Esercizi pasquali 2010

Esercizio 1. Siano A, B e C sottoinsiemi di uno spazio topologico tali che $B \subseteq \overline{A}$ e $C \subseteq \overline{B}$. Dimostrare che $C \subseteq \overline{A}$.

Esercizio 2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ uno spazio topologico infinito e discreto. Provare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione continua $X \to A$ è costante.

Esercizio 3. Trovare un omeomorfismo tra $S^1 \times S^1 - \Delta$ e $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico. Provare che

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B},$$

e dare un esempio dove $A = \overline{A}$ e $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Esercizio 5. Dire quante sono le componenti connesse di

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Esercizio 6. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme con la proprietà che

$$x, y \in A \Rightarrow (\|x\| - 1, \|y\|^2) \in A.$$

Dimostrare che anche la sua chiusura $\overline{A}$ ha la medesima proprietà. Vale lo stesso per la parte interna?

Esercizio 7. Dire, motivando la risposta, se l'unione di due rette parallele di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfa all'unione di due rette incidenti.

Esercizio 8. Siano $S \subset M(2, 2)$ il sottospazio delle matrici simmetriche e $Y \subset S$ il sottospazio di quelle definite positive. Dimostrare che Y è aperto in S nella topologia di sottospazio e che è connesso per archi (sugg.: usare il fatto che se $A, B \in Y$ e $t > 0$, allora $tA, A + B \in Y$).

Esercizio 9. Sia $X \subset M(2, 2)$ il sottospazio delle matrici A tali che $A^2 = I$ (I=identità). Dire, motivando la risposta, se X è compatto e se è connesso.

Esercizio 10. Sia C un chiuso di uno spazio topologico X. Provare che C non ha parte interna se e solo se è la frontiera di un aperto di X.

Esercizio 11. Trovare un esempio di uno spazio metrico (X, d) e di un suo punto x tali che

$$\overline{\{y \mid d(x, y) < 2\}} \neq \{y \mid d(x, y) \leq 2\}.$$

Esercizio 12. Sia X uno spazio topologico: per ogni $A \subset X$ denotiamo con $f(A) = \overline{A^o}$. Dimostrare che $f(f(A)) = f(A)$.

Esercizio 13. Siano A, B due aperti densi di uno spazio topologico. Dimostrare che $A \cap B$ è un aperto denso.

Esercizio 14. Determinare il numero di componenti connesse dello spazio

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

(Sugg.: considerare l'intersezione del complementare di Y con le rette affini di $\mathbb{C}^2$.)

Esercizio 15. Sia $\mathcal{S}$ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di aperti la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $[a, b[$. Provare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione continua $X \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ è costante.

Esercizio 16. Sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto. Dimostrare che ogni componente connessa di A è un intervallo aperto. Dedurne che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione disgiunta di intervalli aperti.

Esercizio 17. Siano X, Y due spazi topologici. Mostrare che se né X né Y hanno la topologia indiscreta, allora esiste un aperto del prodotto $X \times Y$ che non è della forma $A \times B$, con $A \subset X$ e $B \subset Y$.

Esercizio 18. Dire se i seguenti spazi sono connessi:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx - y > x^3 - x^2\}, \qquad Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

Università di Roma 1: a.a. 2009-10, insegnamento di Topologia

Esercizio 19. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Dimostrare che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$B = \{p + t(x - p) \mid x \in A,\ 0 < t \leq 1\}$$

è un aperto. Dedurre che l'insieme

$$C = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in A,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

è un aperto.

Esercizio 20. Siano X uno spazio topologico e $A, B \subset X$ due sottoinsiemi non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dimostrare che X non è connesso.

Esercizio 21. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto del cilindro $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n \mid x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Dimostrare che esistono finiti $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $X - (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ è sconnesso.

Esercizio 22. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ si dice **localmente costante** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$. Provare che se X è connesso e $f \colon X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Sugg.: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.)

Esercizio 23. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ tali che:

(1) A è aperto nella topologia euclidea.
(2) Se $0 \in A$, allora $\mathbb{R} - A$ è limitato.

Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia e che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto, connesso, di Hausdorff ed omeomorfo all'unione di due circonferenze tangenti.

Esercizio 24. Dimostrare che i quattro sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

(1) Una circonferenza.
(2) Unione di due circonferenze disgiunte.
(3) Unione di due circonferenze tangenti.
(4) Unione di due circonferenze secanti.

hanno classi di omeomorfismo distinte.

Esercizio 25 $(*)$**.** Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 1. Dimostrare che per ogni $c \in [0, 1]$ esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) = f(t + c)$.

Esercizio 26 $(*)$**.** Sia X uno spazio compatto di Hausdorff.

(1) Dimostrare che per ogni coppia di chiusi disgiunti $C, D \subset X$ esistono due aperti disgiunti A, B tali che $C \subset A$, $B \subset D$ (Sugg.: teorema di Wallace).
(2) Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi in X e sia A un aperto tale che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n \subset A$. Dimostrare che $C_n \subset A$ per ogni n sufficientemente grande.
(3) Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi connessi in X. Dimostrare che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è un sottospazio connesso.

Esercizio 27. Sia $U \subset S^n$ un aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che il complementare $S^n - U$ è connesso

Esercizio 28. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la relazione di equivalenza che identifica due vettori x, y se esiste una matrice invertibile A tale che $x = Ay$. Dimostrare che X non è di Hausdorff.

Esercizio 29. Una formica torre si muove nel piano solamente lungo le rette di equazione $x = a$ e $y = b$. Siano p, q due punti di un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che una formica torre può muoversi da p in q senza uscire da A.

Esercizio 30. Una formica alfiere si muove nel piano solamente lungo le rette di equazione $x + y = a$ e $x - y = b$. Siano p, q due punti di un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che una formica alfiere può muoversi da p in q senza uscire da A.

Esercizio 31. Sia $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione limitata (ossia $\sup \|f(x)\| < +\infty$). Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico $\gamma = \{(x, f(x))\}$ è chiuso nel prodotto. Trovare un esempio di applicazione illimitata e non continua il cui grafico è chiuso.

Esercizio 32. Sia M lo spazio delle matrici complesse 301×301 ed $X \subset M$ il sottospazio delle matrici che possiedono un autovalore di modulo 1. Dimostrare che X è chiuso in M.