

## Tutoraggio del 28 novembre 2019

**Esercizio 1.** Dire quali delle seguenti applicazioni siano lineari, e in caso scriverne le matrici associate:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ y \\ x + 5y \end{pmatrix}$ ;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 1)^2 - x^2 - 1$ ;
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$ ;
- $f : \mathbb{Z}/(5) \rightarrow \mathbb{Z}/(5)$ ,  $f(x) = x^5$ .

Dire inoltre come sono fatte tutte le applicazioni lineari  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Dire quali delle seguenti applicazioni (non lineari!) siano iniettive e/o suriettive:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ ;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x$ ;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x$ ;
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2 \bar{z}$ .

**Esercizio 3.** Decidere quali dei seguenti sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{\times 2}$ , motivando la risposta.

- Il semipiano  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$ ;
- il quadrante  $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ ;
- la bisettrice del primo e terzo quadrante  $\{(x, y) \mid x = y\}$ ;
- l'insieme dei punti  $(x, y)$  le cui coordinate soddisfano  $xy \geq 0$ ;
- l'insieme dei punti  $(x, y)$  le cui coordinate soddisfano  $x^2 + y^2 \geq 0$ .

**Esercizio 4.** Mostrare, per induzione su  $n$ , che

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$