione cercata. Un altro modo di risolvere il problema è il seguente: l'equazione di un piano in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è della forma

$$a\, x_0 + b\, x_1 + c\, x_2 + d\, x_3 = 0$$

Imponendo il passaggio per i punti $[0, 1, 1, 0]$, $[1, 0, 0, 1]$ e $[0, 1, 0, 1]$ otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è

$$\begin{cases} b = a \\ c = -a \\ d = -a \end{cases}$$

Dunque l'equazione del piano è $a(x_0 + x_1 - x_2 - x_3) = 0$, ovvero

$$x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Esercizio 18.5. Per ognuno dei seguenti 4 sottoinsiemi di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dire se si tratta di un sottospazio proiettivo e, nel caso, determinarne la dimensione.

1. $A = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_0 = 3x_1 = -x_2\}$
2. $B = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_0 = x_1 + 1\}$
3. $C = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_0 = 2x_1, \sum x_i = 1\}$
4. $D = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_0 = 2x_1, \sum x_i^2 = 1\}$

Dire inoltre se $E = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid x_0 = 2x_1, \sum x_i^2 = 1\}$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. △

Esercizio 18.6. Siano $a, b, c \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ punti non allineati e $P \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ un piano proiettivo disgiunto da a, b, c.
Dimostrare che ognuna delle rette $a + b, b + c, c + a$ interseca il piano P in un punto e che i tre punti $(a + b) \cap P$, $(b + c) \cap P$ e $(c + a) \cap P$ sono distinti ed allineati. △

Esercizio 18.7. Determinare per quali punti $[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, i punti $[1, 2, 1]$, $[t_0, t_1, t_1]$ e $[0, t_0, t_1]$ sono allineati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. △

Soluzione. I punti $[1, 2, 1]$, $[t_0, t_1, t_1]$ e $[0, t_0, t_1]$ sono allineati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se e solo se i vettori $(1, 2, 1)$, (t_0, t_1, t_0) e $(0, t_0, t_1)$ sono allineati in $\mathbb{R}^3$. Questo accade se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_0 & 0 \\ 2 & t_1 & t_0 \\ 1 & t_0 & t_1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$t_1{}^2 - 3t_0t_1 + t_0{}^2 = 0.$$

Osserviamo innanzi tutto che, essendo omogenea, quest'equazione è ben definita su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Per risolverla usiamo il seguente trucco: un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si può scrivere come $[1,0]$ oppure nella forma $[t,1]$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. È immediato osservare che $[1,0]$ non è soluzione dell'equazione, dunque tutte le soluzioni (se esistono) sono della forma $[t,1]$. Sostituendo nell'equazione data $(t,1)$ a (t_0,t_1) troviamo l'equazione

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Troviamo così i due punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$P_1 = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] = [3-\sqrt{5}, 2]$$

e

$$P_2 = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right] = [3+\sqrt{5}, 2]$$

Esercizio 18.8. Determinare le equazioni di tutti i piani $P \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti la retta $x_0 = x_1 = 0$. △

Soluzione. La retta di equazione $x_0 = x_1 = 0$ è l'intersezione del piano π_1 di equazione $x_0 = 0$ col piano π_2 di equazione $x_1 = 0$. I piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti la retta data sono semplicemente i piani la cui equazione è combinazione lineare dell'equazione di π_1 e di quella di π_2, sono cioè i piani di equazione

$$a\,x_0 + b\,x_1 = 0$$

Poiché l'equazione di un piano in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è determinata univocamente solo a meno di moltiplicazione per un scalare non nullo, otteniamo che i piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti la retta di equazione $x_0 = x_1 = 0$ sono parametrizzati dai punti $[a,b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Questo si poteva prevedere mediante il pincipio di dualità: i piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti una retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ corrispondono ai punti di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenuti in una retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, e dunque ai punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Un altro modo di risolvere l'esercizio è il seguente: l'equazione di un piano π in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ deve essere della forma

$$a\,x_0 + b\,x_1 + c\,x_2 + d\,x_3 = 0$$

Se il piano π contiene la retta di equazione $x_0 = x_1 = 0$, l'equazione del piano deve essere soddisfatta da tutti i punti di questa retta, ovvero da tutti i punti della forma $[0,0,\alpha,\beta]$. Per linearità, questo equivale a dire che deve essere soddisfatta dai punti $[0,0,1,0]$ e $[0,0,0,1]$. Sostituendo queste coordinate nell'equazione del piano troviamo $c = d = 0$ e dunque l'equazione di un piano contenente la retta data è

$$a\,x_0 + b\,x_1 = 0$$

Infine, l'esercizio poteva essere risolto anche come segue. Un piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta di equazione $x_0 = x_1 = 0$ è il proiettivizzato di un sottospazio di dimensione 3 si $\mathbb{R}^4$ contenente il piano vettoriale V di equazione $x_0 = x_1 = 0$. Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^4$ con questa proprietà ammette una base della forma $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ con $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V$ e $\mathbf{b}_3 \in V^\perp$. Scegliamo $\mathbf{b}_1 = (0,0,1,0)$ e $\mathbf{b}_2 = (0,0,0,1)$. Il vettore $\mathbf{b}_3$ deve essere della forma $\mathbf{b}_3 = (\alpha, \beta, 0, 0)$. Dunque il piano generato da $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & \alpha \\ x_1 & 0 & 0 & \beta \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\beta\, x_0 - \alpha\, x_1 = 0.$$

Esercizio 18.9. Dimostrare che l'insieme $L = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid x_0 = x_1 = x_2\}$ è una retta proiettiva e determinare l'equazione del piano $P \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta L ed il punto $[0, 1, 2, 0]$. △

Soluzione. Il sottoinsieme L è definito da un sistema lineare omogeneo, dunque è un sottospazio proiettivo. Per dimostrare che si tratta di una retta basta osservare che ha dimensione uno. Infatti, L è il proiettivizzato del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha rango due, dunque $\dim V = 4 - 2 = 2$. Ne segue che $\dim L = 1$, come volevamo dimostrare. Per determinare l'equazione di P, prendiamo due punti distinti di L, ad esempio $[1, 1, 1, 0]$ e $[0, 0, 0, 1]$. Il piano P ha allora equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 2 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$-x_0 + 2\, x_1 - x_2 = 0$$

Esercizio 18.10. Determinare la proiettività ϕ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé tale che $\phi([1, 0]) = [1, 1]$, $\phi([0, 1]) = [1, -1]$ e $\phi([1, 2]) = [2, 1]$. △

Soluzione. Una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé è indotta da un automorfismo lineare di $\mathbb{R}^2$:

$$\phi([\mathbf{v}]) = [A \cdot \mathbf{v}], \qquad A \in GL_2(\mathbb{R})$$

Se scriviamo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

troviamo

$$\phi([t_0, t_1]) = [a\, t_0 + b\, t_1, c\, t_0 + d\, t_1]$$

Se scriviamo $[1, 0] = [\infty, 1]$, allora ogni elemento di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si può scrivere nella forma $[t, 1]$, con $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e l'azione di ϕ si scrive

$$\phi([t, 1]) = \left[\frac{a\, t + b}{c\, t + d}, 1\right]$$

In questo modo rappresentiamo le proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé come trasformazioni lineari fratte

$$\phi\colon t \mapsto \frac{a\, t + b}{c\, t + d}, \qquad ac - bd \neq 0$$

Per determinare ϕ in questa forma, dobbiamo prima scrivere tutti i punti dati dal problema nella forma $[t, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned} &[1, 0] = [\infty, 1] \Rightarrow t = \infty \\ &[1, 1] = [1, 1] \Rightarrow t = 1 \\ &[0, 1] = [0, 1] \Rightarrow t = 0 \\ &[1, -1] = [-1, 1] \Rightarrow t = -1 \\ &[1, 2] = [1/2, 1] \Rightarrow t = 1/2 \\ &[2, 1] = [2, 1] \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Dunque cerchiamo

$$\phi(t) = \frac{a\,t + b}{c\,t + d}$$

tale che

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= 1 \\ \phi(0) &= -1 \\ \phi(1/2) &= 2 \end{aligned}$$

Queste tre condizioni si traducono immediatamente nel sistema lineare

$$\begin{cases} a = c \\ b = -d \\ a + 2\,b = 2\,c + 4\,d \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} b = \frac{1}{6}a \\ c = a \\ d = -\frac{1}{6}a \end{cases}$$

Ne segue

$$\phi(t) = \frac{6t + 1}{6t - 1}$$

o, se si preferisce,

$$\phi([t_0, t_1]) = [6t_0 + t_1, 6t_0 - t_1].$$

Un altro modo di risolvere l'esercizio è il seguente. Le tre condizioni $\phi([1, 0]) = [1, 1]$, $\phi([0, 1]) = [1, -1]$ e $\phi([1, 2]) = [2, 1]$ equivalgono a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\nu \\ \nu \end{pmatrix}$$

ovvero al sistema lineare

$$\begin{cases} a = \lambda \\ c = \lambda \\ b = -\mu \\ d = \mu \\ a + 2b = 2\nu \\ c + 2d = \nu \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}\nu \\ c = \frac{3}{2}\nu \\ b = \frac{1}{4}\nu \\ d = -\frac{1}{4}\nu \\ \lambda = \frac{3}{2}\nu \\ \mu = -\frac{1}{4}\nu \end{cases}$$

Dunque ϕ è indotta dall'applicazione lineare A rappresentata dalla matrice

$$\frac{1}{4}\nu \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

e, dato che la matrice che rappresenta ϕ è unica solo a meno della moltiplicazione per uno scalare non nullo, possiamo scegliere

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

come rappresentante per ϕ.

Esercizio 18.11. Dimostrare che ogni proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ possiede almeno un punto fisso. △

Esercizio 18.12. Dimostrare che per ogni proiettività ϕ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ esiste un iperpiano proiettivo $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tale che $\phi(H) = H$. (Sugg.: Sia $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ lineare che induce ϕ e considerare $H = \{\sum a_i x_i = 0\}$ dove $(a_0, \dots, a_n)$ è un autovettore della trasposta di f.) △

Esercizio 18.13. Per ogni $n \geq 3$ e per ogni campo $\mathbb{K}$, mostrare che esistono coppie di rette proiettive $A, B \subset \mathbb{P}^n$ tali che $A \cap B = \emptyset$. △

Esercizio 18.14. Provare che un sottoinsieme $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è un sottospazio proiettivo se e soltanto se per ogni coppia di punti $p, q \in H$ si ha $p + q \subset H$. △

Esercizio 18.15. Si considerino i quattro punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: $a = [1, 1]$, $b = [1, 0]$, $c = [0, 1]$, $d = [3, 1]$.

1. Calcolare il birapporto $(abcd) \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
2. Determinare la proiettività $\phi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a$, $\phi(c) = d$ e dimostrare che $\phi(d) = c$ e che ϕ^2 è l'identità.

△

Soluzione. Una volta scritti i quattro punti dati nella forma

$$a = [t_a, 1]; \quad b = [t_b, 1]; \quad c = [t_c, 1]; \quad d = [t_d, 1]$$

il loro birapporto è dato dalla formula

$$(abcd) = \frac{(t_c - t_a)(t_d - t_b)}{(t_c - t_b)(t_d - t_a)}$$

Nel nostro caso si calcola immediatamente

$$t_a = 1; \quad t_b = \infty; \quad t_c = 0; \quad t_d = 3,$$

da cui

$$(abcd) = -\frac{1}{2}$$

Per determinare la proiettività ϕ tale che $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a$, $\phi(c) = d$, ragioniamo come nell'esercizio precedente: cerchiamo

$$\phi(t) = \frac{a\,t + b}{c\,t + d}$$

tale che

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \infty \\ \phi(\infty) &= 1 \\ \phi(0) &= 3 \end{aligned}$$

Queste condizioni equivalgono al sistema lineare

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ a = c \\ b = 3d \end{cases}$$

da cui

$$\phi(t) = \frac{t-3}{t-1}$$

Verifichiamo che $\phi(d) = c$:

$$\phi(d) = [\phi(t_d), 1] = [\phi(3), 1] = [0, 1] = c.$$

Per dimostrare che $\phi^2 = \mathrm{Id}$, basta osservare che

$$\phi^2(a) = a; \quad \phi^2(b) = b; \quad \phi^2(c) = c.$$

Pertanto ϕ^2 è una proiettività che fissa tre punti distinti, e dunque è l'identità. Se non si vuole usare il fatto che una proiettività che fissa tre punti distinti è necessariamente l'identità si può calcolare direttamente

$$\phi^2(t) = \frac{\phi(t)-3}{\phi(t)-1} = \frac{\dfrac{t-3}{t-1} - 3}{\dfrac{t-3}{t-1} - 1} = t$$

Un altro modo di fare questo stesso calcolo è il seguente: poiché ϕ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la proiettività ϕ^2 è rappresentata dalla matrice

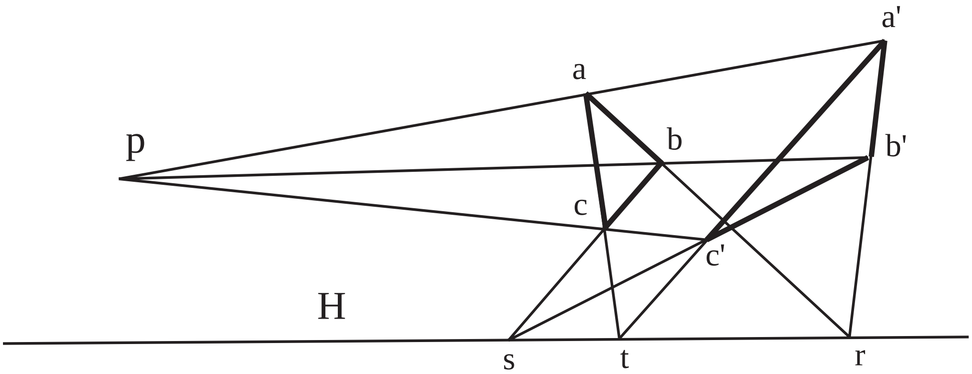
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è un multiplo della matrice identità, dunque $\phi^2 = \mathrm{Id}$.

Esercizio 18.16. Mostrare che i punti $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{K}^2$ appartengono ad una stessa retta affine se e soltanto se i vettori $(1, a, b), (1, c, d), (1, e, f) \in \mathbb{K}^3$ sono linearmente dipendenti, se e soltanto se i punti $[1, a, b], [1, c, d], [1, e, f] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sono allineati. △

Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi; il teorema di Desargues dei triangoli omologici recita come segue:

Teorema 18.17. *Due triangoli abc e $a'b'c'$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, senza vertici in comune, sono omologici se e soltanto se i punti di intersezione delle tre coppie di lati omologhi sono allineati.*



Spiegazione e nomenclatura.

1. Un triangolo in uno spazio proiettivo è una terna abc di punti non allineati. I lati del triangolo abc sono le tre rette $a + b$, $b + c$ e $c + a$.
2. n rette $L_1, \ldots, L_n$ in uno spazio proiettivo si dicono concorrenti (in p) se esiste un punto p appartenente alla loro intersezione.

3. Due triangoli abc, $a'b'c'$ si dicono *omologici* se esistono tre rette concorrenti A, B, C tali che $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $c, c' \in C$.
4. Le coppie di lati omologhi di due triangoli abc e $a'b'c'$ sono $(a+b, a'+b')$, $(b+c, b'+c')$, $(c+a, c'+a')$.

ESERCIZIO 18.18. Scovare l'**errore** nella seguente argomentazione sofistica:
Il teorema di Desargues dei triangoli omologici è falso su qualsiasi campo di caratteristica $\neq 2$.
Per convincere di ciò il nostro interlocutore sarà sufficiente trovare un controesempio per ogni campo $\mathbb{K}$ di caratteristica $\neq 2$. Con riferimento alla figura, prendiamo la quaterna a, b, c, p come sistema di riferimento canonico, cioè, nelle coordinate omogenee x_0, x_1, x_2,

$$a = [1,0,0], \quad b = [0,1,0], \quad c = [0,0,1], \quad p = [1,1,1].$$

Il punto a', appartenendo alla retta proiettiva generata da a e p, sarà rappresentato da una combinazione lineare dei vettori $(1,0,0), (1,1,1) \in \mathbb{K}^3$ e quindi $a' = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2]$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli. Similmente si avrà

$$b' = [\beta_2, \beta_1, \beta_2], \qquad c' = [\gamma_2, \gamma_2, \gamma_1].$$

Poiché il campo $\mathbb{K}$ non è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ esso possiede almeno tre elementi e possiamo scegliere $a' \neq a, p$, $b' \neq b, p$ e $c' \neq p, c$. Quindi $\alpha_2 \neq 0, \alpha_1$, $\beta_2 \neq 0, \beta_1$ e $\gamma_2 \neq 0, \gamma_1$.
La retta $a+b$ è la retta di equazione $x_2 = 0$ e quindi il punto $r = (a+b)\cap(a'+b')$ sarà rappresentato dalla combinazione lineare $\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2) + \eta(\beta_2, \beta_1, \beta_2)$ avente ultima coordinata nulla. A meno di moltiplicare gli α_i per μ ed i β_j per η non è restrittivo assumere $\alpha_2 + \beta_2 = 0$, $\mu = \eta = 1$ e quindi $r = [\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2, 0]$. In modo del tutto analogo (ed anche per simmetria) si determinano s, t che sono $s = [0, \beta_1 - \beta_2, \gamma_1 - \gamma_2]$, $t = [\alpha_1 - \alpha_2, 0, \gamma_1 - \gamma_2]$.
La condizione di allineamento di r, s e t è data dall'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 & \gamma_1 - \gamma_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & \gamma_1 - \gamma_2 \end{vmatrix} = 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$

che si annulla se e soltanto se il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica 2. △

ESERCIZIO 18.19. Dati i quattro punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; $p_0 = [0,1,2]$, $p_1 = [1,0,1]$, $p_2 = [1,1,0]$ e $p_3 = [1,1,1]$:

1. Verificare che si tratta di un sistema di riferimento.
2. Determinare le equazioni delle sei rette $p_i + p_j$, $i \neq j$, e le coordinate omogenee dei punti $q = (p_0+p_1)\cap(p_2+p_3)$, $r = (p_0+p_2)\cap(p_1+p_3)$, $s = (p_0+p_3)\cap(p_1+p_2)$, $t = (p_0+p_1)\cap(s+r)$.
3. Pensando i punti p_0, p_1, q e t come punti della retta proiettiva $p_0 + p_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, calcolare il birapporto $(p_0 p_1 q t)$.

△

ESERCIZIO 18.20. Data una retta $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e tre punti a, b, c non allineati e non appartenenti a L, dimostrare che esiste un sistema di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 tale che $L = \{x_0 = 0\}$, $a = [1,0,0]$, $b = [1,1,0]$ e $c = [1,0,1]$. △

ESERCIZIO 18.21. Siano $H, K \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ due sottospazi proiettivi nonvuoti:

1. Provare che $H + K$ è uguale all'unione delle rette $p + q$ al variare di $p \in H$ e $q \in K$.
2. Se $H \cap K = \emptyset$ e $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dimostrare che $H + K + p = H + K$ se e soltanto se esiste una retta proiettiva L tale che $p \in L$, $L \cap H \neq \emptyset$ e $L \cap K \neq \emptyset$.
3. Date due rette proiettive $A, B \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ ed un punto $p \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ dimostrare che esiste una terza retta C che contiene p e che interseca A e B. Mostrare inoltre che se $A \cap B = \emptyset$ e $p \notin A \cup B$ allora C è unica.

△

Esercizio 18.22. Sia $\phi\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ una proiettività. Dimostrare che il luogo dei punti fissi

$$\mathrm{Fix}(\phi) = \{p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \phi(p) = p\}$$

è unione di al più $n+1$ sottospazi proiettivi. Per ogni $1 \le d \le n+1$ trovare una proiettività $\phi_d\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $\mathrm{Fix}(\phi)$ è unione di esattamente d sottospazi proiettivi, disgiunti due a due. △

Esercizio 18.23. Sia ϕ una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ diversa dall'identità e tale che $\phi^3 = Id$. Dimostrare che ϕ non ha punti fissi. △

Esercizio 18.24. Sia $i \in \mathbb{C}$ una radice quadrata di -1. Descrivere il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che il birapporto $(1, -1, i, z)$ sia un numero reale. (Osservazione: Il problema può essere elegantemente risolto per via geometrica ricordando che due numeri complessi non nulli a, b si rappresentano nel piano di Gauss con due vettori ortogonali se e soltanto se a/b è puramente immaginario.) △

Esercizio 18.25. $(*)$ Sia $i \in \mathbb{C}$ una radice quadrata di -1; i *punti ciclici* sono per definizione i due punti $[0,1,i], [0,1,-i] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Ogni proiettività $\phi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si estende in modo naturale ad una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Diremo che una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé è una *similitudine* se lascia fissi entrambi i punti ciclici.
Scriviamo inoltre $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$ dove come al solito $\mathbb{R}^2 = \{[x_0, x_1, x_2] \,|\, x_0 \neq 0\}$ e $H_\infty = \{[0, x_1, x_2]\}$.
Dimostrare che una proiettività $\phi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è una similitudine se e soltanto se $\phi(H_\infty) = H_\infty$ e le restrizione di ϕ alla parte affine $\mathbb{R}^2$ trasforma circonferenze in circonferenze. △

Esercizio 18.26. Si consideri la retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e si calcoli il birapporto $(ABCD)$ dei punti di coordinate omogenee $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [2,3]$ e $D = [0, \pi]$. △

Esercizio 18.27. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il punto $p(t) = [1, t, 2t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è allineato con $[1,1,1]$ e $[0,0,1]$. △

Esercizio 18.28. Determinare l'equazione del piano proiettivo di $\mathbb{P}^3$ contenente i punti $[1,0,0,0]$, $[1,1,1,1]$ e $[0,1,0,1]$. △

Esercizio 18.29. Si consideri il sottoinsieme $Q \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ formato dai 4 punti $[0,1]$, $[1,0]$, $[1,2]$ e $[2,1]$. Determinare tutte le proiettività φ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé tali che $\varphi(Q) \subseteq Q$. △

Soluzione. Poniamo $A = [0,1]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$ e $D = [2,1]$. Una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé è in particolare una biiezione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in sé. Dunque, se $\varphi(Q) \subseteq Q$, allora necessariamente $\varphi(Q) = Q$ e φ induce una biiezione di Q in sé. D'altronde una proiettività lascia invariato il birapporto di una quaterna, dunque φ dovrà indurre una biiezione di Q in sé che conservi il birapporto. Sappiamo che, se il birapporto (A, B, C, D) non è uno dei valori speciali

$$-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

allora ci sono esattamente quattro permutazioni di $\{A, B, C, D\}$ che lasciano invariato il birapporto: l'identità,

$$\sigma_1 : \begin{cases} A \mapsto B \\ B \mapsto A \\ C \mapsto D \\ D \mapsto C \end{cases} \qquad \sigma_2 : \begin{cases} A \mapsto C \\ B \mapsto D \\ C \mapsto A \\ D \mapsto B \end{cases}$$

e $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$. Per calcolare il birapporto (A,B,C,D), scriviamo $A = [t_A,1]$, $B = [t_B,1]$, $C = [t_C,1]$, $D = [t_D,1]$, e utilizziamo la formula

$$(A,B,C,D) = \frac{(t_C - t_A)(t_D - t_B)}{(t_C - t_B)(t_D - t_A)}$$

È immediato calcolare $t_A = 0$, $t_B = \infty$, $t_C = 1/2$, $t_D = 2$, da cui

$$(A,B,C,D) = \frac{1}{4}$$

Non è uno dei valori speciali, dunque le uniche permutazioni di Q che lasciano invariato il birapporto sono Id_Q, σ_1, σ_2 e σ_3. Queste quattro permutazioni formano un gruppo abeliano G, isomorfo al prodotto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La biiezione Id_Q si estende banalmente alla proiettività $\mathrm{Id}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Dobbiamo ora determinare (se esistono), proiettività φ_i tali che $\varphi_i\big|_Q = \sigma_i$, per $i = 1,2,3$. Osserviamo innanzi tutto che, poiché G è generato da σ_1 e σ_2, basta costruire φ_1 e φ_2 per avere anche φ_3 mediante

$$\varphi_3 = \varphi_1\varphi_2$$

Per costruire φ_1 ragioniamo nel seguente modo. Esiste un'unica proiettività ψ tale che

$$\psi : \begin{cases} A \mapsto B \\ B \mapsto A \\ C \mapsto D \end{cases}$$

Poiché una proiettività conserva i birapporti,

$$(\psi(A), \psi(B), \psi(C), \psi(D)) = (A,B,C,D) = (B,A,D,C)$$

Ma, per definizione di ψ,

$$(\psi(A), \psi(B), \psi(C), \psi(D)) = (B,A,D,\psi(D))$$

dunque

$$(B,A,D,\psi(D)) = (B,A,D,C)$$

da cui

$$\psi(D) = C$$

Vale a dire che ψ è una proiettività che estende σ_1. D'altronde può esistere al più una sola proiettività con questa proprietà (se due proiettività coincidono su tre punti distinti, allora sono la stessa proiettività). Dunque $\varphi_1 = \psi$. In modo analogo si costruisce φ_2.

Risolviamo ora esplicitamente il problema. In base a quanto scritto sopra, la proiettività φ_1 è determinata da

$$\varphi_1 : \begin{cases} [0,1] \mapsto [1,0] \\ [1,0] \mapsto [0,1] \\ [1,2] \mapsto [2,1] \end{cases}$$

Si ha perciò, evidentemente,

$$\varphi_1([x_0,x_1]) = [x_1,x_0]$$

La proiettività φ_2 è determinata da

$$\varphi_2 : \begin{cases} [0,1] \mapsto [1,2] \\ [1,0] \mapsto [2,1] \\ [1,2] \mapsto [0,1] \end{cases}$$

Cerchiamo φ_2 come trasformazione lineare fratta:

$$\varphi_2(t) = \frac{a\,t + b}{c\,t + d}$$

In questa forma, φ_2 è determinata da

$$\varphi_2 : \begin{cases} t_A \mapsto t_C \\ t_B \mapsto t_D \\ t_C \mapsto t_A \end{cases}$$

ovvero da

$$\varphi_2 : \begin{cases} 0 \mapsto 1/2 \\ \infty \mapsto 2 \\ 1/2 \mapsto 0 \end{cases}$$

Queste tre condizioni equivalgono alle tre equazioni

$$\begin{cases} d = 2b \\ a = 2c \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = -c \\ d = -2c \end{cases}$$

Dunque

$$\varphi_2(t) = \frac{2t-1}{t-2}$$

ovvero

$$\varphi_2([x_0, x_1]) = [2x_0 - x_1, x_0 - 2x_1]$$

Per finire,

$$\varphi_3([x_0, x_1]) = \varphi_1\varphi_2([x_0, x_1]) = [x_0 - 2x_1, 2x_0 - x_1]$$

Esercizio 18.30. Determinare un sottoinsieme finito $A \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con la proprietà che l'identità è l'unica proiettività ϕ tale che $\phi(A) \subseteq A$. Qual è la minima cardinalità possibile per un insieme A siffatto? $\triangle$

Esercizio 18.31. Sia $\varphi\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ una proiettività tale che φ^3 sia l'identità e che lasci fissi tutti i punti di un piano. Dimostrare che necessariamente φ è l'identità. $\triangle$

Trattiamo il problema come un problema di algebra lineare. La proiettività φ è indotta da un qualche automorfismo $\tilde{\varphi} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Poiché φ è l'identità ristretta ad un piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, ne segue che $\tilde{\varphi}$ agisce come la moltiplicazione per uno scalare su un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$. Esiste pertanto una base di $\mathbb{R}^4$ nella quale $\tilde{\varphi}$ ha la forma

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

La condizione $\tilde{\varphi} \in GL_4(\mathbb{R})$ impone $\det(\tilde{\varphi}) \neq 0$ e dunque $\lambda_1 \neq 0$. Pertanto, poiché $\tilde{\psi}$ è determinata solamente a meno di moltiplicazione per uno scalare, possiamo assumere $\lambda_1 = 1$ e dunque

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta $\tilde{\varphi}$ è triangolare superiore. È pertanto immediato osservare che la matrice che rappresenta $\tilde{\varphi}^3$ deve essere della forma

$$\tilde{\varphi}^3 = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$$

D'altra parte sappiamo che $\varphi^3 = \mathrm{Id}$, dunque

$$\tilde{\varphi}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

per qualche costante reale λ_2. Da questo segue immediatamente $\lambda_2 = 1$ e $d^3 = 1$. Poiché siamo su $\mathbb{R}$ quest'ultima equazione ammette l'unica soluzione $d = 1$, da cui

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{\varphi}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare a, b e c, calcoliamo $\tilde{\varphi}^3$ utilizzando l'espressione per $\tilde{\varphi}$ appena trovata:

$$\tilde{\varphi}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, uguagliando questa con l'altra espressione per $\tilde{\varphi}^3$ scritta sopra,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

In conclusione, $\tilde{\varphi} = \mathrm{Id}$ e, dunque, $\varphi = \mathrm{Id}$.

Esercizio 18.32. Siano $R, S \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette distinte e $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un punto non appartenente a $R \cup S$. Sia poi $k \geq 3$ un intero e si considerino k rette distinte $L_1, \ldots, L_k$ passanti per il punto p. Denotando $a_i = R \cap L_i$ e $b_i = S \cap L_i$, dimostrare che i $k(k-1)/2$ punti

$$p_{ij} = (a_i + b_j) \cap (a_j + b_i), \qquad i < j$$

sono allineati. (Suggerimento 1. Passo 1: a meno di permutazioni sull'insieme delle k rette $L_1, \ldots, L_k$ non è restrittivo supporre $R \cap S \cap L_1 = \emptyset$; dimostrare che è possibile scegliere un sistema di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 tali che $L_1 = \{x_2 = 0\}$, $p = [1, 0, 0]$, $a_1 = [1, 1, 0]$, $b_1 = [1, -1, 0]$ e $R \cap S = [0, 0, 1]$.
Passo 2: rappresentare graficamente la configurazione nel piano affine $x_0 \neq 0$ oppure mostrare che esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé che trasforma il punto a_i nel punto b_i per ogni i.)
(Suggerimento 2: utilizzare il teorema del quadrilatero armonico.) $\triangle$

Esercizio 18.33. Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale.

1. Ogni proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ possiede almeno un punto fisso.
2. Per ogni omomorfismo di gruppi $g\colon (\mathbb{Z}, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ esiste $p \in \mathbb{P}^2$ tale che $g(n)(p) = p$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

3. $(*)$ Per ogni omomorfismo di gruppi $g\colon (\mathbb{Q}, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ esiste $p \in \mathbb{P}^2$ tale che $g(a)(p) = p$ per ogni numero razionale $a \in \mathbb{Q}$.

$\triangle$

Esercizio 18.34. Siano $P, Q \subset \mathbb{P}^3$ due rette proiettive disgiunte. Dimostrare che per ogni proiettività $\varphi\colon P \to Q$ esiste una terza retta $R \subset \mathbb{P}^3$, disgiunta da P e da Q tale che $\varphi(p) = (R + p) \cap Q$ per ogni $p \in P$. $\triangle$

Esercizio 18.35. Il signor B. si reca a lezione di Geometria Analitica con un righello di 20 centimetri di lunghezza. Il perfido professore disegna su di un foglio due punti distanti 21 centimetri e gli chiede di congiungerli con una linea retta.
Il signor B. non fa in tempo ad infuriarsi e gridare al complotto, che Desargues (uno studente Erasmus) gli suggerisce un metodo per aggirare la difficoltà. In cosa consiste il metodo? $\triangle$

Esercizio 18.36. Determinare, se esiste, una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che φ^2 sia l'identità e $\varphi([1, 0]) = [1, 2]$ e $\varphi([0, 1]) = [1, 3]$. $\triangle$

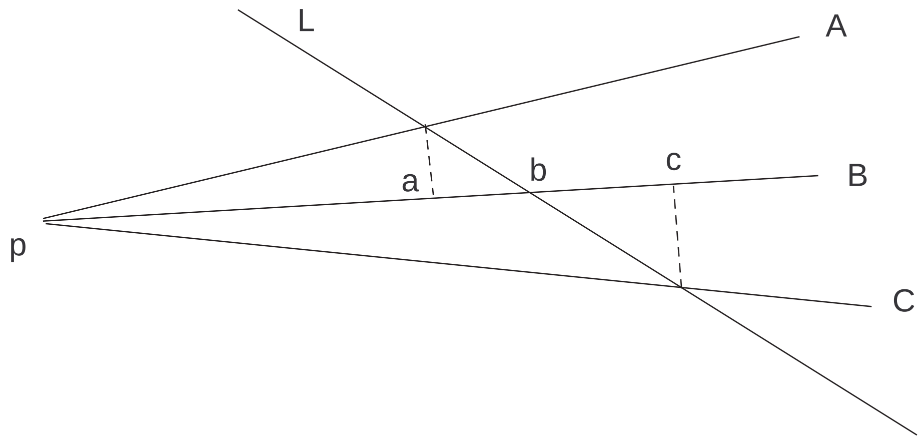
Esercizio 18.37. Dimostrare che ogni proiettività φ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che non sia l'identità e tale che φ^n sia l'identità per qualche $n > 1$ possiede esattamente due punti fissi. $\triangle$

Esercizio 18.38. Sia $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta proiettiva, p un punto non appartenente ad essa e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare diverso da 0 e 1. Definiamo un'applicazione $\varphi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ nel modo seguente:

- $\varphi(p) = p$.
- $\varphi(q) = q$ per ogni $q \in L$.
- Se $q \neq p$ e $q \notin L$ definiamo $q' = L \cap (p + q)$ e $\varphi(q) = r$ dove r è l'unico punto della retta $p + q$ tale che $(q'pqr) = \lambda$.

Dimostrare che φ è una proiettività. $\triangle$

Esercizio 18.39. Siano date nel piano Euclideo tre rette distinte A, B, C come in figura concorrenti nel punto p con B non perpendicolare ad A e C. Per ogni retta L non passante per p e non perpendicolare a B siano $b = L \cap B$ e $a, c \in B$ le proiezioni ortogonali di $A \cap L$ e $C \cap L$ rispettivamente.



Dimostrare:

1. Il birapporto $(pbac)$ non dipende da L.
2. Se B è la bisettrice dell'angolo formato dalle rette A e C allora $(pbac) = -1$ e la distanza tra p e b è la media armonica delle distanze da p di a e c (Sugg.: considerare la retta L' ottenuta per riflessione speculare di L rispetto alla retta B.)

$\triangle$

Esercizio 18.40. $(*)$ Sia $p \in \mathbb{P}^n$ e $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ il sottogruppo delle proiettività ϕ tali che $\phi(H) \subset H$ per ogni iperpiano H contenente p. Provare che G agisce transitivamente sull'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ che non contengono p. $\triangle$

Esercizio 18.41. (∗) Si consideri l'applicazione $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, definita in coordinate omogenee da $f([x_0, x_1]) = [x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \dots, x_1^n]$. Provare che se $p_0, \dots, p_{n+1}$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^1$ allora $f(p_0), \dots, f(p_{n+1})$ è un sistema di riferimento su $\mathbb{P}^n$. △

Esercizio 18.42. (∗) Con l'utilizzo della sola riga dividere un rettangolo del piano euclideo in n parti uguali per ogni $n \geq 2$. (Sugg.: quadrilatero armonico.) △

Esercizio 18.43. Siano r ed s due rette disgiunte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, e sia P un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ non appartenente né a r né a s. Dimostrare che esiste una retta t in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per P e che interseca sia r che s. Qual è l'enunciato duale? Risolvere poi esplicitamente il problema con questi dati:

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$P = [1, 2, 3, 4]$$

Suggerimento: cominciare con l'enunciato duale. △

Soluzione. Seguiamo il suggerimento e cominciamo con lo scrivere l'enunciato duale. Ricordiamo che ad un sottospazio W in $\mathbb{P}(V)$ corrisponde l'annullatore $\mathrm{Ann}(W)$ in $\mathbb{P}(V^*)$. Un semplice conto dimensionale mostra che la dualità per $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ trasforma punti in piani, rette in rette e piani in punti. Inoltre la dualità capovolge le inclusioni, sicché *contenuto* diventa *contenente* e viceversa. In particolare, poiché la condizione [la retta t interseca la retta r] equivale a [esiste un punto contenuto sia in r che in t], l'enunciato duale di [la retta t interseca la retta r] è [esiste un piano contenente sia r' che t'], ovvero [r' e t' sono rette complanari]. Ma nello spazio proiettivo due rette sono complanari se e solo se si intersecano, dunque l'enunciato duale di [la retta t interseca la retta r] si può anche esprimere come [la retta t' interseca la retta r']. Ne segue anche che l'enunciato duale di [r ed s sono rette disgiunte] è [r' ed s' sono rette disgiunte]. Siamo pronti per scrivere l'enunciato duale del testo del problema. Si tratta del seguente:

"Siano r' ed s' due rette disgiunte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, e sia P' un piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ non contenente né r' né s'. Dimostrare che esiste una retta t' in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenuta in P' e che interseca sia r' che s'."

Notiamo che l'enunciato duale è manifestamente vero: poiché la retta r' non è contenuta nel piano P', essa lo intersecherà in un certo punto R. Allo stesso modo s' intersecherà P' in S. Sia t' la retta per R ed S. Si tratta evidentemente della retta cercata.

Poiché un enunciato è vero se e solo se lo è l'enunciato duale (principio di dualità), ne segue che l'enunciato originale del problema è vero. Notiamo anche che il principio di dualità ci dice come costruire la soluzione del problema originale: basta dualizzare la soluzione del problema duale. Il punto R è l'intersezione di r' con P'. Dunque il piano R' è il piano contenente la retta r e passante per il punto P. Analogamente il piano S' è il piano contenente la retta s e passante per il punto P. Infine la retta t' contiene i punti R' e S' dunque la retta t è contenuta nei piani R' e S'. Una ricetta per risolvere il problema originale è pertanto la seguente:

"Sia R' il il piano contenente la retta r e passante per il punto P, e sia S' il piano contenente la retta s e passante per il punto P. La retta t è allora l'intersezione $R' \cap S'$."

Risolviamo ora esplicitamente il problema con i dati

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$P = [1, 2, 3, 4]$$

Un modo di determinare il piano R' è il seguente: il fascio dei piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti al retta r è dato da

$$\alpha(x_0 + x_1) + \beta(x_0 - x_1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo l'equazione

$$3\alpha - \beta = 0$$

da cui $[\alpha, \beta] = [1, 3]$. Il piano R' ha pertanto equazione

$$2x_0 - x_1 = 0$$

Per determinare un'equazione per il piano S' possiamo adottare la stessa tecnica, o anche ragionare nel modo seguente: due punti distinti della retta s sono il punto

$$P_1 = [1, 0, 0, 0]$$

ed il punto

$$P_2 = [0, 1, 0, 0]$$

Il piano S' è pertanto il piano passante per P, P_1 e P_2, e dunque una sua equazione è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 & 3 \\ x_3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$4x_2 - 3x_3 = 0$$

In conclusione t è la retta di equazione

$$\begin{cases} 2x_0 - x_1 = 0 \\ 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$