Esercizi di algebra lineare (25 settembre 2019)

Esercizio 1. Scrivere i seguenti numeri nella forma $a + b\sqrt{2}$:

$$(1+\sqrt{2})(1-2\sqrt{2}), \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, \quad (1-\sqrt{2})^3, \quad \frac{(2-2\sqrt{2})^{11}}{(2-\sqrt{2})^{10}}.$$

Esercizio 2. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $a + ib$:

$$(\cos(\pi/9) + i\sin(\pi/9))^3, \qquad \frac{2+i}{i+2}, \qquad i^{2017}, \qquad \frac{13-2i}{6+4i}, \qquad \frac{(1+i)^{2017}}{16^{252}}.$$

Esercizio 3. Si considerino i tre numeri complessi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -2i$:

(a) calcolare i tre quozienti $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ e $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$;

(b) dire, motivando la risposta, se il triangolo nel piano di Gauss di vertici z_1, z_2, z_3 è acutangolo, rettangolo, oppure ottusangolo;

(c) trovare, oppure dimostrare che non esistono, tre numeri complessi distinti u_1, u_2, u_3 tali che i tre quozienti $\dfrac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$, $\dfrac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2}$ e $\dfrac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}$ hanno tutti parte reale negativa.

Esercizio 4. Calcolare, nella forma $a+ib$, le radici quadrate dei numeri complessi $1+2i$, $4-3i$ e $1-4i$.

Esercizio 5. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $p(x) = x^7 - 4x^5 + 3x^2 + 2x + 1 - 2i$. Quanto vale $p(\overline{\alpha})$?

Esercizio 6. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^2 + x + 5$. Trovare, oppure dimostrare che non esistono, due numeri razionali a, b tali che $(a + b\xi)(1 - \xi) = 1$.