Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Prova scritta - 16 luglio 2019

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. (i) Determinare i numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z^2 + 2z + 2 = 0$. Inoltre, dire se i tre punti $z_0 = 2i$, z_1, z_2 del piano di Gauss siano i vertici di un triangolo acutangolo.

(ii) Sia $p \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio non costante, sia $p' = dp/dt$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$.
Dimostrare che α è una radice di p di molteplicità almeno 2 $\iff$ α è una radice di $\mathrm{MCD}(p, p')$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Si considerino i seguenti insiemi:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-3)^2 > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$V = \left\{ p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \mid p(1)^3 + p(-1)^3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 4}.$$

dove $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più 4.

(i) Determinare se W sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Se sì, calcolarne una base.

(ii) Determinare se V sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$. Se sì, calcolarne una base.

Risoluzione:

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ delle matrici 7×7 reali e sia $N \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ una matrice fissata tale che $N^5 = 0$. Considerare inoltre l'applicazione $F : \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ definita come

$$F(X) := N \cdot X \cdot N.$$

(i) Dimostrare che F è lineare e nilpotente.

(ii) Dimostrare che il polinomio minimo di F ha grado al più 5.

(iii) Supponiamo che $N^4 \neq 0$. Determinare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di F.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più 3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

e sia $V \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ il sottospazio $V = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \mid p(1) = 0\}$.

(i) Dire se f sia suriettiva.

(ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice che rappresenta $f|_V : V \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ in arrivo.

(iii) Determinare una base del nucleo di $f|_V$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $f|_V$.

Risoluzione: