Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Soluzioni della prova scritta del 16 luglio 2019

Esercizio 1. (i) Determinare i numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z^2 + 2z + 2 = 0$. Inoltre, dire se i tre punti $z_0 = 2i$, z_1, z_2 del piano di Gauss siano i vertici di un triangolo acutangolo.

Risposta

$z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$. Inoltre z_0, z_1, z_2 non sono vertici di un triangolo acutangolo.

Risoluzione

Le soluzioni di $z^2 + 2z + 2 = 0$ sono date da $z = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$. Prendiamo quindi $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1 - i$.

Inoltre, $\mathrm{Re}\left(\frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{-2i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-1+i}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$. Dunque i lati $\overline{z_1 z_0}$ e $\overline{z_1 z_2}$ formano un angolo ottuso, e quindi il triangolo con vertici z_0, z_1, z_2 non è acutangolo.

(ii) Sia $p \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio non costante, sia $p' = dp/dt$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$.
Dimostrare che α è una radice di p di molteplicità almeno 2 $\iff$ α è una radice di $\mathrm{MCD}(p, p')$.

Risoluzione

Divendo p per il polinomio $t - \alpha$, possiamo scrivere $p = (t-\alpha)q + \beta$ con $\beta \in \mathbb{C}$ e $q \in \mathbb{C}[t]$. Inoltre, $p' = q + (t-\alpha)q'$. Osserviamo che $p(\alpha) = 0 \iff \beta = 0$, e che $p'(\alpha) = 0 \iff q(\alpha) = 0 \iff$ $(t-\alpha)$ divide $q \iff q = (t-\alpha)r$ per un qualche $r \in \mathbb{C}[t]$.

Dunque α è radice di $\mathrm{MCD}(p,p') \iff (t-\alpha)$ divide $\mathrm{MCD}(p,p') \iff (t-\alpha)$ divide sia p sia p' $\iff p(\alpha) = p'(\alpha) = 0 \iff (\beta = 0$ e $q = (t-\alpha)r) \iff p = (t-\alpha)^2 r \iff \alpha$ è radice di p con molteplicità almeno 2.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti insiemi:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-3)^2 > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$V = \left\{ p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \mid p(1)^3 + p(-1)^3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 4}.$$

dove $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più 4.

(i) Determinare se W sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Se sì, calcolarne una base.

Risposta

W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione

Il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, in quanto $(1-1)^2 + (0-3)^2 = 9 > 0$. Analogamente, il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a W, in quanto $(0-1)^2 + (3-3)^2 = 1 > 0$. Tuttavia, $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ che non appartiene a W, in quanto $(1-1)^2 + (3-3)^2 = 0$. Ne segue che W non è chiuso per la somma, e quindi non è un sottospazio vettoriale.

(ii) Determinare se V sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$. Se sì, calcolarne una base.

Risposta

V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ e una sua base è $\{t,\, t^2-1,\, t^3,\, t^4-1\}$.

Risoluzione

Notiamo che due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ soddisfano $a^3+b^3=0$ se e solo se $a+b=0$.

Poiché p è un polinomio a coefficienti reali, si ha $p(1), p(-1) \in \mathbb{R}$. Ne segue che $p(1)^3+p(-1)^3=0$ se e solo se $p(1)+p(-1)=0$. Dunque $V=\{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \,|\, p(1)+p(-1)=0\}$. Abbiamo visto che le applicazioni di valutazione $\mathrm{ev}_1 : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}$ definita come $\mathrm{ev}_1(p) := p(1)$ e $\mathrm{ev}_{-1} : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}$ definita come $\mathrm{ev}_1(p) := p(-1)$ sono lineari. E dunque la loro somma $(\mathrm{ev}_1+\mathrm{ev}_{-1}) : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}$ è lineare. Poiché $V=\ker(\mathrm{ev}_1+\mathrm{ev}_{-1})$, ne segue che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$. Inoltre, l'applicazione $\mathrm{ev}_1+\mathrm{ev}_{-1}$ è non nulla, in quanto $(\mathrm{ev}_1+\mathrm{ev}_{-1})(t^2)=2$. Dunque tale applicazione è suriettiva, e quindi $\dim(V)=\dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 4})-1=5-1=4$. Si vede facilmente che i vettori t, t^2-1, t^3, t^4-1 sono linearmente indipendenti e giacciono in V. Dunque essi formano una base di V.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ delle matrici 7×7 reali e sia $N \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ una matrice fissata tale che $N^5=0$. Considerare inoltre l'applicazione $F : \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ definita come

$$F(X) := N \cdot X \cdot N.$$

(i) Dimostrare che F è lineare e nilpotente.

Risoluzione

*Siano $X, Y \in$
$mathcal M_{7,7}(\mathbb{R})$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora $F(\lambda X+\mu Y)=N(\lambda X+\mu Y)N=\lambda NXN+\mu NYN=\lambda F(X)+\mu F(Y)$. Ne segue che F è lineare.*

Inoltre, $F^5(X)=F^4(F(X))=F^4(NXN)=F^3(F(NXN))=F^3(NNXNN)=\cdots=N^5XN^5=0X0=0$ per ogni $X \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$. Dunque $F^5=0$ e F è nilpotente.

(ii) Dimostrare che il polinomio minimo di F ha grado al più 5.

Risoluzione

Abbiamo visto in (i) che $F^5=0$. Dunque, posto $q=t^5$, abbiamo $q(F)=0$. Poiché il polinomio minimo q_F di F è il polinomio non nullo (monico) di grado minimo che annulla F, ne segue che il grado di q_F è al massimo uguale al grado di q, e dunque al massimo 5.

(iii) Supponiamo che $N^4 \neq 0$. Determinare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di F.

Risposta

Il polinomio minimo di F è $q_F=t^5$ e il polinomio caratteristico di F è $p_F=-t^{49}$.

Risoluzione

Poiché F è nilpotente, ne segue che il polinomio caratteristico di F è $p_F=(-t)^d$, dove $d=\dim(\mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R}))=7^2=49$.

Inoltre, $F^5=0$ e dunque $q_F=t^r$ con $1 \leq r \leq 5$. Basta dunque dimostrare che $F^4 \neq 0$, ossia che esiste una matrice $X \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ tale che $N^4XN^4=F^4(X) \neq 0$. Poiché $N^4 \neq 0$, esiste $v \in \mathbb{R}^7$ tale che $N^4v \neq 0$. Completiamo $\{v\}$ ad una base $(w_1 := v, w_2, \ldots, w_7)$ di $\mathbb{R}^7$ e completiamo $\{N^4v\}$ ad una base $(v_1 := N^4v, v_2, \ldots, v_7)$ di $\mathbb{R}^7$. Sia ora X l'unica matrice tale che $Xv_i=w_i$ per ogni $i=1,\ldots,7$. Poiché $F^4(X)v=N^4XN^4v=N^4Xv_1=N^4w_1=N^4v \neq 0$, concludiamo che $F^4(X) \neq 0$. Segue che $q_F=t^5$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più 3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

e sia $V \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ il sottospazio $V = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \,|\, p(1) = 0\}$.

(i) Dire se f sia suriettiva.

Risposta

Sì, f è suriettiva.

Risoluzione

Per dimostrare che f è suriettiva, è sufficiente mostrare che l'immagine di f ha dimensione 3 *come* $\mathbb{R}^3$. *Poiché il dominio* $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ *ha dimensione* 4, *la tesi è equivalente a dimostrare (per la formula del rango) che* $\ker(f)$ *ha dimensione* 1.

Ora, i polinomi in $\ker(f)$ *sono quei p di grado al più* 3 *tali che* $p(0) = p(1) = p(-1) = 0$. *Dunque sono tutti del tipo* $p = at(t-1)(t+1) = a(t^3 - t)$ *per qualche* $a \in \mathbb{R}$. *Ne segue che* $\ker(f)$ *ha base costituita dal solo* $(t^3 - t)$ *e dunque ha dimensione* 1, *come voluto.*

(ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice che rappresenta $f|_V : V \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ in arrivo.

Risposta

$$\mathcal{B} = (t-1,\, t^2-1,\, t^3-1) \text{ e } M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione

L'applicazione $\mathrm{ev}_1 : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}$ *definita come* $\mathrm{ev}_1(p) := p(1)$ *è lineare e* $\ker(\mathrm{ev}_1) = V$. *Poiché* $\mathrm{ev}_1(t) = 1 \neq 0$, *ne segue che* $\mathrm{ev}_1 \neq 0$ *e dunque* ev_1 *è suriettiva, e V ha dimensione* $\dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 3}) - 1 = 4 - 1 = 3$. *I polinomi* $t-1$, t^2-1, t^3-1 *sono chiaramente linearmente indipendenti e appartengono a V. Dunque essi sono una base di V. La matrice M che rappresenta $f|_V$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ si ottiene da un calcolo diretto.*

(iii) Determinare una base del nucleo di $f|_V$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $f|_V$.

Risposta

Una base del nucleo di $f|_V$ è $(t^3 - t)$. Equazioni cartesiane per l'immagine di $f|_V$ sono $(x_2 = 0)$.

Risoluzione

Il nucleo di f ha dimensione 1, *generato da* $(t^3 - t)$, *come visto in (i). Dunque il nucleo di $f|_V$ ha dimensione al più* 1. *Poiché* $t^3 - t$ *appartiene a V, ne segue che* $\ker(f|_V)$ *ha dimensione esattamente* 1 *ed ha anche esso base* $(t^3 - t)$.

Avendo V dimensione 3 *e il nucleo di $f|_V$ dimensione* 1, *ne segue che l'immagine di $f|_V$ ha dimensione* 2. *Per definizione, è chiaro che l'immagine di $f|_V$ è contenuta nel sottospazio* $W = \{x_2 = 0\}$ *di* $\mathbb{R}^3$. *Poiché W ha dimensione* 2, *ne segue che l'immagine di $f|_V$ è esattamente W e dunque* $(x_2 = 0)$ *sono equazioni cartesiane per l'immagine di $f|_V$.*