# Esercizi di algebra lineare (21 novembre 2019)

**Esercizio 1.** Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e sia $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ la base usuale di $V$, dove $p_0 = 1$, $p_1 = t$, $p_2 = t^2$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo inoltre le applicazioni $\varphi_\alpha : V \to \mathbb{R}$ date da $\varphi_\alpha(q) = q(\alpha)$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{E}^\vee = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ è una base di $V^\vee$.

(b) Determinare la matrice di cambio di coordinate $\theta^{\mathcal{E}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(\mathrm{id})$, dove $\mathcal{B}^\vee$ è la base di $V^\vee$ duale di $\mathcal{B}$.

(c) Determinare la base $\mathcal{E}$ di $V$ la cui duale è $\mathcal{E}^\vee$.

**Esercizio 2.** Siano $a, b, c, e \in \mathbb{R}$. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & e & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 3.** I numeri 2418, 1395, 8091, 8339 sono numeri interi divisibili per 31.

Dimostrare (senza effettuare il conto esplicito) che $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ è un intero divisibile per 31.

**Esercizio 4.** Al variare di $t \in \mathbb{R}$, considerare la matrice $B_t \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita come

$$B_t := \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+2 & t^2+1 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$, calcolare il rango di $B_t$.

(b) Per quei $t$ per cui $B_t$ è invertibile, calcolare la matrice dei cofattori di $B_t$ e l'inversa di $B_t$.

**Esercizio 5.** Osservare che nel sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

il minore $2 \times 2$ della matrice dei coefficienti corrispondente alle variabili $x$ e $y$ è invertibile. Risolvere il sistema dato con il metodo di Cramer, aggiungendo al sistema l'equazione $z = \lambda$, dove $\lambda$ è un parametro.

**Esercizio 6.** (a) Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(b) Dire se esista una matrice $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$ tale che $B^2 = 2I_2$, giustificando la propria risposta. Se sì, esibirne almeno una.

(c) Dire se esista una matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$ tale che $C^2 = 2I_3$, giustificando la propria risposta. Se sì, esibirne almeno una.