

# 1 Esercizi di Topologia, 15 ottobre 2004, M.M.

Sia  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$ .

Per ogni coppia di sottoinsiemi **finiti e disgiunti**  $A, B \subset \mathbb{N}$  definiamo

$$U(A, B) = \{S \in X \mid A \subset S, S \cap B = \emptyset\}.$$

**Esercizio 1.** Dimostrare che gli  $U(A, B)$  formano, al variare di  $A$  e  $B$ , una base di aperti di una topologia su  $X$ . △

**Esercizio 2.** Dimostrare che con la topologia dell'Esercizio 1, la funzione

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(S) = \sum_{n \in S} 10^{-n}$$

è continua ed iniettiva. △

**Esercizio 3 (\*).** Dimostrare che la funzione  $f$  dell'Esercizio 2 è chiusa e quindi un omeomorfismo sull'immagine.

(Non attapiratevi troppo se non riuscite a risolvere questo esercizio utilizzando solamente gli strumenti visti finora a lezione: a me (M.M.) non è riuscito. Vedremo più avanti nel corso alcuni teoremi che faranno diventare banale questo esercizio.) △