Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Prova scritta in itinere (6 novembre 2018)

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7.5	
2	7.5	
3	7.5	
4	7.5	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. (a) Esprimere in forma cartesiana, ovvero nella forma $x + iy$, le due radici quadrate del numero complesso $4 + 2i$.

(b) Esprimere il numero complesso $w = -\sqrt{3}+i$ in forma polare (o trigonometrica), ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ o, equivalentemente, $\rho e^{i\theta}$.

(c) Siano $z_1, \dots, z_7$ le soluzioni dell'equazione $z^7 = -\sqrt{3} + i$.
Quante di esse hanno parte reale strettamente positiva? Esprimerle in forma trigonometrica.

Risoluzione:

(a) Se indichiamo con $a + ib$ una delle radici quadrate cercate, allora l'equazione

$$(a + ib)^2 = 4 + 2i$$

ci dà

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

Da qui ricaviamo immediatamente $b = a^{-1}$ (notiamo che la seconda equazione ci dice che sicuramente $a \neq 0$) e dunque la prima equazione diventa

$$a^4 - 4a^2 - 1 = 0.$$

Ponendo $c = a^2$ troviamo $c^2 - 4c - 1 = 0$, da cui $c = 2 + \sqrt{5}$ oppure $c = 2 - \sqrt{5}$. Con la prima soluzione troviamo $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ oppure $a = -(\sqrt{2+\sqrt{5}})$. Le b corrispondenti si trovano semplicemnte calcolando gli inversi: per $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ troviamo

$$b = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}} = \sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Dunque una delle due radici quadrate di $4 + 2i$ è $(\sqrt{2+\sqrt{5}}) + i(\sqrt{\sqrt{5}-2})$. L'altra è, come dev'essere, l'opposto di questa.

Alternativamente, possiamo scrivere $4+2i$ in forma polare. Si trova $4+2i = 2\sqrt{5}\, e^{i\operatorname{arctg}(1/2)}$ dunque le sue radici quadrate sono

$$\sqrt{2\sqrt{5}}\, e^{i\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}}; \qquad -\sqrt{2\sqrt{5}}\, e^{i\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}}$$

In forma cartesiana le due radici sono quindi

$$\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}\right)\right); \qquad -\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{2}\right)\right).$$

Volendo, si può ricordare che per $t \geq 0$ vale

$$\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

e dunque le due radici in forma cartesiana si possono scrivere più esplicitamente come

$$(\sqrt{5}+2) + i(\sqrt{5}-2); \qquad -(\sqrt{5}+2) - i(\sqrt{5}-2)$$

che sono proprio quelle trovate col primo metodo.

(b) Si ha

$$w = \sqrt{((\sqrt{3})^2 + 1^2}\ e^{i(\operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3}) + \pi} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

c) Abbiamo visto al punto b) che in forma trigonometrica il numero complesso $-\sqrt{3}+i$ *si scrive come* $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. *Le sue radici settime sono pertanto*

$$2^{\frac{1}{7}} e^{i(\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7})}; \qquad k = 0, 1, \ldots, 6$$

Quelle con parte reale positiva sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}\right) > 0$$

ovvero

$$\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2h\pi$$

per qualche $j \in \mathbb{Z}$. *Dividendo per* π *e moltiplicando per 42 questa condizione diventa*

$$5 + 12k \in \ldots (-105, -63) \cup (-21, 21) \cup (63, 105) \cup \ldots$$

e si vede subito che dei sette numeri interi della forma $5 + 12k$ *che si ottengono al variare di* k *in* $\{0, 1, , \ldots, 6\}$*, ovvero*

$$5, 17, 29, 41, 53, 65, 77$$

solo $5, 17, 65, 77$ *soddisfano questa condizione.*

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t a coefficienti reali.
Diremo che un polinomio $p \in \mathbb{R}[t]$ ha almeno una radice intera se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $p(n) = 0$.
Quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[t]$?
(Giustificare la propria risposta con una dimostrazione oppure un controesempio.)

(a) $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : \; p(2)^2 + p(3)^2 = 0\}$.

(b) $W = \{p \in \mathbb{R}[t] : \; p \text{ ha almeno una radice intera}\}$.

(c) $Z = \{p \in \mathbb{R}[t] : \; |p(1)| \geq |p(0)|\}$.

Risoluzione:

(a) Dato che siamo sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, l'equazione $p(2)^2 + p(3)^2 = 0$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} p(2) = 0 \\ p(3) = 0 \end{cases}$$

Una volta fatta questa osservazione è immediato verificare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}[t]$. Infatti, se $p, q \in V$ si ha

$$(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0; \qquad (p+q)(3) = p(3) + q(3) = 0 + 0 = 0,$$

quindi $p + q \in V$. Similmente, se $p \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda p)(2) = \lambda\, p(2) = \lambda \cdot 0 = 0; (\lambda p)(3) = \lambda\, p(3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

quindi $\lambda p \in V$.
Alternativamente si può invocare il fatto, visto più volte a lezione, che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}[t] &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare e osservare che $V = \ker(\varphi)$.

(b) Il sottoinsieme W non è un sottospazio. Ad esempio il polinomo $p(t) = t$ ed il polinomio $q(t) = t-1$ appartengono a W, ma la loro somma è $p(t) + q(t) = 2t - 1$, che non ha alcuna radice intera.

(c) Il sottoinsieme Z non è un sottospazio. Ad esempio il polinomo $p(t) = t + 1$ ed il polinomio $q(t) = -3t + 1$ appartengono a W, ma la loro somma è $p(t) + q(t) = -2t + 2$, che non appartiene a Z.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{Q}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ dei polinomi nella variabile t di grado minore o uguale a 3. Si considerino i due sottospazi U e W di V definiti da

$$U = \{p(t) \in V : \ p(1) = 0\};$$

$$W = \{p(t) \in V : \ p(t) = p(-t)\}.$$

(a) Sia $\mathcal{S}_1 = \{t-1, \ t^3 - t^2, \ t^3 - 2t + 1\} \subseteq V$. Verificare che $\mathcal{S}_1 \subseteq U$. È possibile estrarre da $\mathcal{S}_1$ una base di U? (Se sì, estrarre una tale base; altrimenti dimostrare che ciò non è possibile).

(b) Sia $\mathcal{S}_2 = \{1 + t^2, \ 1 + 2t^2, \ 2 + 3t^2\} \subseteq V$. Verificare che $\mathcal{S}_2 \subseteq W$. È possibile estrarre da $\mathcal{S}_2$ una base di W? (Se sì, estrarre una tale base; altrimenti dimostrare che ciò non è possibile).

(c) Determinare le dimensioni dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$ di V.

(d) Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

Risoluzione:

(a) Per ogni polinomio $p(t) \in \mathcal{S}_1$ vale $p(1) = 0$, dunque $\mathcal{S}_1 \subseteq U$. Estraiamo da $\mathcal{S}_1$ un sistema di vettori indipendenti usando le coordinate rispetto alla base standard $\{1, t, t^2, t^3\}$ di V e l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi i tre vettori di $\mathcal{S}_1$ sono linearmente indipendenti. Calcoliamo ora la dimensione di U. L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi \colon V &\to \mathbb{Q} \\ p &\mapsto p(1) \end{aligned}$$

ha nucleo U ed è suriettiva (basta osservare cosa fa φ alle costanti), dunque ha rango 1. Per il teorema del rango abbiamo quindi

$$\dim U = \dim V - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Dunque $\mathcal{S}_1$ è una base di U (e in particolare si può estrarre da $\mathcal{S}_1$ una base di U, semplicemente prendendo tutto $\mathcal{S}_1$).

(b) Per ogni polinomio $p(t) \in \mathcal{S}_2$ vale $p(t) = p(-t)$, dunque $\mathcal{S}_2 \subseteq W$. Estraiamo da $\mathcal{S}_2$ un sistema di vettori indipendenti usando le coordinate rispetto alla base standard $\{1, t, t^2, t^3\}$ di V e l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il terzo vettore si può scartare, ed un sistema massimale di vettori indipendenti estratto da $\mathcal{S}_2$ è $\{1 + t^2, 1 + 2t^2\}$. In particoalre $(1 + t^2, 1 + 2t^2)$ è una base di $\mathrm{span}(\mathcal{S}_2)$. Calcoliamo ora la dimensione di W. L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \psi \colon V &\to V \\ p &\mapsto p(t) - p(-t) \end{aligned}$$

ha nucleo W. Calcoliamo il rango di ψ rappresentando ψ come matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di V (in partenza e in arrivo). Si vede immediatamente che

$$\psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $\mathrm{rg}(\psi) = 2$. *Dunque, per il teorema del rango,*

$$\dim W = \dim V - 2 = 4 - 2 = 2.$$

In particolare $(1 + t^2, 1 + 2t^2)$ *sarà una base di W estratta da $\mathcal{S}_2$.*

(c) *L'intersezione $U \cap W$ è il nucleo dell'applicazione lineare*

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : V \to \mathbb{Q} \oplus V$$
$$p \mapsto \begin{pmatrix} p(1) \\ p(t) - p(-t) \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta quest'applicazione lineare rispetto alla base canonica di V in partenza e alla base $\{1\}$ di $\mathbb{Q}$ insieme alla base canonica di V in arrivo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che si vede immediatamente avere rango 3. Per il teorema del rango si ha allora

$$\dim(U \cap W) = 4 - 3 = 1.$$

Dalla formula di Grassmann ricaviamo quindi

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Alternativamente si possono mettere insieme i vettori delle basi di U e di W trovati nei punti (a) e (b) ed estrarne una base di $U + W$, che si vedrà avere cardinalità 4, e ricavare quindi dalla formula di Grassmann che $\dim(U \cap W) = 1$.

(d) *Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo rappresentato in forma matriciale da*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Mediante l'algoritmo di Gauss si trova immediatamente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{cases} a_0 = -\alpha \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \alpha \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo scritto $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ *per il generico elemento* p *di* V *(in altre parole* (a_0, a_1, a_2, a_3) *sono le coordinate rispetto alla base canonica di* V*). Una base di* $U \cap W$ *è data quindi dal vettore di coordinate*

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero dal polinomio $t^2 - 1$.

Esercizio 4. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ovvero l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa sia come base di partenza che di arrivo). Siano U e W i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ definiti da

$$U = \operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}, \qquad \text{con} \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$W = \operatorname{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}, \qquad \text{con} \qquad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ è una base di U e che $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ è una base di W.

(b) Dimostrare che $L_A(U) \subseteq W$ e quindi la restrizione $L_A\big|_U^W$ di L_A al sottospazio U in partenza e W in arrivo definisce una applicazione $f := L_A\big|_U^W : U \to W$.

(c) Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $f : U \to W$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ come base di partenza e $\mathcal{C}$ come base di arrivo.

Risoluzione:

(a) Per definizione $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ è un sistema di generatori di U. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base basta quindi mostrare che questi due vettori sono linearmente indipendenti, il che è immediato mediante l'algoritmo di Gauss. Analogamente si dimostra che $\mathcal{C}$ è una base di W.

(b) Dato che L_A è lineare e $\mathcal{B}$ è una base di U, per mostrare che $L_A(U) \subseteq W$ basta mostrare che $L_A(\mathcal{B}) \subseteq W$, ovvero che i due vettori $L_A(\vec{u}_1)$ e $L_A(\vec{u}_2)$ si possono scrivere come combinazioni lineari di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$. Calcoliamo $L_A(\vec{u}_1)$ e $L_A(\vec{u}_2)$ ed usiamo l'algoritmo di Gauss. Si ha:

$$L_A(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L_A(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi sia $L_A(\vec{u}_1)$ che $L_A(\vec{u}_2)$ si possono scrivere come combinazioni lineari di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$.

(c) Dobbiamo esprimere $L_A(\vec{u}_1)$ che $L_A(\vec{u}_2)$ come combinazioni lineari di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$. Dalla soluzione del punto (b), più precisamente dalla matrice ridotta a scala, sappiamo che qeuste combinazioni lineari sono

$$L_A(\vec{u}_1) = w_1 + w_2; \qquad L_A(\vec{u}_2) = w_1 - w_2,$$

come è anche immediato verificare direttamente. La matrice cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$