Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

Prova scritta - 4 settembre 2019

Nome: ______________________________________

Cognome: ____________________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-L (Fiorenza-De Concini)* *M-Z (Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $iz^7 = |z|^7 + a$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale reale di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, sia $f_\theta \in \mathcal{F}$ la funzione definita come $f_\theta(x) := \operatorname{sen}(x+\theta)$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{S} = \{f_\theta \in \mathcal{F} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

(i) L'insieme $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{F}$?

(ii) L'insieme $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{F}$?

(iii) Detto V il sottospazio di $\mathcal{F}$ generato da $\mathcal{S}$, qual è la dimensione di V?

(iv) Estrarre da $\mathcal{S}$ una base di V.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $\rho : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare che manda una matrice 3×3 reale nella sua "ruotata" di $90°$ in senso antiorario, ossia

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli autovalori (reali) di ρ e determinare basi per i rispettivi autospazi.

(ii) Dire se ρ sia diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(iii) Calcolare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di ρ.

Risoluzione:

Esercizio 4. Al variare dei parametri $a, k \in \mathbb{R}$, considerare il sistema lineare

$$(\star) \quad \begin{cases} 3y + (5k+1)z = a - k \\ -3x - (6k+6)y = -3 \\ 2x + (5+4k)y + 2kz = 2 \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(i) Al variare di $a, k \in \mathbb{R}$, determinare se il sistema lineare $(\star)$ abbia un'unica soluzione, infinite soluzioni oppure nessuna soluzione.

(ii) Per quei valori di a, k per cui $(\star)$ ha infinite soluzioni, dare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni.

(iii) Dire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia soluzione del sistema $(\star)$ per qualche valore di $a, k \in \mathbb{R}$.

Risoluzione: