

Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2019/20

Prova scritta in modalità telematica - 11 settembre 2020

Tre esercizi, 90 minuti di tempo

Occorre motivare le risposte.

Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $\cos |z| + i \sin |z| = z^2$.

Esercizio 2. Sia M_3 lo spazio vettoriale reale delle matrici 3×3 a coefficienti complessi. Dopo aver calcolato la dimensione dello spazio vettoriale reale M_3 , dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi V, W, Z di M_3 siano sottospazi affini reali. Infine determinarne la dimensione di ciascun sottospazio affine reale e dire se siano sottospazi vettoriali reali.

(i) $V = \{A \in M_3 \mid A \cdot A^T = 0\}$.

(ii) $W = \left\{ A \in M_3 \mid v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ è autovettore di } A \text{ di autovalore } 9i \right\}$.

(iii) $Z = \{A \in M_3 \mid \text{la prima riga e la prima colonna di } A \text{ sono linearmente dipendenti}\}$.

Esercizio 3. Considerare l'insieme \mathcal{A} di tutte le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfino $T^3 = 2T^2$.

- (a) Quali sono le possibili tracce di tali T in \mathcal{A} ?
- (b) È vero che, se $T \in \mathcal{A}$ è diagonalizzabile, allora $\text{tr}(T) > 3$?
- (c) È vero che, se $T \in \mathcal{A}$ soddisfa $\text{tr}(T) > 3$, allora T è diagonalizzabile?
- (d) È vero che, per ogni $T \in \mathcal{A}$, l'applicazione $T^2 - 2I$ ha rango 3?