1 Esercizi di Topologia, 23 marzo 2006.

Esercizio 1. Provare che i seguenti sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$ sono tutti omeomorfi tra loro.

1. $\{(x, y) \mid 0 \leq x,\, 0 < y\}$.
2. $\{(x, y) \mid 0 < x < 1,\, 0 \leq y < 1\}$.
3. $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y < 1\}$.
4. $\{(x, y) \mid 0 \leq x,\, 0 \leq y\}$.
5. $\{(x, y) \mid 0 \leq x\}$.
6. $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y\}$.
7. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, x \neq 1\}$.

△

Sia $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.
Per ogni coppia di sottoinsiemi **finiti e disgiunti** $A, B \subset \mathbb{N}$ definiamo

$$U(A, B) = \{S \in X \mid A \subset S,\, S \cap B = \emptyset\}.$$

Esercizio 2. Dimostrare che gli $U(A, B)$ formano, al variare di A e B, una base di aperti di una topologia su X. △

Esercizio 3. Dimostrare che gli $U(A, B)$ formano, al variare di A e B tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$ per qualche $n > 0$, un'altra base di aperti della topologia su X definita nell'Esercizio 2. △

Esercizio 4. Dimostrare che con la topologia dell'Esercizio 2, la funzione

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \qquad f(S) = \sum_{n \in S} 10^{-n}$$

è continua ed iniettiva. △

Esercizio 5. Sia $S \subset \mathbb{Z}$ un qualsiasi sottoinsieme. Mostrare che

$$\bigcup_{n \in S} \left[n, n + \frac{1}{9} \right]$$

è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$. △

Esercizio 6 (∗). Sia f la funzione dell'Esercizio 4. Dimostrare che $f(X)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$. (Sugg.: Sia $\alpha_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la moltiplicazione per 10^n. Descrivere $f(X) = \cap_{n \geq 0} \alpha_n^{-1}(C)$ per un opportuno sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{R}$.) △

Esercizio 7 (∗). Sia f la funzione dell'Esercizio 4. Dimostrare che f è un omeomorfismo sull'immagine o equivalentemente (per l'Esercizio 6) che f è chiusa ed iniettiva. △

Università di Roma 1, corso di Topologia 2005-06, M.M.