# Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

# Soluzioni della prova scritta del 4 settembre 2019

**Esercizio 1.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $iz^7 = |z|^7 + a$.

**Risoluzione**: La soluzione $z = 0$ si ha solo per $a = 0$. D'ora in poi assumiamo quindi $z \neq 0$: possiamo quindi scrivere $z = \rho u$ con $\rho$ reale positivo e $u$ complesso con $|u| = 1$. Possiamo quindi scrivere $u = e^{i\theta}$.

<u>Caso $a = 0$.</u>
L'equazione si riduce a $iz^7 = |z|^7$, che è equivalente a $iu^7 = 1$, ovvero $u^7 = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.
Ne segue $u = e^{-\frac{\pi}{14}i + \frac{2k}{7}\pi i}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$, mentre $\rho > 0$ è qualsiasi.

<u>Caso $a > 0$.</u>
Prendendo il modulo di entrambi i membri, otteniamo $\rho^7 = |iz^7| = ||z|^7 + a| = \rho^7 + a$.
Tale equazione non ha soluzioni.

<u>Caso $a < 0$.</u>
Dividendo ambo i membri per $\rho^7$, otteniamo

$$iu^7 = 1 + \frac{a}{\rho^7}$$

Prendendo i moduli da ambo i lati troviamo

$$1 = |iu^7| = \left|1 + \frac{a}{\rho^7}\right|.$$

Poiché $a < 0$, deve aversi

$$-1 - \frac{a}{\rho^7} = 1$$

da cui $\rho^7 = -\frac{a}{2}$, ovvero

$$\rho = \left(-\frac{a}{2}\right)^{1/7}.$$

L'equazione $iu^7 = 1 + \frac{a}{\rho^7}$ diventa allora

$$iu^7 = -1$$

ovvero $u^7 = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, le cui soluzioni sono $u = e^{\frac{\pi}{14}i + \frac{2k}{7}\pi i}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$.

In definitiva, le soluzioni di $iz^7 = |z|^7 + a$ sono

$$\begin{cases} \text{nessuna soluzione} & \text{se } a > 0 \\ z = 0 \text{ e } z = \rho e^{-\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i} \text{ con } \rho > 0 \text{ arbitrario} & \text{se } a = 0 \\ z = \left(-\frac{a}{2}\right)^{1/7} e^{\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale reale di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, sia $f_\theta \in \mathcal{F}$ la funzione definita come $f_\theta(x) := \operatorname{sen}(x+\theta)$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{S} = \{f_\theta \in \mathcal{F} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

(i) L'insieme $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{F}$?

(ii) L'insieme $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{F}$?

(iii) Detto $V$ il sottospazio di $\mathcal{F}$ generato da $\mathcal{S}$, qual è la dimensione di $V$?

(iv) Estrarre da $\mathcal{S}$ una base di $V$.

**Risoluzione**:

(i) Si ha $f_0 = f_{2\pi}$, ovvero la combinazione lineare non banale $1 \cdot f_0 + (-1) \cdot f_{2\pi}$ di vettori di $\mathcal{S}$ è nulla. Dunque i vettori di $\mathcal{S}$ non sono linearmente indipendenti.

(ii) Tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ sono funzioni limitate, quindi ogni loro combinazione lineare sarà ancora una funzione limitata. Ma $\mathcal{F}$ contiene anche funzioni non limitate, quindi $\mathcal{S}$ non genera tutto $\mathcal{F}$. Similmente si può argomentare dicendo che tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$, quindi ogni loro combinazione lineare sarà ancora una funzione periodica di periodo $2\pi$. Ma $\mathcal{F}$ contiene anche funzioni non periodiche, quindi $\mathcal{S}$ non genera tutto $\mathcal{F}$

(iii) Osserviamo che

$$f_\theta(x) = \operatorname{sen}(x+\theta) = \operatorname{sen}(x)\cos(\theta) + \cos(x)\operatorname{sen}(\theta) = \cos(\theta)f_0(x) + \operatorname{sen}(\theta)f_{\pi/2}(x),$$

ovvero

$$f_\theta = \cos(\theta)f_0 + \operatorname{sen}(\theta)f_{\pi/2}.$$

Ne segue che tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ sono elementi del sottospazio $V_0$ generato da $f_0$ e $f_{\pi/2}$, e dunque $V \subseteq V_0$. D'altronde $\{f_0, f_{\pi/2}\} \subseteq \mathcal{S}$ e dunque $V_0 \subseteq V$. ne segue $V = V_0$. Infine, i due elementi $f_0$ e $f_{\pi/2}$ sono linearmente indipendenti: se $af_0 + bf_{\pi/2} = 0$, calcolando in $x = 0$ troviamo $b = 0$ e calcolando in $x = \pi/2$ troviamo $a = 0$. Dunque $\{f_0, f_{\pi/2}\}$ è una base di $V_0 = V$ e quindi $\dim V = 2$.

(iv) Abbiamo già risolto questo punto risolvendo il punto precedente: una base di $V$ estratta da $\mathcal{S}$ è $\{f_0, f_{\pi/2}\}$. In effetti, avendo dimostrato che $\dim V = 2$, due qualunque elementi linearmente indipendenti di $\mathcal{S}$ forniscono una base di $V$.

**Esercizio 3.** Sia $\rho : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare che manda una matrice $3 \times 3$ reale nella sua "ruotata" di 90° in senso antiorario, ossia

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli autovalori (reali) di $\rho$ e determinare basi per i rispettivi autospazi.

(ii) Dire se $\rho$ sia diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(iii) Calcolare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di $\rho$.

**Risoluzione**:

(i) Si vede immediatamente che $\rho^4 = \mathrm{Id}$, dunque $\rho$ soddisfa l'equazione $t^4 - 1 = 0$. Ne segue che gli autovalori reali di $\rho$ devono essere radici di quest'equazione. Dato che $t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1)$, vediamo che gli unici autovalori (reali) possibili sono $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. Per verificare se siano effettivamente autovalori impostiamo e risolviamo l'equazione per gli autovettori

$$\rho(M) = \lambda M$$

con $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. Questo ci fornirà inoltre le basi per gli autospazi. Per $\lambda = 1$ l'equazione da risolvere è

$$\begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione

$$\begin{cases} a = s \\ b = t \\ c = s \\ d = t \\ e = u \\ f = t \\ g = s \\ h = t \\ i = s \end{cases}$$

con $s, t, u \in \mathbb{R}$. Dunque $\lambda = 1$ è effettivamente un autovalore e una base del relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Similmente si vede che anche $\lambda = -1$ è un autovalore e che una base del relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali è

$$m_g(1) + m_g(-1) = 3 + 2 = 5 < 9 = \dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}),$$

dunque $\rho$ non è diagonalizzabile.

(iii) Dato che $\rho$ annulla il polinomio $t^4 - 1$ il polinomio minimo di $\rho$ divide $t^4 - 1$. Inoltre $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ sono autovalori di $\rho$ e quindi sono radici del polinomio minimo. Ne segue che $(t-1)(t+1)$ divide il polinomio minimo. Abbiamo allora solo due possibilità: o il polinomio minimo di $\rho$ è $t^2 - 1$ oppure è $t^4 - 1$. Dato che $\rho^2 \neq \mathrm{Id}$, il polinomio minimo non è $t^2 - 1$ e dunque $m_\rho(t) = t^4 - 1$. Per determinare il polinomio caratteristico di $\rho$ osserviamo innanzi tutto che da $m_\rho(t) = t^4 - 1$ segue

$$\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_{-1} \oplus \ker(\rho^2 + 1),$$

dove $V_\lambda$ indica l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda$. La decomposizione scritta sopra è una decomposizione in sottospazi $\rho$-stabili. Inoltre il polinomio caratteristico della restrizione di $\rho$ a $V_\lambda$ è $(\lambda - t)^{\dim V_\lambda}$, mentre il polinomio caratteristico della restrizione di $\rho$ a $\ker(\rho^2 + 1)$ è $(t^2 + 1)^k$ per qualche $k \geq 1$ (dato che il polinomio minimo di questa restrizione è proprio $t^2 + 1$). Pertanto il polinomio caratteristico di $\rho$ è

$$p_\rho(t) = -(t-1)^3(t+1)^2(t^2+1)^k$$

per qualche $k$. Dato che $p_\rho(t)$ ha grado uguale a $\dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = 9$ vediamo che deve essere $k = 2$, ovvero

$$p_\rho(t) = -(t-1)^3(t+1)^2(t^2+1)^2.$$

Alternativamente, tutto l'esercizio può essere facilmente risolto scrivendo la matrice $9\times 9$ che rappresenta l'endomorfismo $\rho$ rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 4.** Al variare dei parametri $a, k \in \mathbb{R}$, considerare il sistema lineare

$$(\star) \quad \begin{cases} 3y + (5k+1)z = a - k \\ -3x - (6k+6)y = -3 \\ 2x + (5+4k)y + 2kz = 2 \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(i) Al variare di $a, k \in \mathbb{R}$, determinare se il sistema lineare $(\star)$ abbia un'unica soluzione, infinite soluzioni oppure nessuna soluzione.

(ii) Per quei valori di $a, k$ per cui $(\star)$ ha infinite soluzioni, dare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni.

(iii) Dire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia soluzione del sistema $(\star)$ per qualche valore di $a, k \in \mathbb{R}$.

**Risoluzione**:

(i) Riscriviamo il sistema lineare come $AX = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5k+1 \\ -3 & -6k-6 & 0 \\ 2 & 5+4k & 2k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a-k \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sia quindi $\widehat{A} = (A|b)$ la matrice completata, ossia

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5k+1 & a-k \\ -3 & -6k-6 & 0 & -3 \\ 2 & 5+4k & 2k & 2 \end{array}\right).$$

Operiamo sulle righe di $\widehat{A}$ per ridurre la parte sinistra a scala

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5k+1 & a-k \\ -3 & -6k-6 & 0 & -3 \\ 2 & 5+4k & 2k & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6k-6 & 0 & -3 \\ 2 & 5+4k & 2k & 2 \\ 0 & 3 & 5k+1 & a-k \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k+2 & 0 & 1 \\ 2 & 5+4k & 2k & 2 \\ 0 & 3 & 5k+1 & a-k \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k+2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 3 & 5k+1 & a-k \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k+2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & a-k \end{array}\right) =: \widehat{A}'$$

Esaminando $\widehat{A}'$ e applicando Rouché-Capelli, otteniamo tre casi:

(1) se $k \neq 1$, allora $\hat{A}$ ha rango 3 e dunque il sistema ha un'unica soluzione (che si ottiene come $X = A^{-1}b$);

(2) se $k = 1$ e $a \neq 1$, allora $A$ ha rango 2 e $b \notin \mathrm{Im}(L_A)$ e dunque il sistema non ha soluzioni;

(3) se $k = 1$ e $a = 1$, allora $A$ ha rango 2 e $b \in \mathrm{Im}(L_A)$ e dunque il sistema ha infinite soluzioni.

(ii) Siamo nel caso in cui $k = a = 1$. Il sistema in questo caso è $AX = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Avendo $L_A$ nucleo di dimensione 1, le soluzioni saranno descritte da un unico parametro $t \in \mathbb{R}$. Poniamo $z = t$ e risolvendo otteniamo $y = -2t$ e $x = 1 - 4y = 1 + 8t$. Quindi lo spazio delle soluzioni del sistema è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 + 8t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Riprendiamo $A, b$ come in (i), che dipendono dai parametri $a, k$. Per verificare se $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia soluzione di $AX = b$, semplicemente calcoliamo

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5k+1 \\ -3 & -6k-6 & 0 \\ 2 & 5+4k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k+3 \\ -6k-9 \\ 6k+7 \end{pmatrix}.$$

ed eguagliamo tale vettore a $b$, ottenendo il sistema

$$(\diamond) \begin{cases} 5k + 3 = a - k \\ -6k - 9 = -3 \\ 6k + 7 = 2 \end{cases}$$

Le soluzioni $(a, k)$ del sistema $(\diamond)$ corrispondono ai valori dei parametri per i quali $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è soluzione di $(\star)$.

Sommando le ultime due righe del sistema $(\diamond)$, otteniamo l'equazione $-2 = -1$, che chiaramente non ha soluzione. Pertanto $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è soluzione del sistema $(\star)$ per alcun valore di $(a, k)$.