1 Esercizi di Topologia, 30 marzo 2006, M.M.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in D^n \mid |x_1| < 1\}.$$

Dimostrare che esistono finiti $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $D_n - (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ è sconnesso. △

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme numerabile. Dimostrare che il complementare $X = \mathbb{R}^2 - S$ è connesso per archi. (Sugg.: provare che per ogni $x \in X$ esistono almeno due rette passanti per x e contenute in X.) △

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice **localmente costante** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.
Provare che se X è connesso e $f\colon X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Sugg.: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.) △

Esercizio 4. Dimostrare che i quattro sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

1. Una circonferenza.
2. Unione di due circonferenze disgiunte.
3. Unione di due circonferenze tangenti.
4. Unione di due circonferenze secanti.

hanno classi di omeomorfismo distinte. △

Esercizio 5. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff.

1. Dimostrare che per ogni coppia di chiusi disgiunti $A, B \subset X$ esistono due chiusi C, D tali che $C \cup D = X$, $C \cap A = \emptyset$ e $D \cap B = \emptyset$ (Sugg.: teorema di Wallace).
2. Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi connessi in X. Dimostrare che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è un sottospazio connesso.

△

Esercizio 6 (∗). Sia $X = \mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è connesso. △