Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Soluzioni della prova scritta del 24 giugno 2019

Esercizio 1. (i) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z^2 - z = |z|$.

Risposta

Le soluzioni sono $z = 0$ e $z = 2$.

Risoluzione

Osserviamo che $z = 0$ è una soluzione dell'equazione. Per trovare le altre soluzioni, supponiamo ora quindi $z \neq 0$.

Scrivendoz come $z = ru$ con $r = |z| > 0$ e $u = \frac{z}{|z|}$ (che quindi soddisfa $|u| = 1$), l'equazione diventa $r^2u^2 - ru = r$. Dividendo ambo i membri per r, otteniamo $ru^2 - u - 1 = 0$, ossia

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4r}}{2r}.$$

Poiché $1 + 4r$ è reale positivo, concludiamo che u debba essere reale, e quindi anche z, ossia $z = x + 0i$. L'equazione diventa quindi $x^2 - x = |x|$ nella variabile $x \neq 0$ reale.

Supponendo $x > 0$, otteniamo $x^2 - 2x = 0$, con unica soluzione ammissibile $x = 2$.
Supponendo $x < 0$, otteniamo $x^2 = 0$, che non ha soluzioni ammissibili.

Concludiamo che le uniche due soluzioni sono $z = 0$ oppure $z = 2$.

Alternativamente, scrivendo $u = e^{i\theta}$, da $ru^2 - u - 1 = 0$ si ricava

$$r = e^{-2i\theta}(1 + e^{i\theta}) = e^{-\frac{3}{2}i\theta}(e^{-\frac{1}{2}i\theta} + e^{\frac{1}{2}i\theta}) = 2\,\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{2}i\theta})\, e^{-\frac{3}{2}i\theta}$$

e dunque

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\theta = 2k\pi \\ r = 2\,\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{2}i\theta}) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \theta = -\frac{4}{3}k\pi \\ r = 2\,\mathrm{Re}(e^{\frac{2}{3}k\pi i}) \end{cases}$$

Il valore di $\theta \mod 2\pi$ e di r non varia se sommiamo a k un multiplo di 3, per cui dobbiamo calcolare solo i casi $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$. Per $k = 0$ troviamo $\theta = 0$ e $r = 2$, per cui $z = 2$. Per $k = 1$ e per $k = 2$ troviamo $r < 0$ e dunque questi valori non possono essere accettati.

(ii) Siano $p_1 = t^4 - 7t^3 - 2t^2 + 12t + 14$ e $p_2 = t^3 - 6t^2 - 8t + 7$ polinomi reali in t.
Dire se p_1, p_2 abbiano una radice reale in comune.

Risposta

I polinomi p_1 e p_2 hanno in comune la radice reale $t = 7$.

Risoluzione

Infatti, p_1, p_2 hanno in comune la radice $\lambda \in \mathbb{R}$ se e solo se sono entrambi divisibili per $t - \lambda$, ossia se e solo se il loro massimo comun divisore ha anch'esso λ come radice. Per calcolare $MCD(p_1, p_2)$ usiamo l'algoritmo di Euclide. Calcoliamo $p_1 = (t-1)p_2 + r$ con $r = -3t + 21 = -3(t-7)$. Inotre, $p_2 = \left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}\right) r$ e dunque $MCD(p_1, p_2) = t - 7$. Ne segue che p_1, p_2 hanno in comune la sola radice 7.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale reale delle successioni $(x_n)_{n\geq 1}$ di numeri reali. Si considerino i seguenti sottoinsiemi W_1, W_2 di $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ ha minimo assoluto o massimo assoluto per } n = 1\} = \\ &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid (x_1 \leq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}) \quad \text{oppure} \quad (x_1 \geq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N})\} \\ W_2 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ è limitata}\} = \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(i) Per ciascun $i = 1, 2$, determinare se W_i sia un sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$.

RISPOSTA

W_1 non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$. Invece W_2 è un sottospazio vettoriale.

RISOLUZIONE

Infatti, nel primo caso le successioni $(2, 1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ e $(-2, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ appartengono a W_1, mentre la loro somma $(0, 1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ non appartiene a W_1.

Nel secondo caso, notiamo che

- *la successione nulla (elemento neutro di $\mathcal{S}$) è limitata (basta prendere $K = 1$);*
- *sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e supponiamo $(x_n) \in W_2$, e quindi esiste $K > 0$ tale che (x_n) soddisfi $|x_n| < K$ per ogni n; allora la successione $\lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n)$ è anch'essa limitata, in quanto soddisfa $|\lambda x_n| < \hat{K}$ con $\hat{K} := |\lambda| K$ per ogni n. E dunque $\lambda(x_n) \in W_2$;*
- *supponiamo $(x_n), (y_n) \in W_2$, e quindi esistono $K, K' > 0$ tali che $|x_n| < K$ e $|y_n| < K'$ per ogni n; allora la somma $(x_n + y_n) \in \mathcal{S}$ soddisfa $|x_n + y_n| < |x_n| + |y_n| < K''$ con $K'' := K + K'$ per ogni n e quindi $(x_n + y_n) \in W_2$.*

(ii) Per ciascun W_i che sia un sottospazio di $\mathcal{S}$, dire se W_i abbia dimensione finita.

RISPOSTA

Il sottospazio W_2 non ha dimensione finita.

RISOLUZIONE

Per dimostrarlo, esibiremo per ogni $k \geq 1$ un sottoinsieme $A_k \subset W_2$ di k vettori linearmente indipendenti.

Procediamo nel modo seguente. Per ogni $k \geq 1$ intero, sia $x^{(k)} \in W_2$ la successione $x^{(k)} = (x_n^{(k)})$ tale che

$$x_n^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$

Definiamo $A_k := \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$.

Per verificare l'indipendenza lineare di A_k, siano $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \cdots + a_k x^{(k)} = 0 \in W_2.$$

La successione $a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \cdots + a_k x^{(k)}$ è però $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Essendo tale successione uguale alla successione nulla, allora $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 reali e l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definita come $F(X) := Z \cdot X$, dove $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare il polinomio minimo dell'applicazione F e dire se F sia diagonalizzabile.

Risposta

Il polinomio minimo di F è $q_F = t^2 - 2$. L'applicazione F è diagonalizzabile.

Risoluzione

Notiamo che $Z^2 = 2I$, e quindi $F^2(X) = (F \circ F)(X) = 2\,X$ per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Posto $q = t^2 - 2 \in \mathbb{R}[t]$, ne segue che $q(F) = 0$. Dunque il polinomio minimo q_F di F divide q.

D'altra parte, se q_F avesse grado 1, allora F dovrebbe essere un multiplo dell'identità, e in particolare $F(I) = ZI = Z$ dovrebbe essere un multiplo di $I \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Poiché Z non è un multiplo di I, il polinomio q_F ha grado almeno 2, e quindi $q_F = q$.

Poiché $q_F = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$ si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$, ne segue che F è diagonalizzabile.

(ii) Calcolare gli autovalori di F e determinare basi per gli autospazi di F.

Risposta

Gli autovalori sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.
Basi degli autospazi $E_{\sqrt{2}}(F)$ e $E_{-\sqrt{2}}(F)$ sono $\mathcal{B} = \{A, B\}$ e $\mathcal{B}' = \{A', B'\}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \; B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Risoluzione

Infatti, gli autovalori sono le radici del polinomio minimo. Poiché $q_F = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$, gli autovalori di F sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Se $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, abbiamo $Z \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi

$$E_\lambda(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \right\}$$

Determinando prima gli autovalori con $b = d = 0$ e poi quelli con $a = c = 0$, si ottiene rapidamente

$$E_{\sqrt{2}}(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ a\sqrt{2} & b\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}(A, B)$$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Similmente, otteniamo

$$E_{-\sqrt{2}}(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -a'\sqrt{2} & -b'\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a', b' \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}(A', B')$$

con $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(iii) Determinare il polinomio caratteristico di F.

Risposta

Il polinomio caratteristico di F è $p_F = (t^2 - 2)^2$.

Risoluzione

Infatti, dal punto precedente abbiamo che entrambi gli autovalori $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ hanno molteplicità geometrica 2, e quindi algebrica 2 (essendo F diagonalizzabile). Ne segue che $p_F = (t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2 = (t^2-2)^2$.

Esercizio 4. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori (e le loro molteplicità algebriche) di A e di B.

RISPOSTA

I polinomi caratteristici sono $p_A = p_B = (1-t)^2(2-t)$. *Dunque sia* A *che* B *hanno autovalori* 1 *e* 2 *con molteplicità algebriche* $m_1 = 2$ *e* $m_2 = 1$.

RISOLUZIONE

Il calcolo di p_A *è immediato, essendo* A *triangolare superiore. Il calcolo di* p_B *è molto semplice se si sviluppa* $\det(B - tI)$ *rispetto alla terza colonna.*

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e di B.

RISPOSTA

Per A, *l'autospazio* $E_1(A)$ *ha dimensione* 2 *(e coincide con l'autospazio generalizzato* $\widetilde{E}_1(A)$*) e l'autospazio* $E_2(A)$ *ha dimensione* 1 *(e coincide con l'autospazio generalizzato* $\widetilde{E}_2(A)$*).*
Per B, *l'autospazio* $E_1(B)$ *ha dimensione* 1 *(mentre l'autospazio generalizzato* $\widetilde{E}_1(B)$ *ha dimensione* 2*) e l'autospazio* $E_2(B)$ *ha dimensione* 1 *(e coincide con l'autospazio generalizzato* $\widetilde{E}_2(B)$*).*

RISOLUZIONE

Dal punto precedente, abbiamo $m_1 = 2$ *e* $m_2 = 1$ *sia per* A *che per* B. *Dunque gli autospazi generalizzati* $\widetilde{E}_1(A)$ *e* $\widetilde{E}_1(B)$ *hanno dimensione* $m_1 = 2$ *e gli autospazi generalizzati* $\widetilde{E}_2(A)$ *e* $\widetilde{E}_2(B)$ *hanno dimensione* $m_2 = 1$.

Da un calcolo diretto si ha $E_1(A) = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ *e* $E_1(B) = \operatorname{span}(e_3)$. *Dunque* $\dim(E_1(A)) = 2$ *e* $\dim(E_1(B)) = 1$.

Inoltre, $E_2(A) = \operatorname{span}(e_1+e_2+e_3)$ *e* $E_2(B) = \operatorname{span}(e_1+e_2)$. *Dunque* $\dim(E_1(A)) = \dim(E_1(B)) = 1$.

(iii) Determinare la forma di Jordan e il polinomio minimo di A e di B, e dire se le matrici A e B siano simili.

RISPOSTA

Le due matrici A *e* B *non sono simili. I polinomi minimi sono* $q_A = (t-1)(t-2)$ *e* $q_B = (t-1)^2(t-2)$. *Le forme di Jordan* J_A *di* A *e* J_B *di* B *sono*

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad J_B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

RISOLUZIONE

Infatti, A *è diagonalizzabile. Invece* B *non lo è, perché le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore* 1 *non coincidono. Dunque* A *e* B *non sono simili.*

Essendo A *diagonalizzabile, il suo polinomio minimo è* $q_A = (t-1)(t-2)$. *Il polinomio minimo di* B *divide* $p_B = (1-t)^2(2-t)$, *contiene entrambe le radici di* p_B, *e non può essere del tipo* $(t-1)(t-2)$ *perché* B *non è diagonalizzabile. Ne segue che* $q_B = (t-1)^2(t-2)$.

La forma di Jordan J_A *di* A *è chiaramente diagonale. Invece la forma di Jordan* J_B *di* B *è l'unica possibile per una matrice* 3×3 *non diagonalizzabile con* $p_B = (1-t)^2(2-t)$.