Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Prova scritta - 22 gennaio 2019

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

☐ *Esame completo* ☐ *Secondo esonero (solo esercizi 3-4)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. (a) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z(z-2) = z + \bar{z}$.

(b) Siano $p_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ e $p_2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ sono polinomi reali in x.
Calcolare il MCD(p_1, p_2).

Risoluzione:

(a) Scriviamo $z = x + i\,y$ con x ed y reali. Allora l'equazione da risolvere è

$$(x + i\,y)(x + i\,y - 2) = x + i\,y + x - i\,y$$

ovvero

$$x^2 - 2x - y^2 + i\,(2xy - 2y) = 2x.$$

Quest'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 2x \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

Da qui ricaviamo i due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -3 - y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni con y reale, mentre il secondo sistema ha le due soluzioni $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (4, 0)$, corrispondenti ai due numeri complessi $z = 0$ e $z = 4$.

(b) Utilizziamo l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Si ha

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x^3 - 5x^2 + 8x - 6) + (2x^2 - 4x + 4) = (x^3 - 5x^2 + 8x - 6) + 2(x^2 - 2x + 2)$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = (x - 3)(x^2 - 2x + 2)$$

Abbiamo finito: il massimo comun divisore tra p_1 e p_2 è $x^2 - 2x + 2$.
Alternativamente si possono fattorizzare p_1 e p_2 in irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ trovando

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2); \qquad x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = (x - 3)(x^2 - 2x + 2)$$

e ricavare da qui che il massimo comun divisore tra p_1 e p_2 è $x^2 - 2x + 2$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x di grado al più 3 e si considerino i seguenti sottoinsiemi di V:

$$W_1 = \{p \in V \mid p \text{ non ha radici negative}\}, \quad W_2 = \{p \in V \mid p(x-1) + p(x+1) = 2p(x)\}.$$

(i) Determinare se ciascun W_i sia un sottospazio vettoriale di V.

(ii) Determinare una base di quei W_i che sono sottospazi vettoriali di V.

Risoluzione:

(i) Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di V. Infatti il polinomio $p(x) = -x + 2$ e il polinomio $q(x) = 2x - 1$ sono elementi di W_1 (non hanno radici negative) ma la loro somma è il polinomio $p(x) + q(x) = x + 1$ che ha la radice negativa $x = -1$. Ovviamente sono possibili infiniti altri controesempi.
Il sottoinsieme W_2 è un sottospazio vettoriale di V. Infatti se p e q sono elementi di W_2 si ha

$$\begin{aligned}(p+q)(x-1) + (p+q)(x+1) &= p(x-1) + q(x-1) + p(x+1) + q(x+1)\\ &= p(x-1) + p(x+1) + q(x-1) + q(x+1)\\ &= 2p(x) + q(x)\\ &= 2(p(x) + q(x))\\ &= 2(p+q)(x).\end{aligned}$$

Dunque $p + q$ appartiene a W_2. Inoltre se p appartiene a W_2 e α è un numero reale, si ha

$$\begin{aligned}(\alpha p)(x-1) + (\alpha p)(x+1) &= \alpha\, p(x-1) + \alpha\, p(x+1)\\ &= \alpha(p(x-1) + p(+1))\\ &= \alpha(2\, p(x))\\ &= 2\alpha\, p(x)\\ &= 2(\alpha\, p)(x).\end{aligned}$$

Dunque αp appartiene a W_2.
Per determinare una base di W_2, scriviamo $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. L'equazione che definisce W_2 è allora

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 = 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$$

ovvero

$$2a_2 + (6a_3)x = 0,$$

che corrisponde al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \end{cases}$$

nelle variabili a_0, a_1, a_2, a_3. Osserviamo che aver identificato W_2 con l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle coordinate a_0, a_1, a_2, a_3 relative alla base canonica $(1, x, x^2, x^3)$ di V è una seconda dimostrazione del fatto che W_2 è un sottospazio vettoriale di V. Le soluzioni del sistema che definisce W_2 sono evidentemente

$$\begin{cases} a_0 = s \\ a_1 = t \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

con s, t numeri reali arbitari. Una base è data dunque dai due vettori di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $(1, x, x^2, x^3)$ di V, ovvero dai due polinomi 1 e x.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ delle matrici 3×3 reali e l'applicazione lineare $f : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita come $f(A) := A - 4A^T$.

(i) Determinare autovalori e autospazi di f.

(ii) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di f e dire se f sia diagonalizzabile.

(ii) Determinare polinomi caratteristico e minimo di f.

Risoluzione:

(i) Il modo più elegante di risolvere questo esercizio è probabilmente osservare che se scriviamo $g : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ per l'applicazione lineare data da $g(A) = A^T$, allora abbiamo $f = \mathrm{Id} - 4g$. L'equazione $f(A) = \lambda A$ è allora equivalente a $A - 4g(A) = \lambda(A)$, ovvero a

$$g(A) = \frac{1-\lambda}{4} A.$$

In altre parole λ è un autovalore di f se e solo se $(1-\lambda)/4$ è un autovalore di g. Ma gli autovaloro di g li conosciamo: dato che g è la trasposizione, $g^2 = \mathrm{Id}$ e il polinomio minimo di g è proprio $t^2 - 1$. Dunque gli autovalori di f sono dati dalle soluzioni delle equazioni

$$\frac{1-\lambda}{4} = 1 \quad ; \qquad \frac{1-\lambda}{4} = -1$$

ovvero sono

$$\lambda = -3 \quad \text{e} \quad \lambda = 5.$$

Inoltre l'autospazio per f relativo all'autovalore -3 coinciderà, per quanto osservato, con l'autospazio per g relativo all'autovalore 1, ovvero allo spazio delle matrici simmetrice 3×3, mentre l'autospazio per f relativo all'autovalore 5 coinciderà con l'autospazio per g relativo all'autovalore -1, ovvero allo spazio delle matrici antisimmetrice 3×3.
Altrimenti si può andare di forza bruta: in termini della base canonica dello spazio delle matrici, data da

$$E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} &f(E_1^1) = -3E_1^1; && f(E_1^2) = E_1^2 - 4E_2^1; && f(E_1^3) = E_1^3 - 4E_3^1; \\ &f(E_2^1) = E_2^1 - 4E_1^2; && f(E_2^2) = -3E_2^2; && f(E_2^3) = E_2^3 - 4E_3^2; \\ &f(E_3^1) = E_3^1 - 4E_1^3; && f(E_3^2) = E_3^2 - 4E_2^3; && f(E_3^3) = -3E_3^3; \end{aligned}$$

ed è dunque rappresentata rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si calcola facilmente permutando un po' di righe e colonne:

$$p_M(t) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t \end{pmatrix}$$

$$= (-3-t)^3 \left(\det \begin{pmatrix} 1-t & -4 \\ -4 & 1-t \end{pmatrix} \right)^3$$

$$= -(t+3)^3(t^2-2t-15)^3$$

$$= -(t+3)^6(t-5)^3$$

dalla quale ritroviamo gli autovalori -3 e 5. Osserviamo che il polinomio caratteristico di M ha tutte le sue radici nel campo.Vediamo anche che le molteplicità algebriche sono 6 e 3 rispettivamente. L'autospazio relativo all'autovalore -3 è dato da

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo a scala con il metodo di Gauss si vede rapidamente che questo è

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3, e dunque l'autovalore -3 ha molteplicità geometrica 6 (coincidente con la sua molteplicità algebrica). Una base dello spazio delle soluzioni è data dai vettori che hanno coordinate rispetto alla base canonica date da

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

ovvero dalle seguenti matrici 3×3:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Si tratta evidentemente della base dello spazio delle matrici simmetriche 3×3. L'autospazio relativo all'autovalore 5 è dato da

$$\ker\begin{pmatrix}-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&-4&0&-4&0&0&0&0&0\\0&0&-4&0&0&0&-4&0&0\\0&-4&0&-4&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-8&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-4&0&-4&0\\0&0&-4&0&0&0&-4&0&0\\0&0&0&0&0&-4&0&-4&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&-8\end{pmatrix}$$

Riducendo a scala con il metodo di Gauss si vede rapidamente che questo è

$$\ker\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 6, e dunque l'autovalore 5 ha molteplicità geometrica 3 (coincidente con la sua molteplicità algebrica). Ne deduciamo in particolare che l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Una base dello spazio delle soluzioni è data dai vettori che hanno coordinate rispetto alla base canonica date da

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};$$

ovvero dalle seguenti matrici 3×3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta evidentemente della base dello spazio delle matrici antisimmetriche 3×3.

- Se abbiamo risolto elegantemente il primo punto, allora la molteplicità geometrica dell'autovalore -3 è la dimensione dello spazio delle matrici simmetriche 3×3, ovvero $3 + 2 + 1 = 6$, mentre la molteplicità geometrica dell'autovalore 5 è la dimensione dello spazio delle matrici antisimmetriche 3×3, ovvero $2 + 1 = 3$. Indicati con V_{-3} e V_5 i due autospazi abbiamo dunque

$$\dim(V_{-3} \oplus V_5) = \dim V_{-3} + \dim V_5 = 6 + 3 = 9 = \dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

  Dunque

$$\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = V_{-3} \oplus V_5,$$

  ovvero f è diagonalizzabile.
  Se abbiamo risolto il primo punto di forza bruta, invece, già abbiamo ricavato tutte le risposte per questo secondo punto.

- Se abbiamo risolto elegantemente il primo punto, allora le informazioni che abbiamo fino a questo punto sono che f è diagonalizzabile e che gli autospazi sono V_{-3} e V_5 di dimensioni 6 e 3 rispettivamente. Ne ricaviamo quindi che

$$p_f(t) = -(t+3)^6(t-5); \qquad m_f(t) = (t+3)(t-5).$$

  Se invece siamo andati di forza bruta, allora già sappiamo quale sia il polinomio caratteristico e ricaviamo il polinomio minimo dal sapere che f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli autovalori di A, le loro molteplicità algebriche, il polinomio caratteristico p_A e dire se A sia triangolabile.

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e dire se A sia diagonalizzabile.

(iii) Calcolare il polinomio minimo di A e determinare la forma di Jordan di A.

(iv) Determinare una base di Jordan per A.

Risoluzione:

(i) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (4-t)^2 \det \begin{pmatrix} 5-t & 1 \\ 1 & 5-t \end{pmatrix} = (t-4)^3(t-6)$$

Gli autovalori di A sono pertanto 4 e 6, con molteplicità algebriche 3 e 1 rispettivamente. Osserviamo che il polinomio caratteristico di A ha tutte le sue radici nel campo, e quindi A è triangolabile.

(ii) Le dimensioni degli autospazi di A sono

$$\dim V_4 = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

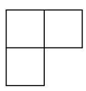
e

$$\dim V_6 = 1$$

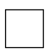
(in questo caso non occorre fare calcoli dato che l'autovalore 6 ha molteplicità algebrica 1). Dato che la molteplicità geometrica dell'autovalore 4 è minore della corrispondente molteplicità algebrica, A non è diagonalizzabile. Le dimensioni degli autospazi generalizzati si leggono immediatamente dal polinomio caratteristico di A. Abbiamo

$$\dim V_4^{(\infty)} = 3\,; \qquad \dim V_6^{(\infty)} = 1.$$

(iii) Calcoliamo i diagrammi di Young relativi agli autovalori 4 e 6. Da quel che abbiamo già calcolato sappiamao che il diagramma di Young relativo all'autovalore 4 deve avere 3 quadretti e che la sua prima riga ha 2 quadretti. Si tratta quindi del diagramma di Young



Da questo leggiamo che la molteplicità algebrica dell'autovalore 4 nel polinomio minimo di A è 2. Il diagramma di Young relativo all'autovalore 6 è invece immediato: si tratta del diagramma di Young



Il polinomio minimo di A è pertanto $m_A(t) = (t-4)^2(t-6)$ e la forma di Jordan di A è

$$J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(iv) Numeriamo le caselle del diagramma di Young relativo all'autovalore 4:

1	3
2	

Da quanto calcolato fin qui l'unica cosa non banale da fare per esplicitare una base di Jordan è esibire un vettore e_2 in $V_4^{(2)} = \ker((A-4\mathrm{Id})^2)$ tale che $[e_2]$ sia una base di $V_4^{(2)}/V_4^{(1)}$. Dato che $\dim V_4^{(2)}/V_4^{(1)} = 1$ ci basta trovare un vettore e_2 in $V_4^{(2)}$ tale che $[e_2] \neq [0]$, ovvero un vettore e_2 di $\mathbb{R}^4$ tale che $e_2 \in \ker((A-4\mathrm{Id})^2)$ ma $e_2 \notin \ker(A-4\mathrm{Id})$. Si ha

$$A - 4\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(A-4\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come vettore e_2 possiamo quindi prendere il vettore

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il vettore e_1 sarà allora

$$e_1 = (A-4\mathrm{Id})e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Come vettore e_3 dobbiamo scegliere un vettore di $V_4^{(1)} = V_4$ che completi e_1 a una base di V_4. Dato che una base di

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi possiamo prendere

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine come e_4 dobbiamo prendere una base di V_6. Poiché

$$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo prendere

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di Jordan per A è dunque data dalla seguente quaterna ordinata di vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$