Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

I Esonero - 21 novembre 2003

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Esercizio 1.** Per ogni $n > 0$ sia $B_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice simmetrica di coefficienti

$$b_{ij} = i + j - 2, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Determinare rango e segnatura di $B_1, B_2$ e $B_3$. △

*Soluzione.* Si ha $B_1 = (0)$ e dunque, evidentemente rango$(B_1) = 0$ e segnatura$(B_1) = (0, 0)$. Per quanto riguarda $B_2$, si ha

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $B_2$ è

$$p_{B_2}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 1.$$

Il termine noto di questo polinomio è diverso da zero, dunque rango$(B_2) = 2$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_{B_2}(t)$ è $(+, -, -)$. C'è una sola variazione, quindi $p_{B_2}(t)$ ha esattamante una radice positiva. Dunque segnatura$(B_2) = (1, 1)$. Infine,

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $B_3$ è

$$p_{B_2}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 2 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 2 & 3 & 4-t \end{pmatrix} = -t^3 + 6t^2 + 6t = t\,(-t^2 + 6t + 6).$$

Dunque $t = 0$ è una radice del polinomio caratteristico di $B_3$ di molteplicità 1. Ne segue rango$(B_3) = 3 - 1 = 2$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_{B_3}(t)$ è $(-, +, +)$. C'è una sola variazione, quindi $p_{B_3}(t)$ ha esattamante una radice positiva. Dunque segnatura$(B_3) = (1, 1)$.

**Esercizio 2.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_4 - x_3^2.$$

△

*Soluzione.* La matrice associata alla forma quadratica $\Phi$ è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $Q$ è

$$p_Q(t) = \begin{pmatrix} -t & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = t^4 - \frac{9}{4}t^2 - \frac{5}{4}t = t\left(t^3 - \frac{9}{4}t - \frac{5}{4}\right).$$

Dunque $t = 0$ è una radice del polinomio caratteristico di $Q$ di molteplicità 1. Ne segue rango$(\Phi) = 4 - 1 = 3$; inoltre la successione dei segni dei coefficienti di $p_Q(t)$ è $(+, -, -)$. C'è una sola variazione, quindi $p_Q(t)$ ha esattamante una radice positiva. Dunque segnatura$(\Phi) = (1, 2)$.

**Esercizio 3.** Determinare il tipo affine della conica di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$$

$\triangle$

*Soluzione.* La matrice associata all'equazione della conica data è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Il primo cambio di coordinate affine è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito a questo cambio di coordinate la matrice della conica diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4\sqrt{2}/3 \\ 0 & -4\sqrt{2}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Il secondo cambio di coordinate affine è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito a questo cambio di coordinate la matrice della conica diventa

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 8/3 & -4\sqrt{2}/3\\ 0 & -4\sqrt{2}/3 & -2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 8/3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Dunque, nelle nuove coordinate l'equzione della conica è

$$3(x')^2+\frac{8}{3}(y')^2=2$$

ovvero

$$\frac{3}{2}(x')^2+\frac{4}{3}(y')^2=1$$

Si tratta di un'ellisse.

**Esercizio 4.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale, $\varphi\colon V\times V\to\mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e $f\colon V\to V$ lineare tale che $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)$ per ogni $x,y\in V$. Dimostrare che:

1. Se $\varphi$ è non degenere allora $f$ è iniettiva.
2. Il rango di $f$ è maggiore od uguale al rango di $\varphi$.

△

*Soluzione.* Osserviamo che, se $x\in\ker f$, allora $\varphi(x,y)=\varphi(f(x),f(y))=\varphi(0,f(y))=0$ per ogni $y\in V$. Dunque $x\in\ker\varphi$. Vale a dire $\ker f\leq\ker\varphi$. In particolare, se $\varphi$ è non degenere, allora $\ker\varphi=0$ e dunque anche $\ker f=0$, ovvero $f$ è iniettiva, il che risolve il punto (1.). Per quanto riguarda il punto (2.), si ha

$$\operatorname{rango}(f)=\dim V-\dim\ker f\geq\dim V-\dim\ker\varphi=\operatorname{rango}(\varphi).$$

**Esercizio 5.** Determinare rango e segnatura della matrice $B_n$ introdotta nell'Esercizio 1 per ogni $n\geq 4$. (Suggerimento: valutare la differenza di due colonne adiacenti della matrice $B_n$.) △

*Soluzione.* La matrice $B_n$ ha la forma

$$B_n=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-2\end{pmatrix}$$

Sottraiamo all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terzultima e così via (quest'operazione lascia invariato il rango della matrice). Troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2 (ci sono solamente due colonne lineramente indipendenti). Abbiamo così dimostrato

$$\text{rango}(B_n) = 2, \qquad \forall n \geq 4.$$

Per quanto riguarda la segnatura, osserviamo che il minore $2 \times 2$ in alto a sinistra ha rango 2 e dunque la segnatura di $B_n$ coincide con la segnatura di questo minore. Ma il minore $2 \times 2$ in alto a sinistra è proprio $B_2$ e abbiamo già calcolato, nell'esercizio 1, che la sua segnatura è (1,1). Ne segue

$$\text{segnatura}(B_n) = (1, 1), \qquad \forall n \geq 4.$$

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

II Esonero - 13 gennaio 2004

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Importante: Il voto terrà conto dei 4 esercizi meglio svolti.**

**Esercizio 1.** Si consideri la retta proiettiva reale e si calcoli il birapporto $(ABCD)$ della quaterna ordinata di punti $A = [0, 1]$, $B = [1, 0]$, $C = [e, \pi]$, $D = [1, 2]$. △

**Esercizio 2.** Dire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ esiste una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi([1, 0]) = [2, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [1, 3]$, $\varphi([1, 2]) = [1, 1]$ e $\varphi([1, t]) = [t, 1]$. △

**Esercizio 3.** Determinare l'equazioni che definiscono la retta proiettiva di $\mathbb{P}^3$ passante per i punti $[1, 0, 0, 0]$ e $[0, 1, 0, 0]$. △

**Esercizio 4.** In $\mathbb{P}^3$ formulare la duale delle seguenti affermazioni:

1. Due rette incidenti sono complanari (Nota: incidenti vuol dire che hanno intersezione non vuota; complanari che sono contenute in un medesimo piano).

2. Assegnati 3 punti proiettivamente indipendenti, esistono tre rette distinte ognuna delle quali ne contiene due.

3. Dati una retta ed un punto, esiste un piano che li contiene.

△

**Esercizio 5.** Si considerino i punti $a = [0, 1, 0, 1]$, $b = [1, 0, 1, 0]$ e $c = [1, 1, 0, 0]$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e la retta proiettiva $L \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazioni $2x_0 + x_1 + x_3 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Determinare le coordinate omogenee del punto di intersezione della retta $L$ con il piano contenente i punti $a, b, c$. △

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

Prima prova scritta - 3 febbraio 2004

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Esercizio 1.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2.$$

△

**Esercizio 2.** Determinare il tipo affine delle coniche di equazioni

1. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$
2. $x^2 - xy + y^2 - 3x + 1 = 0$

Dire inoltre, motivando la risposta, se esiste una trasformazione affine di $\mathbb{R}^2$ che trasforma l'una nell'altra. △

**Esercizio 3.** Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare una base del sottospazio vettoriale formato dai vettori $\varphi$-ortogonali a $(1, 1, 1, -1)$. △

**Esercizio 4.** Dire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ esiste una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi([1, 0]) = [1, 2]$, $\varphi([0, 1]) = [3, 1]$, $\varphi([2, 1]) = [1, 1]$ e $\varphi([t, 1]) = [1, t]$. △

**Esercizio 5.** Determinare l'insieme dei punti fissi della proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé data da

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [2x_0 + x_1, 2x_1 + x_2, x_0]$$

△

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

Seconda prova scritta - 25 febbraio 2004

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Esercizio 1.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2 - x_4^2.$$

$\triangle$

**Esercizio 2.** Determinare il tipo affine della conica di equazione

$$x^2 + 3xy + y^2 + x - y = 10$$

$\triangle$

**Esercizio 3.** Determinare la proiettività $f$ di $\mathbb{P}^1$ in sé tale che $f([1,3]) = [1,0]$, $f([3,1]) = [1,1]$ e $f([1,1]) = [0,1]$. $\triangle$

**Esercizio 4.** Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ il punto $[1, t, t^2, t^3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ appartiene al piano passante per i punti $[1, 0, 0, -1]$, $[0, 1, 2, 3]$ e $[1, 1, 0, 0]$. $\triangle$

**Esercizio 5.** Per ogni $n \geq 2$ sia $X(n)$ l'insieme delle coppie $(x, y)$ di vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, tali che $\|x\| = \|y\| = \|x - y\| = 1$ e si consideri l'azione del gruppo ortogonale $O(n)$ su $X$ definita come

$$G(x, y) = (Gx, Gy), \qquad G \in O(n), \quad (x, y) \in X.$$

1) Dire, motivando la risposta, se tale azione è transitiva.
2) Se $(u, v) \in X(3)$, determinare quante sono le matrici ortogonali $G \in O(3)$ tali che $Gu = u$ e $Gv = v$. $\triangle$

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

Prova scritta- 16 giugno 2004

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Esercizio 1.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_1 + x_4^2.$$

△

**Esercizio 2.** Determinare il tipo affine delle coniche di equazioni

1. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 12 = 0$
2. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$

Dire inoltre, motivando la risposta, se esiste una trasformazione affine di $\mathbb{R}^2$ che trasforma l'una nell'altra. △

**Esercizio 3.** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(1, 2, 0, 3)$, $(2, 0, 1, -1)$ e $(-4, 4, -3, 9)$.

1. Determinare la dimensione di $V$.
2. Determinare la matrice di proiezione ortogonale su $V$

△

**Esercizio 4.** Dire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ esiste una proiettività $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi([1, 0]) = [t, 2]$, $\varphi([0, 1]) = [2, 1]$, $\varphi([2, 1]) = [1, 1]$ e $\varphi([t, 1]) = [1, 0]$. △

**Esercizio 5.** Determinare l'insieme dei punti fissi della proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé data da

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0 - x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2]$$

△

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2003/2004

**Geometria Analitica**

Prova scritta- 22 settembre 2004

(Proff. Marco Manetti e Riccardo Salvati Manni)

**Esercizio 1.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_4 - x_3^2.$$

△

**Esercizio 2.** Determinare il tipo affine delle coniche di equazioni

1. $x^2 - 2y^2 + 2x - 4y = 0$
2. $x^2 + xy + y^2 - 3x - 1 = 0$

Dire inoltre, motivando la risposta, se esiste una trasformazione affine di $\mathbb{R}^2$ che trasforma l'una nell'altra. △

**Esercizio 3.** Determinare la proiettività $f$ di $\mathbb{P}^1$ in sé tale che $f([1,2]) = [1,0]$, $f([2,1]) = [1,1]$ e $f([1,1]) = [0,1]$.
Dire inoltre, motivando la risposta, se $f^n$ è uguale all'identità per qualche $n > 0$. △

**Esercizio 4.** Si considerino i punti $a = [0,1,1,0]$, $b = [1,0,0,1]$ e $c = [1,1,0,0]$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e la retta proiettiva $L \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazioni $2x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
Determinare le coordinate omogenee del punto di intersezione della retta $L$ con il piano contenente i punti $a, b, c$. △

**Esercizio 5.** Determinare l'insieme dei punti fissi della proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé data da

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0 - x_1, x_0 + 2x_1, x_0 + x_2]$$

△