Corso di Topologia 2009-2010
Laurea triennale in Matematica
64 ore, 8 CFU

Docente: Marco Manetti

II semestre: lunedì e mercoledì 8.00-10.00, giovedì 10.00-11.00

Dal 2010-2011 il corso di Topologia cambia nome in Geometria 2, diventerà da 9 CFU e sarà obbligatorio per il curriculum generale[1].

[1] Geometria analitica diventerà Geometria 1, Calcolo 2 diventerà Analisi matematica 2

Il corso è aperto a tutti gli studenti che hanno frequentato i corsi di Algebra 1, Geometria Analitica e Calcolo 2.

Può essere utile, ma NON necessario aver frequentato, o frequentare in contemporanea, i corsi Analisi Reale, Algebra 2 e Geometria Differenziale.

Programma.

Il corso è idealmente diviso in quattro parti:

Programma.

Il corso è idealmente diviso in quattro parti:

- elementi di teoria degli insiemi,

Programma.

Il corso è idealmente diviso in quattro parti:

- elementi di teoria degli insiemi,
- elementi di topologia generale,

Programma.

Il corso è idealmente diviso in quattro parti:

- elementi di teoria degli insiemi,
- elementi di topologia generale,
- introduzione alla topologia algebrica,

Programma.

Il corso è idealmente diviso in quattro parti:

- elementi di teoria degli insiemi,
- elementi di topologia generale,
- introduzione alla topologia algebrica,
- introduzione alla topologia differenziale.

Elementi di teoria degli insiemi.
Assioma della scelta, Lemma di Zorn ed applicazioni, aritmetica cardinale.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

Elementi di teoria degli insiemi.
Assioma della scelta, Lemma di Zorn ed applicazioni, aritmetica cardinale.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- ogni spazio vettoriale (anche di dimensione infinita) ammette una base,

Elementi di teoria degli insiemi.
Assioma della scelta, Lemma di Zorn ed applicazioni, aritmetica cardinale.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- ogni spazio vettoriale (anche di dimensione infinita) ammette una base,
- dati due insiemi X, Y allora esiste $f\colon X \to Y$ che è iniettiva o surgettiva,

Elementi di teoria degli insiemi.
Assioma della scelta, Lemma di Zorn ed applicazioni, aritmetica cardinale.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- ogni spazio vettoriale (anche di dimensione infinita) ammette una base,
- dati due insiemi X, Y allora esiste $f: X \to Y$ che è iniettiva o surgettiva,
- uno spazio vettoriale di dimensione infinita non è mai isomorfo al proprio duale.

Topologia generale.
Richiami sulle nozioni base (apprese a Geometria analitica): spazi topologici, spazi metrici, funzioni continue, omeomorfismi, spazi connessi, spazi compatti, spazi prodotto, spazi di Hausdorff.

Ulteriori concetti di topologia generale: spazi localmente compatti, teorema di Baire, prodotti infiniti di spazi topologici, topologia quoziente, taglio e cucito, incollamenti.
Gruppi topologici, topologia dei gruppi classici, spazi vettoriali topologici. Varietà topologiche.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- $\mathbb{R}^n$ non è unione numerabile di iperpiani,

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- $\mathbb{R}^n$ non è unione numerabile di iperpiani,
- ogni polinomio a coefficienti complessi possiede radici

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- $\mathbb{R}^n$ non è unione numerabile di iperpiani,
- ogni polinomio a coefficienti complessi possiede radici
- uno spazio topologico numerabile non può essere compatto, connesso e di Hausdorff.

In tale ambito dimostreremo ad esempio che:

- $\mathbb{R}^n$ non è unione numerabile di iperpiani,
- ogni polinomio a coefficienti complessi possiede radici
- uno spazio topologico numerabile non può essere compatto, connesso e di Hausdorff.
- un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se ogni coppia di punti in U sono estremi di un cammino continuo $\alpha\colon [0,1] \to U$.

Topologia Algebrica.
La topologia algebrica è lo studio delle proprietà topologiche che utilizza gli strumenti dell'algebra (la teoria dei gruppi in particolare).

Argomenti trattati. Spazi connessi e semplicemente connessi per archi, omotopia, gruppo fondamentale, rivestimenti, teorema di Van Kampen, Teorema del punto fisso di Brower, dimostrazione "omotopica" del teorema fondamentale dell'algebra.

In tale ambito sapremo rispondere alle seguenti domande:

- Esistono, in questo preciso istante, due punti antipodali della terra con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica?

- Esistono, in questo preciso istante, due punti antipodali della terra con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica?
- Qual è la relazione tra il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

- Dato un panino con prosciutto e formaggio in $\mathbb{R}^3$, è possibile trovare un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ che divide in parti uguali pane, prosciutto e formaggio?

- Dato un panino con prosciutto e formaggio in $\mathbb{R}^3$, è possibile trovare un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ che divide in parti uguali pane, prosciutto e formaggio?
- Data una sfera bidimensionale totalmente ricoperta di peli, è possibile pettinarla?

- Dato un panino con prosciutto e formaggio in $\mathbb{R}^3$, è possibile trovare un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ che divide in parti uguali pane, prosciutto e formaggio?
- Data una sfera bidimensionale totalmente ricoperta di peli, è possibile pettinarla?
- Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua e tale che $\|f(x) - x\| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. È possibile per f non essere surgettiva?

Topologia Differenziale.
La topologia differenziale si occupa di studiare le proprietà topologiche di spazi “ regolari” utilizzando gli strumenti dell’analisi.

Argomenti: funzioni differenziabili e varietà differenziabili. Partizioni dell’unità, approssimazione di funzioni continue con funzioni differenziabili, vettori tangenti, punti critici e trasversalità, Teorema di Sard.