Esercizi di algebra lineare (6 dicembre 2019) - Soluzione dell'es.3

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 e sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $F(M) := A^T M A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori di F, le loro molteplicità algebriche e geometriche e i relativi autospazi. Dire se F sia diagonalizzabile.

Risposta.
L'unico autovalore di F è $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica $\mu_1 = 3$ e geometrica $m_1 = 1$.
Una base dell'autospazio $V_1(F)$ è data da $\left(E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
L'applicazione F non è diagonalizzabile.

Soluzione.
Consideriamo la base standard di V data da $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$, dove

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolo diretto abbiamo

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & a+2b+d \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(E_{11}) &= E_{11} + (E_{12} + E_{21}) + E_{22} \\ F(E_{12} + E_{21}) &= (E_{12} + E_{21}) + 2E_{22} \\ F(E_{22}) &= E_{22}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$A := \theta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi $p_F = p_A = (1-t)^3$. Dunque l'unico autovalore è $\lambda = 1$ e la sua molteplicità algebrica è $\mu_1 = 3$. Certamente F non è diagonalizzabile: se lo fosse, la matrice A dovrebbe essere simile a I_3, e quindi uguale a I_3 (cosa che non è).
L'autospazio $V_1(A) = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha come base (e_3). Poiché $\theta^{\mathcal{B}}(e_3) = E_{22}$, l'autospazio $V_1(F)$ ha base (E_{22}). Ne segue che la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è $m_1 = 1$.