Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Prova scritta - 5 febbraio 2019

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. (i) Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$z^5 = 4i\,\bar{z}^2.$$

Quali tra essi si trovano a distanza al più 1 da $i \in \mathbb{C}$?

(ii) Calcolare $\mathrm{MCD}(p_1, p_2)$ dei polinomi

$$p_1 = x^4 + x^3 + x^2 - 2, \qquad p_2 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$$

in x a coefficienti razionali.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Per ogni $A \in V$ indichiamo con $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la corrispondente applicazione lineare. Infine, indichiamo con $\mathbf{0}$ il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di V:

$$W_1 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \ker L_A = \{\mathbf{0}\} \right\}, \quad W_2 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \ker L_A \neq \{\mathbf{0}\} \right\}, \quad W_3 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker L_A \right\}.$$

(i) Determinare se ciascun W_i sia un sottospazio vettoriale di V.

(ii) Determinare una base di quei W_i che sono sottospazi vettoriali di V.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'unico endomorfismo tale che

$$\tau(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \text{se } j = 1, \dots, n-1 \\ e_1 & \text{se } j = n. \end{cases}$$

(i) Dire per quali $n \geq 1$ l'endomorfismo τ sia diagonalizzabile.

(ii) Determinare il polinomio caratteristico di τ per ogni $n \geq 1$.

(iii) Determinare il polinomio minimo di τ per $n = 2, 3, 4$.

(iv) Determinare il polinomio minimo di τ per $n \geq 1$ qualunque (motivando la risposta).

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli autovalori di A, le loro molteplicità algebriche, il polinomio caratteristico p_A e dire se A sia triangolabile.

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e dire se A sia diagonalizzabile.

(iii) Calcolare il polinomio minimo di A e determinare la forma di Jordan di A.

(iv) Determinare una base di Jordan per A.

Risoluzione: