

Corso di Topologia 2005/2006

II semestre

Marco Manetti

1 Programma

Si illustreranno alcuni concetti fondamentali di topologia generale e verrà data un'introduzione alla topologia algebrica. L'approccio alla materia non sarà esclusivamente astratto e saranno dedicati ampi spazi allo studio di esempi concreti ed allo svolgimento di esercizi (di tutti i livelli di difficoltà).

Per comprendere i contenuti del corso è fortemente consigliato aver già seguito le lezioni di Algebra, Geometria Analitica e Calcolo 2.

Gli argomenti svolti saranno, in linea di massima, i seguenti:

Richiami di teoria ingenua degli insiemi, Assioma della scelta, Lemma di Zorn ed applicazioni, aritmetica cardinale.

Spazi topologici, spazi metrici, funzioni continue, omeomorfismi, spazi di Hausdorff, prodotti topologici.

Spazi connessi e componenti connesse, spazi compatti e localmente compatti, teorema di Wallace e sue conseguenze, esaustioni in compatti e compattificazione di Alexandroff. Gruppi topologici e topologia dei gruppi classici. Identificazioni e topologia quoziente, topologia degli spazi proiettivi.

Assiomi di numerabilità, successioni, compattezza negli spazi metrici. Prebasi, teoremi di Alexander e Tyconoff.

Omotopia, connessione per archi, gruppo fondamentale, teorema di Van Kampen e semplice connessione delle sfere. Rivestimenti, sollevamento dell'omotopia e azione di monodromia. Calcolo dei gruppi fondamentali della circonferenza, del toro, della bottiglia di Klein e degli spazi proiettivi. Teoremi di Borsuk-Ulam e del punto fisso di Brower, dimostrazione "omotopica" del teorema fondamentale dell'algebra. Topologia di $SO(3)$ e non pettinabilità della sfera S^2 .

Se vi sarà tempo a disposizione saranno inoltre trattati alcuni dei seguenti argomenti: spazi paracompatti, il teorema di Stone-Weierstrass, gruppi liberi e gruppo fondamentale di un grafo, teoria "di Galois" dei rivestimenti.

2 Osservazioni

Per la natura degli argomenti trattati, il corso è consigliato in particolare a coloro che hanno intenzione di iscriversi alla Laurea specialistica in Matematica.

Chi seguirà il corso acquisirà competenze sufficienti per rispondere alle seguenti domande:

1. Qual è la cardinalità dell'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $[0, 1]$?
2. Esistono, in questo preciso istante, due punti antipodali della terra con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica?
3. È possibile togliersi le mutande senza slacciarsi i pantaloni?
4. Qual è la relazione tra il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?
5. Data una sfera bidimensionale totalmente ricoperta di peli, è possibile pettinarla?
6. Dato un panino con prosciutto e formaggio in \mathbb{R}^3 , è possibile trovare un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ che divide in parti uguali pane, prosciutto e formaggio?
7. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua e tale che $\|f(x) - x\| \leq \|x\|/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. È possibile per f non essere surgettiva?

Testi di riferimento.

Dispense del docente ed i Capitoli 1,2,3 e 4 del libro di Edoardo Sernesi “Geometria 2”.

Altri testi di utile consultazione:

I. Singer, J. Thorpe: *Lectures on elementary topology and geometry*.

J. Kelley: *General topology*.

W. Massey: *Algebraic topology: an introduction*.

Aggiornamenti e maggiori informazioni alla URL
www.mat.uniroma1.it/people/manetti/didattica.html