Soluzione dell'esercizio 4 - Algebra lineare (21 novembre 2019)

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, considerare la matrice $B_t \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita come

$$B_t := \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+2 & t^2+1 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$, calcolare il rango di B_t.

Soluzione.

Il rango di B_t è 2 se $t = \pm 1$, oppure 3 se $t \neq \pm 1$.

Infatti, le operazioni sulle righe e sulle colonne di B_t non modificano il rango. Operiamo quindi sottraendo alla seconda riga la prima riga, e otteniamo

$$\begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

poi alla seconda colonna e alla prima colonna sottraiamo la terza colonna, e otteniamo

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t^2-1 & 1 \\ 2t-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poi alla terza riga sottraiamo la prima riga, e otteniamo

$$B'_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t^2-1 & 1 \\ t-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le operazioni effettuate non cambiano il determinante, quindi $\det(B_t) = \det(B'_t)$. *Sviluppando* $\det(B'_t)$ *rispetto all'ultima riga, abbiamo*

$$\det(B'_t) = (t-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2-1 & 1 \end{pmatrix} = (t-1)(1-t^2) = -(t-1)^2(t+1).$$

Dunque, B'_t ha rango 3 se $t \neq \pm 1$. Inoltre

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B'_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque B'_1 e B'_{-1} hanno rango 2 (in quanto non sono invertibili e le colonne 1 e 3 di B'_1 e di B'_1 non sono proporzionali). Le stesse conclusioni quindi valgono per B_t.

(b) Per quei t per cui B_t è invertibile, calcolare la matrice dei cofattori di B_t e l'inversa di B_t.

Soluzione.

La matrice dei cofattori è calcolata rapidamente

$$\operatorname{cof}(B_t) = \begin{pmatrix} t^2-1 & 3t-2 & 2t^3+t-2 \\ 0 & 1-t & t-1 \\ 1-t^2 & -t & t^3+t^2-1 \end{pmatrix}$$

e quindi, per $t \neq \pm 1$,

$$B_t^{-1} = \frac{1}{\det(B_t)} \operatorname{cof}(B_t)^T = -\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} \begin{pmatrix} t^2-1 & 0 & 1-t^2 \\ 3t-2 & 1-t & -t \\ 2t^3+t-2 & t-1 & t^3+t^2-1 \end{pmatrix}.$$