Tutoraggio del 5 dicembre 2019

Esercizio 1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi S di V lo generino e/o siano linearmente indipendenti:

- $V = \mathbb{R}^3, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$
- $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\};$
- $V = \mathbb{R}, \quad S = \{1,\ 3,\ 5\}.$

Esercizio 2. Calcolare la dimensione dei seguenti spazi vettoriali:

- $\mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid M = M^T\}$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid M = -M^T\}$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid M \cdot e_1 \in \mathrm{Span}(e_1)\}$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid M = 2M^T\}$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid \text{Traccia}(M) = 0\}$;
- $\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid \text{ la diagonale principale di } M \text{ è nulla }\}$.

Esercizio 3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$