Algebra lineare (16 dicembre 2019) - Soluzione dell'es.5(i-ii-iii)

Esercizio 1. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A e dire se L_A sia triangolabile.

RISPOSTA. $p_A = (1-t)^2(2-t)$ *e* L_A *è triangolabile.*

SOLUZIONE. *Calcoliamo*

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 5 & -1 \\ -1 & -1-t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = \\ -\det \begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (2-t)\det \begin{pmatrix} 3-t & 5 \\ -1 & -1-t \end{pmatrix} = \\ = -\left[(3-t)-1\right] + (2-t)\left[(3-t)(-1-t)+5\right] = \\ = -(2-t) + (2-t)\left[t^2-2t+2\right] = (2-t)(1-t)^2. \end{aligned}$$

Essendo p_A *completamente fattorizzabile, concludiamo che* L_A *è triangolabile.*

(ii) Determinare gli autovalori di L_A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se L_A sia diagonalizzabile.

RISPOSTA. *Gli autovalori di* L_A *sono* $\lambda_1 = 1$ *e* λ_2, *con molteplicità algebriche* $\mu_1 = 2$ *e* $\mu_2 = 1$ *e molteplicità geometriche* $m_1 = 1$ *e* $m_2 = 1$. *L'applicazione* L_A *non è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE. *Gli autovalori di* L_A *sono le radici di* p_A *e quindi sono* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$. *Le molteplicità algebriche si leggono dal polinomio caratteristico* $p_A = (1-t)^{\mu_1}(2-t)^{\mu_2}$ *e quindi* $\mu_1 = 2$ *e* $\mu_2 = 1$. *Ne segue che le molteplicità geometriche soddisfano* $1 \leq m_1 \leq 2$ *e* $m_2 = 1$. *Per determinare esattamente* $m_1 = \dim V_1 = \dim \ker(A - I_3)$, *calcoliamo il rango di* $A - I_3$, *che potrà essere* 1 *oppure* 2.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché le prime due colonne di $A - I_3$ *sono non nulle e non proporzionali, ne segue che il rango di* $A - I_3$ *è almeno* 2, *e quindi esattamente* 2. *Da cui* $m_1 = 1$. *Poiché la somma* $m_1 + m_2 = 2$ *delle molteplicità geometriche è strettamente minore di* $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, *ne segue che* L_A *non è diagonalizzabile.*

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A.

RISPOSTA. *Il polinomio minimo di* L_A *è* $q_A = (t-1)^2(t-2)$.

SOLUZIONE. *Il polinomio minimo* q_A *di* L_A *deve essere monico, dividere* $p_A = (1-t)^2(t-2)$ *e contenere tutti i fattori irriducibili di* p_A. *Le uniche due possibilità sarebbero* $(t-1)(t-2)$ *oppure* $(t-1)^2(t-2)$. *Tuttavia, se fosse* $q_A = (t-1)(t-2)$, *l'applicazione* L_A *sarebbe diagonalizzabile. Visto che abbiamo dimostrato in (ii) che* L_A *non è diagonalizzabile, resta come unica possibilità* $q_A = (t-1)^2(t-2)$.