1 Esonero di Topologia, 3 maggio 2006

Per gli esercizi 1,2 e 3 limitarsi a scrivere la soluzione, senza indicare lo svolgimento. Per gli esercizi 4,5 e 6 scrivere lo svolgimento completo.

Esercizio 1. Dire quante sono le componenti connesse di

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

△

Esercizio 2. Indichiamo con $\pi\colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{P}^2$ la proiezione naturale. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio topologico

$$\pi(\{x_0 + x_1 = t(x_2 + 1)\}) \subset \mathbb{P}^2$$

è compatto? (x_0, x_1, x_2 sono un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^3$). △

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione continua

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = e^x + e^y.$$

Dire per quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ la restrizione di f è un'applicazione chiusa.

$$X = \mathbb{R}^2, \quad Y = \{x \geq 0\}, \quad Z = \{x \geq 0, y \geq 0\}, \quad W = \{x^2 + y^2 \leq 10\}.$$

△

Esercizio 4. Dimostrare che lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n e determinante ≥ 2 è connesso. (Suggerimento: ricordare le proprietà topologiche delle matrici a determinante 1). △

Esercizio 5. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme con la proprietà che

$$x, y \in A \Rightarrow (\|x\| - 1, \|y\|^2) \in A.$$

Dimostrare che anche la sua chiusura $\overline{A}$ ha la medesima proprietà. △

Esercizio 6. Sia $M(n, n, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali $n \times n$ e sia

$$X = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \|v\| = \|Av\| > 0\}.$$

Dimostrare che X è chiuso. (Suggerimento: considerare

$$Y = \{(A, v) \in M(n, n, \mathbb{R}) \times S^{n-1} \mid \|Av\| = 1\}.)$$

Facoltativo $(*)$: dimostrare che X è connesso per $n \geq 2$. △

Topologia 2005-06. M.M.