Esercizi di algebra lineare (14 ottobre 2019)

Esercizio 1. Verificare che la lista $\mathcal{A}$ di vettori in V sia linearmente indipendente, completarla ad una base $\mathcal{B}$ di V e trovare le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$, dove

(i) $V = \mathbb{R}^4$ e $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ e $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3)$ con

$$p_1 = t^2 - 2, \quad p_2 = t^2 - t + 1, \quad p_3 = t^3 + 1, \qquad \text{e} \quad v = 2t^3 - t - 1.$$

Esercizio 2. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\{v_1, v_2\}$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$W = \left\{ w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 3c - d = a + 2b = 0 \right\}.$$

Determinare basi dei sottospazi $V \cap W$ e $V + W$ e determinarne la dimensione.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$.

(i) Siano $H_1, \dots, H_k \subset V$ sottospazi vettoriali di dimensione $n-1$. Dimostrare che $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k$ è un sottospazio vettoriale di dimensione almeno $n - k$.

(ii) Sia $W \subset V$ un sottospazio di dimensione $m < n$. Dimostrare che esistono $n - m$ sottospazi vettoriali $H_1, \dots, H_{n-m}$ di V, ciascuno di dimensione $n - 1$, tali che $W = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-m}$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale reale (ossia sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dato un vettore in $\mathbb{C}^n$ definiamo la sua parte reale come

$$\mathfrak{Re} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z_1) \\ \mathfrak{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \mathfrak{Re}(z_n) \end{pmatrix}.$$

Analogamente definiamo la parte immaginaria $\mathfrak{Im}$ di un vettore in $\mathbb{C}^n$.

(a) Dimostrare che $\mathfrak{Re}$ definisce una applicazione lineare $\mathfrak{Re} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ di spazi vettoriali reali.
Dire se tale applicazione sia iniettiva o suriettiva.
Stesse domande per l'applicazione $\mathfrak{Im} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$.

(b) Dimostrare che l'applicazione $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ definita come $\iota(v) := v$ definisce una applicazione lineare di spazi vettoriali reali. Dire inoltre se ι sia iniettiva o suriettiva.

Esercizio 5. Ogni vettore in $\mathbb{R}^n$ può essere pensato come un vettore di $\mathbb{C}^n$ con entrate reali.
Dimostrare che $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ se e solo se, pensati come elementi di $\mathbb{C}^n$, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

Esercizio 6. Siano V e W spazi vettoriali, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia inoltre $A = (v_1, \ldots, v_m)$ un insieme finito e ordinato di vettori in V.
Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se sia vera (fornendo una dimostrazione) o se sia falsa (fornendo un controesempio).

(a) Se A è un insieme (ordinato) di vettori di V linearmente indipendenti, allora $f(A) := \big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$ è un insieme (ordinato) di vettori di W linearmente indipendenti.

(b) Se A è un insieme (ordinato) di vettori di V linearmente dipendenti, allora $f(A)$ è un insieme (ordinato) di vettori di W linearmente dipendenti.

(c) Se A è un insieme (ordinato) di generatori per V, allora $f(A)$ è un insieme (ordinato) di generatori per W.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione 2 e sia (u, v) una base di V. Siano inoltre $a \in \mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un'applicazione lineare tali che $f(u) = v$ e $f(v) = u + av$.
Dimostrare che f è un isomorfismo.