1 Esercizi di Topologia, 12 aprile 2006

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{R}$ $X = \mathbb{R}/\sim$, dove $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che la topologia quoziente su X è quella indiscreta. $\triangle$

Esercizio 2. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua ed aperta. Dimostrare che l'applicazione

$$X \times X \to Y \times Y, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$$

è aperta. $\triangle$

Esercizio 3. Sia $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Provare che l'applicazione $f\colon X \to X$, $f(z) = z^2$, è una identificazione chiusa. $\triangle$

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{R}/\sim$, dove $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che X è compatto ed è omeomorfo a S^1. (Suggerimento: trovare un'applicazione continua $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x \sim y$.) $\triangle$

Esercizio 5. Sia $f\colon X \to Y$ continua e surgettiva con Y spazio di Hausdorff. Si assuma che esista una famiglia numerabile di sottospazi compatti $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che la famiglia delle parti interne $\{f(K_n)^o \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia un ricoprimento aperto di Y. Dimostrare che f è un'identificazione. $\triangle$

Esercizio 6. Dimostrare che l'applicazione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, è chiusa. $\triangle$

Esercizio 7. Il gruppo $SO(n, \mathbb{R})$ si identifica con le isometrie di $\mathbb{R}^n$. Provare che il quoziente $R^n/SO(n, \mathbb{R})$ è omeomorfo alla semiretta $[0, +\infty[$. $\triangle$

Esercizio 8. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme convesso. Dimostrare che anche la sua chiusura $\overline{A}$ è convessa. (Sugg.: l'applicazione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, t) = tx + (1 - t)y$$

è continua e quindi $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ per ogni $X \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.) $\triangle$

Esercizio 9. Dire se i seguenti spazi sono connessi:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx - y > x^3 - x^2\}, \qquad Y = \{\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

$\triangle$

Esercizio 10. Sia $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e consideriamo la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, dove $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A \subset \mathbb{N}$ oppure $X - A$ è finito.
Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X compatta e di Hausdorff.
Mostrare inoltre che $f\colon X \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = f(\infty).$$

È possibile trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ omeomorfo ad X? $\triangle$

Esercizio 11 (∗). Mostrare che esistono infinite applicazioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(1) = 1$ e $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ma l'identità è l'unica continua. (Sugg.: $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e quindi ammette una base.)
Determinare inoltre tutti gli automorfismi di campi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che sono continui nella topologia euclidea. $\triangle$

Topologia 2005-06. M.M.