

Esercizi di algebra lineare (8 novembre 2019)

Definizione. Una matrice quadrata D si dice *diagonale* se $D_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esercizio 1. Sia A una matrice $n \times n$ con entrate nel campo \mathbb{K} .

- (i) Supponiamo che $AD = DA$ per ogni matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale. Dimostrare che allora A è diagonale.
- (ii) Supponiamo che $AB = BA$ per ogni matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che allora A è un multiplo di I_n .

Esercizio 2. Siano $f, g : V \rightarrow W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ e dedurre la disuguaglianza $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. Trovare un esempio dove $\text{rg}(f + g) = 2$ e $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) = 1$.

Esercizio 3. Date due applicazioni lineari $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(V)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n finita sul campo \mathbb{K} e sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare. Sia \mathcal{B} una base di V e sia $\theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ la matrice che rappresenta F rispetto alla base \mathcal{B} (sia in partenza che in arrivo).

- (a) Sia \mathcal{C} un'altra base di V e sia $\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ la matrice che rappresenta F rispetto alla base \mathcal{C} (sia in partenza che in arrivo). Dimostrare che esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = P \cdot \theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot P^{-1}$.
- (b) Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice con la proprietà che esiste $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $A = P \cdot \theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot P^{-1}$. Dimostrare che esiste una base \mathcal{C} di V tale che $A = \theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$.

Esercizio 5. Considerare i seguenti polinomi reali in t :

$$p_1 = 1 + t, \quad p_2 = 1 + 2t + t^2, \quad p_3 = t - t^2, \quad r_1 = 1 - t, \quad r_2 = 2 + t.$$

- (a) Dimostrare che $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e che $\mathcal{C} = (r_1, r_2)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.
- (b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2 - t + t^2$ e di $q_2 = 3 + t^2$ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (c) Considerare l'applicazione lineare $D : \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ definita come $D(p) := \frac{dp}{dx}$. Calcolare la matrice $\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(D)$ che rappresenta l'applicazione lineare D rispetto alle basi \mathcal{B} in partenza e \mathcal{C} in arrivo.
- (d) Verificare che il passaggio alle coordinate $\theta_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{K}^3$ manda vettori appartenenti a $\ker(D)$ in vettori appartenenti al nucleo dell'applicazione lineare associata a $\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(D)$, e che in effetti $\theta_{\mathcal{B}}$ determina un isomorfismo tra questi due nuclei.
- (e) Verificare che il passaggio alle coordinate $\theta_{\mathcal{C}} : \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{K}^2$ manda vettori appartenenti a $\text{Im}(D)$ in vettori appartenenti all'immagine dell'applicazione lineare associata a $\theta_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(D)$, e che in effetti $\theta_{\mathcal{C}}$ determina un isomorfismo tra queste due immagini.

Esercizio 6. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo \mathbb{K} e siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ sottospazi vettoriali. Denotiamo con $\text{Hom}(V, W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a W . Dimostrare che l'insieme

$$H := \{f \in \text{Hom}(V, W) \mid f(A) \subseteq B\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(V, W)$ di dimensione $[\dim(V) - \dim(A)] \dim(W) + \dim(A) \dim(B)$.

(Suggerimento: scegliere basi di A e di B ed estenderle a basi di V e di W .
Come sono fatte le matrici che rappresentano una $f \in H$ rispetto a tali basi?)