Esercizi di algebra lineare (30 settembre 2019)

Esercizio 1. Sia $\mathbb{F}_4$ l'insieme $\{\overline{0}, \overline{1}, \alpha, \alpha + \overline{1}\}$ con 4 elementi. Definiamo una operazione di somma $+$ commutativa e associativa su $\mathbb{F}_4$ in modo che $\overline{0}$ sia neutro per $+$ e che $\overline{1} + \overline{1} = \alpha + \alpha = \overline{0}$. Definiamo una operazione di prodotto $\cdot$ associativo, commutativo e distributivo in modo che $\overline{1}$ sia l'unità e che $\alpha \cdot \alpha = \alpha + \overline{1}$. Verificare che $\mathbb{F}_4$ è un campo.

Definizione. Sia K un campo e consideriamo l'insieme

$$A := \{n \geq 1 \text{ intero } : \text{ la somma di 1 con se stesso } n \text{ volte è uguale a } 0\}.$$

Se $A \neq \emptyset$ e $p = \min A > 0$, allora diciamo che K ha *caratteristica* p.
Se $A = \emptyset$, diciamo che K ha *caratteristica* 0.

Esercizio 2. Dimostrare che $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}$ hanno caratteristica 0. Dimostrare che $\mathbb{Z}/p$ ha caratteristica p per ogni $p \geq 2$. Dimostrare che $\mathbb{F}_4$ ha caratteristica 2.
Dimostrare che, se K è un campo di caratteristica $p > 0$, allora p è un numero primo.

Esercizio 3. Costruire un'applicazione iniettiva $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{Q}^2$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ e siano $u, v, x, y \in V$. Dimostrare che, se $x+y = 2u$ e $x - y = 2v$, allora $x = u + v$ e $y = u - v$.

Esercizio 5. Trovare un esempio di due sottospazi vettoriali U_1, U_2 di uno spazio vettoriale V tali che la loro unione $U_1 \cup U_2$ non sia un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per ciascuna delle seguenti 5 operazioni di "somma" $\oplus$ e "prodotto per scalare" $\star$, determinare quali dei 7 assiomi di spazio vettoriale sono verificati e quali non lo sono:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (ta, b)$;
2. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b - d)$, $t \star (a, b) = (ta, tb)$;
3. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (|t|a, |t|b)$;
4. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (ta, 0)$;
5. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (2ta, 2tb)$.

Esercizio 7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$, dire quali tra i seguenti sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali:

1. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 0\}$,
2. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 1\}$,
3. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(1) = 0\}$,
4. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
5. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0)p(1) = 0\}$.

Esercizio 8. Siano U, W sottospazi dello spazio vettoriale V. Mostrare che le seguenti quattro condizioni sono equivalenti:

1. $U \subset W$
2. $U \cap W = U$
3. $U + W = W$
4. $W \cap (S + U) = (W \cap S) + U$, per ogni sottospazio vettoriale S di V.