

Esercizi di algebra lineare (30 novembre 2019)

Esercizio 1. Si considerino le seguenti 4 matrici a coefficienti reali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Tra le 6 possibili coppie, dire quali sono formate da matrici simili e quali no.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dedurre che per ogni $s \in \mathbb{K}$, $s \neq 0$, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili. Dimostrare che per $s = 0$ le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non sono simili.

Esercizio 3. Considerare la seguente matrice reale A

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A (ossia gli autovalori dell'applicazione lineare associata L_A).
- (ii) Dimostrare che A non è diagonalizzabile, ossia che non è simile ad alcuna matrice diagonale.

Esercizio 4. Considerare la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ seguente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Dire se il vettore $v_6 = -e_1 - e_2 + 6e_3$ sia autovettore per A .
- (ii) Dire se 2 sia autovalore di A .

Esercizio 5. Considerare l'applicazione $L_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata a

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considerare la fibra di $A_s = L_B^{-1}(w_s)$ sopra il punto $w_s = e_1 + se_2$ al variare di $s \in \mathbb{R}$.

Per quegli s per cui A_s è non vuoto, determinare la giacitura \vec{A}_s di A_s e un punto $p_s \in A_s$.

Esercizio 6 ⁽¹⁾. Siano V, W spazi vettoriali e siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ sottospazi affini. Sia inoltre $f : A \rightarrow B$ una applicazione affine.

- (i) Dimostrare che, se f è biettiva, allora $f^{-1} : B \rightarrow A$ è una applicazione affine.
- (ii) Supponiamo ora $V = A = \mathbb{K}^n$ e $W = B = \mathbb{K}^n$, e sia f data da $f(X) = PX + w$, dove $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ and $w \in \mathbb{K}^n$.
Dimostrare che f è invertibile se e solo se P è invertibile. In tal caso, determinare $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ e $v \in \mathbb{K}^n$ tali che $f^{-1}(Y) = QY + v$ per ogni $Y \in \mathbb{K}^n$.
- (iii) Supponiamo $V = A = \mathbb{K}^n$ e $W = B = \mathbb{K}^n$ e $f(X) = PX + w$ per opportuni $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ and $w \in \mathbb{K}^n$.
Supponiamo che f non abbia alcun punto fisso, ossia che $f(X) \neq X$ per ogni $X \in \mathbb{K}^n$.
Dimostrare che allora 1 è autovalore per P .

¹Questo esercizio è opzionale e non verrà corretto.