Esercizi di algebra lineare (24 ottobre 2019) - Soluzione dell'es. 5

Esercizio 5. Considerare le matrici quadrate reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia $C = BA$. Dire se C sia invertibile (ossia se esista una matrice D delle stesse dimensioni di C tale che $CD = DC = I$).

Soluzione.
No, la matrice C non è invertibile.

Infatti, consideriamo le applicazioni lineari $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associate alle matrici A e B. La matrice C è 4×4 e si ha $L_C = L_{BA} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
Osserviamo che l'applicazione lineare L_A non può essere iniettiva, poiché il codominio di L_A ha dimensione minore del dominio di L_A (in effetti, il teorema della dimensione ci dice che $\ker(L_A)$ ha dimensione almeno $4 - 3 = 1$).
Asseriamo ora che $\ker(L_A) \subseteq \ker(L_B \circ L_A)$. Infatti, se $v \in \ker(L_A)$, allora $L_A(v) = 0$ e quindi $(L_B \circ L_A)(v) = L_B(L_A(v)) = L_B(0) = 0$, da cui $v \in \ker(L_B \circ L_A)$.
Dall'asserzione segue che $\ker(L_B \circ L_A) \neq \{0\}$ e quindi $L_B \circ L_A$ non è iniettiva.
Ricordiamo ora che $L_{BA} = L_B \circ L_A$, e dunque L_{BA} non è iniettiva, e in particolare L_{BA} non è invertibile.
Concludiamo quindi che $C = BA$ non è invertibile.