Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Prova scritta - 7 febbraio 2020 - Soluzioni

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^4 = |z|$.

Risposta: *Le cinque soluzioni sono* $z = 0, 1, i, -1, -i$.

Soluzione.
Se z *soddisfa* $z^4 = |z|$*, allora certamente* $|z|^4 = |z^4| = |z|$*, e quindi* $|z|(|z|^3 - 1) = 0$*. Poiché* $|z| \geq 0$*, necessariamente* $|z| = 0$ *oppure* $|z| = 1$*.*
Notiamo intanto che $z = 0$ *è soluzione.*
Se $z \neq 0$*, deve quindi essere* $|z| = 1$*. Ma allora l'equazione diventa* $z^4 = 1$*, che ha quindi le quattro soluzioni* $z = \pm 1, \pm i$ *ed è immediato controllare che tutte e quattro soddisfino l'equazione* $z^4 = |z|$*.*

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale complesso delle matrici 3×3 a coefficienti complessi. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi di V siano sottospazi vettoriali.

(i) Il sottoinsieme $W = \{M \in V \mid M + 2M^T = 0\}$.

Risposta: *Sì, W è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.

Infatti, $0 + 2 \cdot 0^T = 0$ e quindi $0 \in W$. Se $M, N \in W$ allora $(M + N) + 2(M + N)^T = (M + 2M^T) + (N + 2N^T) = 0 + 0 = 0$ e quindi $(M + N) \in W$. Infine, se $M \in W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $(\lambda M) + 2(\lambda M)^T = \lambda(M + 2M^T) = \lambda \cdot 0 = 0$ e quindi $\lambda M \in W$.

Alternativamente, si può anche osservare che $W = \{0\}$ e quindi è ovviamente un sottospazio vettoriale. Infatti, l'applicazione $T : V \to V$ definita come $M \mapsto M^T$ soddisfa $T^2 = \mathrm{Id}_V$ e quindi ha autovalori in $\{\pm 1\}$. Ne segue che l'applicazione $M \mapsto 2M^T$ ha autovalori in $\{\pm 2\}$ e l'applicazione $\varphi : V \to V$ definita come $\varphi(M) := M + 2M^T$ ha autovalori in $\{-1, 3\}$. Ne segue che φ è un isomorfismo. D'altra parte, $W = \ker(\varphi) = \{0\}$.

(ii) Il sottoinsieme $U = \{M \in V \mid \det(M) = 0\}$.

Risposta: *No, U non è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.

Infatti, le matrici $M := E_{11}$ e $N := E_{22} + E_{33}$ soddisfano $\det(M) = \det(N) = 0$, e dunque $M, N \in U$. Ma $M + N = I$ e $\det(I) = 1$, dunque $(M + N) \notin U$. Ne segue che U non è chiuso rispetto alla somma.

(iii) Il sottoinsieme $Z = \{M \in V \mid MM^T \text{ non è la matrice identità}\}$.

Risposta: *No, Z non è un sottospazio vettoriale.*

Soluzione.

Infatti la matrice $M = 2I$ soddisfa $MM^T = (2I)(2I)^T = 4I \neq I$, e dunque $M \in Z$. Tuttavia, se $M = 2I \in Z$ e $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{C}$, allora $\lambda M = I \notin Z$ in quanto $II^T = I$. Ne segue che Z non è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

Esercizio 3. Si considerino i due sottospazi vettoriali $U, W \subset \mathbb{R}^4$ definiti come $U = \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $W = \text{Span}(w_1, w_2)$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare equazioni cartesiane per U e calcolarne la dimensione al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta: *Per ogni* $k \in \mathbb{R}^4$ *si ha* $\dim(U) = 3$ *e* $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid (k-1)x_1 - 2x_2 - kx_3 + x_4 = 0\}$.

Soluzione.

Sia $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ *e consideriamo la matrice* $A = (u_1|u_2|u_3|x)$. *Riducendo a scala le prime tre colonne di* A, *possiamo calcolare equazioni cartesiane per* U *usando Rouché-Capelli.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & -1 & x_3 \\ -1 & 4 & k & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_1+x_2 \\ 1 & 2 & -1 & x_3 \\ -1 & 4 & k & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1+x_3 \\ -1 & 4 & k & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1+x_3 \\ 0 & 6 & k-2 & x_1+x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & k & -x_1-2x_2+x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & x_1 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -x_1+x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{(k-1)x_1 - 2x_2 - kx_3 + x_4} \end{array}\right) = A'$$

da cui segue che A *e* A' *hanno rango* 3 *e quindi* U *ha dimensione* 3 *per ogni* $k \in \mathbb{R}$. *Inoltre, per Rouché-Capelli* U *ha equazione cartesiana* $(k-1)x_1 - 2x_2 - kx_3 + x_4 = 0$.

(ii) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U \subseteq W$.

Risposta: U *non è contenuto in* W *per alcun* $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

Infatti, W *è generato da* w_1, w_2 *e quindi ha dimensione al più* 2 *mentre* U *ha dimensione* 3, *come calcolato al punto (i).*

(iii) Calcolare $\dim(U \cap W)$ quando $k = 0$.

Risposta: *Per* $k = 0$ *si ha* $\dim(U \cap W) = 1$.

Soluzione.

Infatti, w_1, w_2 *sono non nulli e non proporzionali, e dunque sono una base di* W, *da cui* $\dim(W) = 2$. *Sappiamo che* $\dim(U) = 3$. *Notiamo inoltre che* $w_1 \notin U$, *in quanto* $(-1)1 - 2 + 1 = -2 \neq 0$. *Dunque* $U + W$ *è strettamente più grande di* U, *da cui* $U + W = \mathbb{R}^4$ *e quindi* $\dim(U + W) = 4$. *Per la formula di Grassmann,* $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$.

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A di L_A.
Calcolare gli autovalori di L_A e determinarne le loro molteplicità algebriche e geometriche.

RISPOSTA: *Il polinomio caratteristico di L_A è $p_A = (1-t)^3$. L'unico autovalore di L_A è 1 con molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2.*

SOLUZIONE.
Calcoliamo il polinomio caratteristico di L_A come segue

$$\begin{aligned} p_A = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 & -1 \\ -2 & -t & 1 \\ 2 & 1 & -t \end{pmatrix} &= (3-t)[(-t)^2 - 1] - 1[(-2)(-t) - 2] + (-1)[-2 + 2t] = \\ &= (3-t)(t-1)(t+1) - 2(t-1) - 2(t-1) = (t-1)[(3-t)(t+1) - 4] = \\ &= (t-1)[-t^2 + 2t - 1] = (1-t)^3. \end{aligned}$$

Ne segue che l'unico autovalore è $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 3$. Per calcolare la molteplicità geometrica $m_g(1) = \dim \ker(A - I) = 3 - \mathrm{rg}(A - I)$, applichiamo la riduzione di Gauss a $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che $\mathrm{rg}(A - I) = 1$ e dunque $m_g(1) = 2$. Otteniamo in particolare che l'autospazio $V_1 = \ker(A - I)$ ha equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(ii) Determinare una matrice in forma di Jordan simile ad A.

RISPOSTA:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

SOLUZIONE.
Poiché $m_g(1) = 2$, sappiamo che la forma di Jordan di A avrà due blocchi: uno di ordine 1 e uno di ordine 2, entrambi corrispondenti all'unico autovalore 1. Dunque una matrice simile ad A in forma di Jordan è

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La determinazione di una base di Jordan non è richiesta dall'esercizio. In ogni caso, se la si volesse determinare, si potrebbe procedere come segue.
Cerchiamo quindi un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \ker(A - I) = \mathbb{R}^3 \setminus V_1$. Definiamo poi $v_2 := (A - I)v_3$ e completiamo (v_2) ad una base (v_1, v_2) di $\ker(A - I)$, ottenendo così la base di Jordan $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ rispetto alla quale L_A è rappresentata dalla matrice

$$\theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

in forma di Jordan. Sappiamo che $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ dal punto (i). Dunque, per esempio $v_3 := e_1 \notin V_1$. Allora $v_2 := (A - I)v_3 = (A - I)e_1 = 2(e_1 - e_2 + e_3)$. Notiamo che $v_1 = e_2 + e_3 \in V_1$ e non è proporzionale a v_2. Dunque (v_1, v_2) sono una base di V_1.

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A di L_A.

Risposta: *Il polinomio minimo è* $q_A = (t-1)^2$.

Soluzione.

Si deve avere $q_A = (t-1)^k$ *per qualche* $k = 1, 2, 3$. *In effetti,* k *è il minimo intero per cui* $(A-I)^k = 0$.

È stato calcolato al punto (i) che $m_g(1) = \dim \ker(A-I) = 2 < 3$ *e dunque* $A - I \neq 0$. *Dunque* $3 \leq \dim \ker(A-I)^2 > \ker(A-I) = 2$, *da cui* $\dim \ker(A-I)^2 = 3$, *ossia* $(A-I)^2 = 0$.