Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Soluzioni della prova scritta del 22 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^2 = 2\overline{z}$.

Risposta. $z = 0$, $z = 2$, $z = -1 + i\sqrt{3}$, $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Soluzione.

Sicuramente $z = 0$ è una soluzione. Per trovare le altre soluzioni, supponiamo d'ora in poi quindi $z \neq 0$. Possiamo quindi scrivere $z = ru$, con $r = |z|$ reale positivo e $u = z/|z|$ numero complesso di modulo 1. Poiché $\overline{z} = ru^{-1}$, ne segue che l'equazione voluta può essere riscritta come

$$r^2u^2 = z^2 = 2\overline{z} = 2ru^{-1}.$$

Poiché $r, u \neq 0$, possiamo moltiplicare ambo i membri per u/r, ottenendo così

$$ru^3 = 2,$$

da cui segue che

$$\begin{cases} r = 2 \\ u^3 = 1. \end{cases} \tag{$\star$}$$

In particolare, $u^3 = 1$ ammette le seguenti tre soluzioni $u = 1$, $u = \cos(2\pi i/3) + i\sin(2\pi i/3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $u = \cos(4\pi i/3) + i\sin(4\pi i/3) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi le soluzioni di ($\star$) sono $z = 2$, $z = -1 + i\sqrt{3}$, $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Esercizio 2. Sia $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale reale delle applicazioni (non necessariamente continue) da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi di V siano sottospazi vettoriali.

(i) Il sottoinsieme $W = \{f \in V \mid f(1)^2 f(2) + f(2)^3 = 0\}$.

Risposta. *Sì, W è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.

Poiché f assume solo valori reali, $0 = f(1)^2 f(2) + f(2)^3 = f(2)[f(1)^2 + f(2)^2]$ è equivalente a $f(2) = 0$. Dunque $W = \{f \in V \mid f(2) = 0\}$.
Verifichiamo quindi che W è un sottospazio vettoriale di V.

- *La funzione nulla $\mathbf{0}$ chiaramente appartiene a W, in quanto $\mathbf{0}(\mathbf{2}) = \mathbf{0}$.*
- *Se $f, g \in W$, allora $f(2) = g(2) = 0$ e quindi $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0$, da cui segue che $(f + g) \in W$.*
- *Se $f \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f(2) = 0$ e quindi $(\lambda f)(2) = \lambda \cdot f(2) = \lambda 0 = 0$, da cui $(\lambda f) \in W$.*

(ii) Il sottoinsieme $U = \{f \in V \mid f(m) = 0 \text{ per ogni } m \in \mathbb{Z}\}$.

Risposta. *Sì, U è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.
Verifichiamo che U è un sottospazio vettoriale di V.

- *La funzione nulla $\mathbf{0}$ chiaramente appartiene a U, in quanto $\mathbf{0}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$.*
- *Se $f, g \in U$, allora per ogni $m \in \mathbb{Z}$ si ha $f(m) = g(m) = 0$ e quindi $(f+g)(m) = f(m)+g(m) = 0$, da cui segue che $(f + g) \in U$.*
- *Se $f \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f(m) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$ e quindi $(\lambda f)(m) = \lambda \cdot f(m) = \lambda 0 = 0$, da cui $(\lambda f) \in U$.*

(iii) Il sottoinsieme $Z = \{f \in V \mid f(x + 1) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$.

Risposta. *No, Z non è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.
Infatti, la funzione $f(x) = x$ appartiene a Z ma la funzione $(-1) \cdot f = (-f)$ non appartiene a Z.

Esercizio 3. Si considerino i due sottospazi vettoriali $U, W \subset \mathbb{R}^4$ definiti come $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Estrarre da (u_1, u_2, u_3) una base di U e da (w_1, w_2, w_3) una base di W.

Risposta. $\mathcal{B}_U = (u_1, u_2)$ *è una base di* U *e* $\mathcal{B}_W = (w_1, w_2)$ *è una base di* W.

Soluzione.

Per estrarre una base di U *da* (u_1, u_2, u_3)*, consideriamo la matrice*

$$A = (u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

la riduciamo a scala con l'algoritmo di eliminazione di Gauss, ottenendo così una matrice A'*, e prendiamo le colonne di* A *corrispondenti alle colonne di* A' *che hanno un pivot. Abbiamo quindi*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

da cui segue che una base di U *è data da* (u_1, u_2)*.*
In modo simile per W*, consideriamo la matrice* $B = (w_1|w_2|w_3)$*. Otteniamo*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'$$

da cui segue che (w_1, w_2) *è una base di* W*.*

(ii) Trovare equazioni cartesiane per $U + W$.

Risposta. $U + W = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 0\}$.

Soluzione.

Poiché $U+W$ è generato da u_1, u_2, w_1, w_2, equazioni cartesiane per $U+W$ sono equazioni cartesiane per l'immagine di $L_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con $C = (u_1|u_2|w_1|w_2)$. I vettori $y \in \mathbb{R}^4$ nell'immagine di L_C sono quelli per cui il sistema lineare $Cx = y$ ammette soluzione. Dunque, consideriamo la matrice completata $\hat{C} = (u_1|u_2|w_1|w_2|y)$ e, per applicare Rouché-Capelli, usiamo l'algoritmo di Gauss

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 0 & y_1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & y_2 \\ 1 & -2 & -2 & 6 & y_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & y_2 \\ 1 & -2 & -2 & 6 & y_3 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & y_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 1 & -2 & -2 & 6 & y_3 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & y_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & y_3-y_4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & y_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & y_3-y_4 \\ 0 & -4 & -2 & -2 & y_1-2y_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_3 \\ 0 & -4 & -2 & -2 & y_1-2y_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & y_1+2y_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & y_2+y_4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{y_1+4y_2+2y_3} \end{array}\right) = \hat{C}'$$

da cui segue che il sistema $Cx = y$ ammette soluzione se e solo se $y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 0$.

(iii) Trovare una base di $U \cap W$.

Risposta. *Una base di $U \cap W$ è $\mathcal{B}_{U\cap W} = (e_4)$.*

Soluzione.

Consideriamo la matrice $D = (u_1\ u_2 \,|\, w_1\ w_2)$. Riduciamola a scala e otteniamo una matrice S. Ogni colonna di S senza pivot fornisce una relazione lineare tra le colonne di S e quindi tra le colonne di D: con ciascuna di esse produciamo un elemento della base di $U \cap W$. Procediamo

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = S$$

da cui otteniamo che S^4 è combinazione lineare di S^1, S^2, S^3 e, in particolare, $S^4 = 4S^1 + 2S^2 - 3S^3$. Ne segue che $D^4 = 4D^1 + 2D^2 - 3D^3$, ossia $w_2 = 4u_1 + 2u_2 - 3w_1$. Ne segue che $v := 3w_1 + w_2 = 4u_1 + 2u_2 = 4e_4$ appartiene a $U \cap W$, e in effetti (v) è una base di $U \cap W$. Dunque anche (e_4) è una base di $U \cap W$.

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -9 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A di L_A.
Calcolare gli autovalori di L_A e determinarne le loro molteplicità algebriche e geometriche.

Risposta. $p_A = (2-t)^3$. *L'unico autovalore è* $\lambda = 2$ *con molteplicità algebrica* 3 *e molteplicità geometrica* 2.

Soluzione.

Calcoliamo il polinomio caratteristico p_A *di* L_A*, usando lo sviluppo di Laplace lungo la terza riga:*

$$p_A = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 1 & -1 \\ -9 & 5-t & -3 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)[(-1-t)(5-t)+9] = (2-t)[t^2-4t+4] = (2-t)^3.$$

Dunque l'unico autovalore è $\lambda = 2$ *con molteplicità algebrica* $m_2 = 3$. *Per calcolare la sua molteplicità geometrica* $\mu_2 = \dim \ker(A - 2I) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I)$, *riduciamo a scala la matrice* $A - 2I$ *e contiamo i pivots*

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\mathrm{rg}(A - 2I) = 1$ *e quindi* $\mu_2 = 2$.

(ii) Dire se L_A sia triangolabile e se sia diagonalizzabile.

Risposta. L_A *è triangolabile ma non è diagonalizzabile.*

Soluzione.

L_A *è triangolabile perché* p_A *è completamente fattorizzabile in fattori di primo grado. D'altra parte la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di* L_A *è minore di* $3 = \dim \mathbb{R}^3$, *e quindi* L_A *non è diagonalizzabile.*

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A di L_A.

Risposta. $q_A = (t-2)^2$.

Soluzione.

Il polinomio minimo q_A *di* L_A *deve avere la forma* $q_A = (t-2)^k$ *con* $1 \leq k \leq 3$, *in quanto deve avere le stesse radici di* p_A *e deve dividere* p_A. *In particolare,* k *è il minimo intero* m *tale che* $(A - 2I)^m = 0$, *ossia tale che* $\dim \ker(A - 2I)^m = 3$. *Ora, l'intero* $\dim \ker(A - 2I)^m$ *cresce strettamente con* m *fino a stabilizzarsi al valore* 3. *Poiché* $\dim \ker(A - 2I)^1 = 2$, *ne segue che* $\dim \ker(A - 2I)^2 = 3$. *Dunque* $k = 2$.