Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Prova scritta - 22 gennaio 2020

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-K* *(Mondello)* *L-Z* *(D'Andrea)*

Orale: *Primo appello* *Secondo appello*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7.5	
2	7.5	
3	7.5	
4	7.5	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^2 = 2\overline{z}$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale reale delle applicazioni (non necessariamente continue) da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi di V siano sottospazi vettoriali.

(i) Il sottoinsieme $W = \{f \in V \mid f(1)^2 f(2) + f(2)^3 = 0\}$.

(ii) Il sottoinsieme $U = \{f \in V \mid f(m) = 0 \text{ per ogni } m \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) Il sottoinsieme $Z = \{f \in V \mid f(x + 1) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$.

Risoluzione:

Esercizio 3. Si considerino i due sottospazi vettoriali $U, W \subset \mathbb{R}^4$ definiti come $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Estrarre da (u_1, u_2, u_3) una base di U e da (w_1, w_2, w_3) una base di W.

(ii) Trovare equazioni cartesiane per $U + W$.

(iii) Trovare una base di $U \cap W$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -9 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A di L_A.
Calcolare gli autovalori di L_A e determinarne le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(ii) Dire se L_A sia triangolabile e se sia diagonalizzabile.

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A di L_A.

Risoluzione: