# Esercizi di algebra lineare (30 ottobre 2019)

**Esercizio 2.** Si consideri, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

(a) Per quali valori di $t$ la matrice $A(t)$ è invertibile?

Risoluzione.

*$A(t)$ è invertibile per tutti i $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 2$.*

*Utilizziamo il medoto di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa (se esiste) di $A(t)$.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & t & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & t & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & t & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & t & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

*da cui concludiamo che $A(t)$ è invertibile se e solo se $t \neq 2$.*

(b) Per quei valori di $t$ per i quali la matrice $A(t)$ è invertibile, determinare $A(t)^{-1}$.

Risoluzione.

*Se $t \neq 2$, l'inversa di $A(t)$ è*

$$A(t)^{-1} = \frac{1}{3(t-2)} \begin{pmatrix} -4 & -(t+2) & 2t \\ 2 & 2(t-1) & -t \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Infatti, supponiamo $t \neq 2$ e continuiamo co il metodo di Gauss-Jordan dal punto in cui lo avevamo interrotto in (a):*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-2} & \frac{1}{t-2} & -\frac{1}{t-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-2} & \frac{1}{t-2} & -\frac{1}{t-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3(t-2)} & \frac{2(t-1)}{3(t-2)} & -\frac{t}{3(t-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-2} & \frac{1}{t-2} & -\frac{1}{t-2} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3(t-2)} & -\frac{t+2}{3(t-2)} & \frac{2t}{3(t-2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3(t-2)} & \frac{2(t-1)}{3(t-2)} & -\frac{t}{3(t-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-2} & \frac{1}{t-2} & -\frac{1}{t-2} \end{array}\right)$$

*e quindi*

$$A(t)^{-1} = \frac{1}{3(t-2)} \begin{pmatrix} -4 & -(t+2) & 2t \\ 2 & 2(t-1) & -t \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Per ogni $t_0$ per cui $A(t_0)$ non è invertibile, dire se il vettore $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ o il vettore $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartengano all'immagine di $L_{A(t_0)}$.

RISOLUZIONE.

*Per $t_0 = 2$, si ha $w_1, w_2 \notin \operatorname{Im}(L_{A(2)})$.*

*Infatti, le prime due colonne di $A(t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $t$ e dunque $A(t)$ ha sempre rango almeno 2. L'unico valore per cui $A(t_0)$ non è invertibile è per $t_0 = 2$. Poiché $A(2)$ non è invertibile, ne segue che $A(2)$ ha rango minore di 3, e dunque esattamente 2. Essendo le prime due colonne $A(2)^1$, $A(2)^2$ della matrice $A(2)$ non nulle e non proporzionali, ne segue che $(A(2)^1, A(2)^2)$ è linearmente indipendente e quindi è una base di $\operatorname{Im}(L_{A(2)})$.*

*Per verificare se $w_1, w_2$ appartengano all'immagine di $L_{A(2)}$, verifichiamo se la tripla di vettori $(A(2)^1, A(2)^2, w_s)$ siano linearmente indipendenti, dove $w_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$. Mettendo i vettori per colonna in una matrice $B$, cosicché $\operatorname{Im}(L_B) = \operatorname{Span}(A(2)^1, A(2)^2, w_s)$. Notiamo che $B$ ha rango almeno due, perché le sue prime due colonne sono linearmente indipendenti. Avremo che $w_s \in \operatorname{Span}(A(2)^1, A(2)^2)$ se e solo se la matrice $B$ ha rango 2.*

*Per calcolare il rango di $B$, applichiamo la riduzione di Gauss*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & s-6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & s-5 \end{pmatrix}$$

*da cui segue che $w_s \in \operatorname{Im}(L_{A(2)})$ se e solo se $s = 5$. Quindi $w_1, w_2 \notin \operatorname{Im}(L_{A(2)})$.*