1 Esercitazione scritta di Topologia, 5 aprile 2006

Nei seguenti esercizi denotiamo con $M(n,m)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times m$ con la topologia indotta mediante l'isomorfismo naturale con $\mathbb{R}^{nm}$.

Esercizio 1. Dire, motivando la risposta, se l'unione di due rette parallele di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfa all'unione di due rette incidenti. $\triangle$

Esercizio 2. Siano $S \subset M(2,2)$ il sottospazio delle matrici simmetriche e $Y \subset S$ il sottospazio di quelle definite positive. Dimostrare che Y è aperto in S nella topologia di sottospazio e che è connesso per archi (sugg.: usare il fatto che se $A, B \in Y$ e $t > 0$, allora $tA, A + B \in Y$). $\triangle$

Esercizio 3. Sia $X \subset M(2,2)$ il sottospazio delle matrici A tali che $A^2 = I$ (I=identità). Dire, motivando la risposta, se X è compatto e se è connesso. $\triangle$

Esercizio 4. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \text{ se } x = y \text{ oppure se } |x| = |y| > 1.$$

Dire se X è compatto, se è connesso e se è di Hausdorff. $\triangle$

Esercizio 5 (∗). Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 1. Dimostrare che per ogni $c \in [0,1]$ esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) = f(t+c)$.
(Sugg.: per assurdo considerare $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \Delta$, $g(t) = (f(t), f(t+c))$.) $\triangle$