Soluzione dell'es.5(a-b-c), algebra lineare (8 novembre 2019)

Esercizio 1. Considerare i seguenti polinomi reali in t:

$$p_1 = 1 + t, \quad p_2 = 1 + 2t + t^2, \quad p_3 = t - t^2, \qquad r_1 = 1 - t, \quad r_2 = 2 + t.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e che $\mathcal{C} = (r_1, r_2)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

Soluzione.

I vettori r_1, r_2 sono non nulli e evidentemente non proporzionali, quindi $\mathcal{C}$ è linearmente indipendente. Poiché $\dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 1}) = 2$, ne segue che $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

Analogamente, poiché $\dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 2}) = 3$, per dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, è sufficiente dimostrare che (p_1, p_2, p_3) è linearmente indipendente. Siano quindi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$. Otteniamo

$$0 = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2 + a_3)t + (a_2 - a_3)t^2$$

da cui segue che

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = 0 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 & = 0 \\ a_2 - a_3 & = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $a_2 = a_3$ e dalla prima $a_1 = -a_2 = -a_3$. Sostituendo nella seconda equazione, otteniamo $-a_3 + 2a_3 + a_3 = 0$, da cui $a_3 = 0$ e quindi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Segue che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

(b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2 - t + t^2$ e di $q_2 = 3 + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.

Cerchiamo $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tali che $q_1 = b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3$. Otteniamo $2 - t + t^2 = (b_1 + b_2) + (b_1 + 2b_2 + b_3)t + (b_2 - b_3)t^2$, e quindi il sistema

$$\begin{cases} b_1 + b_2 & = 2 \\ b_1 + 2b_2 + b_3 & = -1 \\ b_2 - b_3 & = 1 \end{cases}$$

da cui $b_1 = 3$, $b_2 = -1$ e $b_3 = -2$. Segue che $\theta_{\mathcal{B}}(q_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Analogamente, cerchiamo $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tali che $q_2 = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$. Otteniamo $3 + t^2 = (c_1 + c_2) + (c_1 + 2c_2 + c_3)t + (c_2 - c_3)t^2$, e quindi il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 3 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 & = 0 \\ c_2 - c_3 & = 1 \end{cases}$$

da cui $c_1 = 4$, $c_2 = -1$ e $c_3 = -2$. Segue che $\theta_{\mathcal{B}}(q_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) Considerare l'applicazione lineare $D\colon \mathbb{K}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[t]_{\leq 1}$ definita come $D(p) := \dfrac{dp}{dt}$.
Calcolare la matrice $\theta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(D)$ che rappresenta l'applicazione lineare D rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo.

Soluzione.

Calcoliamo $D(p_1) = 1$, $D(p_2) = 2 + 2t$, $D(p_3) = 1 - 2t$, *e quindi*

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{C}}(D(p_1)) &= \theta_{\mathcal{C}}(1) \\ \theta_{\mathcal{C}}(D(p_2)) &= \theta_{\mathcal{C}}(2+2t) \\ \theta_{\mathcal{C}}(D(p_3)) &= \theta_{\mathcal{C}}(1-2t) \end{aligned}$$

Risolvendo opportuni sistemi lineari, otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_2 \\ 2+2t &= -\frac{2}{3}r_1 + \frac{4}{3}r_2 \\ 1-2t &= \frac{5}{3}r_1 - \frac{1}{3}r_2, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{C}}(D(p_1)) &= \theta_{\mathcal{C}}(1) = \theta_{\mathcal{C}}(\frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \theta_{\mathcal{C}}(D(p_2)) &= \theta_{\mathcal{C}}(2+2t) = \theta_{\mathcal{C}}(-\frac{2}{3}r_1 + \frac{4}{3}r_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ \theta_{\mathcal{C}}(D(p_3)) &= \theta_{\mathcal{C}}(1-2t) = \theta_{\mathcal{C}}(\frac{5}{3}r_1 - \frac{1}{3}r_2) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$