ESERCIZIARIO SPE 2014

MARCO MANETTI
10 APRILE 2014

1. Esercizi

Esercizio 1.1. Sia $\mathcal{C}$ il fascio delle funzioni continue a valori reali in uno spazio topologico e sia

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}^0\mathcal{C} \to \mathcal{C}^1\mathcal{C} \to \cdots$$

la risoluzione canonica. Mostrare che la moltiplicazione per una sezione globale $f \in \Gamma(X, \mathcal{C})$ induce morfismi di fasci $f\colon \mathcal{C}^n\mathcal{C} \to \mathcal{C}^n\mathcal{C}$.

Esercizio 1.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che:

(1) per ogni chiuso $D \subset X$ la funzione "distanza da D"
$$d_D(x) = \inf_{y\in D} d(x, y)$$
è continua e vale $d_D^{-1}(0) = D$.

(2) per ogni coppia di chiusi disgiunti $C, D \subset X$ esiste una funzione continua $f\colon X \to [0, 1]$ tale che $f_{|C} = 0$ e $f_{|D} = 1$.

(3) dati due aperti $U, V \subset X$ dimostrare che esiste una funzione continua $f\colon U \cup V \to [0, 1]$ tale che $f_{|U-V} = 0$ e $f_{|V-U} = 1$.

(4) sia $\mathcal{C}$ il fascio delle funzioni continue su X a valori reali. Usare i punti precedenti ed il risultato dell'Esercizio **??** per dimostrare che $H^n(X, \mathcal{C}) = 0$ per ogni $n > 0$.

Esercizio 1.3. Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{C}$ il fascio su X delle funzioni continue a valori reali.

(1) provare che in generale il prefascio
$$\mathcal{F}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ continue e limitate}\}$$
non è un fascio.

(2) Sia $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ l'ovvio morfismo di inclusione. Provare che per ogni fascio $\mathcal{G}$ ed ogni morfismo di prefasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ esiste un unico morfismo di fasci $g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ tale che $gi = f$.

Esercizio 1.4. Dimostrare che un morfismo di fasci $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è surgettivo sulle spighe se e solo se per ogni aperto U e ogni $s \in \mathcal{G}(U)$ esiste un ricoprimento $U = \cup_i U_i$ e sezioni $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $f(t_i) = s_{|U_i}$ per ogni i.

Esercizio 1.5. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X. Siano dati:

(1) per ogni i un fascio $\mathcal{F}_i$ su U_i;

(2) per ogni i, j un isomorfismo di fasci $f_{ij}\colon (\mathcal{F}_i)_{|U_i\cap U_j} \to (\mathcal{F}_j)_{|U_i\cap U_j}$

(3) per ogni i, j, k (possibilmente ripetuti) deve valere la condizione che $f_{jk}f_{ij} = f_{ik}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Provare che esiste un fascio $\mathcal{F}$ su X, unico a meno di isomorfismo, ed isomorfismi $f_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ tali che $f_{ij}f_i = f_j$ per ogni i, j.

Esercizio 1.6. Sia $\{U_i\}$, $i \in I$, un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X. Definiamo il nervo N del ricoprimento come la famiglia degli insiemi finiti $A = \{i_0, \ldots, i_n\}$ tali che: $n \geq 0$, $i_s \in I$ per ogni s e

$$U_A \overset{\text{definizione}}{=} U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \emptyset.$$

Siano dati:

(1) per ogni $A \in N$ un fascio $\mathcal{F}_A$ sull'aperto non vuoto U_A;

(2) per ogni $A, B \in N$, con $A \subseteq B$, un isomorfismo di fasci
$$f_{AB}\colon (\mathcal{F}_A)_{|U_B} \to \mathcal{F}_B$$
su U_B.

(3) si richiede che f_{AA} sia l'identità e se $A \subseteq B \subseteq C$ allora $f_{AC} = f_{BC} f_{AB}$.

Dimostrare che esiste un fascio $\mathcal{F}$ su X ed isomorfismi di fasci $f_A \colon \mathcal{F}_{|U_A} \to \mathcal{F}_A$ tali che se $A, B, C \in N$ e $A \cup B \subset C$ vale

$$f_{AC} f_A = f_{BC} f_B\ .$$

Esercizio 1.7. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X. Dimostrare:

(1) L'insieme dei morfismi di fasci $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}\}$ è un gruppo abeliano.
(2) Per ogni aperto $U \subset X$ poniamo

$$\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$$

Dimostrare che $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è un fascio.

Esercizio 1.8. Dato uno spazio topologico X ed un sottoinsieme chiuso $D \subset X$, per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X denotiamo

$$\Gamma_D(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) \mid \mathrm{supp}(s) \subset D\}$$

Provare che per ogni successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$

la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \Gamma_D(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_D(X, \mathcal{G}) \to \Gamma_D(X, \mathcal{H})$$

è ancora esatta.

Esercizio 1.9. Sia U aperto in X e $i \colon U \to X$ l'inclusione. Provare che se $\mathcal{F}$ è fiacco su X il morfismo naturale di fasci

$$i^{\#} \colon \mathcal{F} \to i_* i^{-1} \mathcal{F}$$

è surgettivo.

Esercizio 1.10. Dato un complesso di gruppi abeliani

$$\cdots \to A^n \xrightarrow{d} A^{n+1} \to \cdots$$

definiamo un secondo complesso

$$\cdots \to B^n \xrightarrow{\delta} B^{n+1} \to \cdots$$

ponendo $B^n = A^n \oplus A^{n-1}$ e $\delta(a, b) = (da, a - db)$. Provare che $H^n(B^*, \delta) = 0$ per ogni n.

Esercizio 1.11. Sia $f \colon A^* \to B^*$ un morfismo di complessi di gruppi abeliani. Si assuma che per ogni n i morfismi $f_n \colon A^n \to B^n$, $f_n \colon H^n(A^*) \to H^n(B^*)$ siano surgettivi. Dimostrare che anche i morfismi $f_n \colon B^n(A^*) \to B^n(B^*)$ e $f_n \colon Z^n(A^*) \to Z^n(B^*)$ sono surgettivi.

Esercizio 1.12. Sia C^* un complesso di gruppi abeliani tale che:

(1) $C^n = 0$ per $n > 0$ e $C^n = \mathbb{Z}^{a_n}$ per $n \leq 0$;
(2) $H^n(C^*) = 0$ per ogni n.

Dimostrare che per ogni coppia di morfismi di complessi $f \colon A^* \to B^*$, $g \colon C^* \to B^*$ tali che $f_n \colon A^n \to B^n$ è surgettivo per ogni n, esiste un morfismo di complessi $h \colon C^* \to A^*$ tale che $fh = g$.

Esercizio 1.13. Calcolare i gruppi di coomologia a coefficienti interi di $S^1 \times S^1$.

Esercizio 1.14. Provare che l'applicazione $f \colon S^1 \to S^1$ $f(z) = z^2$ induce il morfismo in coomologia

$$f^* \colon H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \to H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \qquad f^*(s) = 2s.$$