Algebra lineare

Anno accademico 2018/19

Prova scritta - 5 febbraio 2019

Nome: ____________________________________

Cognome: __________________________________

Numero di matricola: __________________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. (i) Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$z^5 = 8i\,\bar{z}^2.$$

Quali tra essi si trovano a distanza al più 1 da $i \in \mathbb{C}$?

(ii) Calcolare $\mathrm{MCD}(p_1, p_2)$ dei polinomi

$$p_1 = x^4 + x^3 + x^2 + 2, \qquad p_2 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$$

in x a coefficienti razionali.

Risoluzione:

(i) Una soluzione è data evidentemente da $z = 0$. Per $z \neq 0$, moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per z^2 e otteniamo

$$z^7 = z^5 z^2 = 8i\bar{z}^2 z^2 = 8i\,|z|^4.$$

Scrivendo z in forma polare come $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ l'equazione diventa

$$r^7[\cos(7\theta) + i\sin(7\theta)] = 8r^4\,[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)]$$

ovvero

$$\begin{cases} r^7 = 8r^4 \\ \cos(7\theta) + i\sin(7\theta) = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) \end{cases}$$

Assumendo $r > 0$ (dato che $z \neq 0$), ricaviamo

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 7\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{con } k \text{ intero} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ad esclusione della soluzione $z = 0$, le altre sette soluzioni si trovano sulla circonferenza di raggio 2 e centro 0. L'unico punto di questa circonferenza a distanza al più 1 dal punto i è il punto $2i$, che non è una delle sette soluzioni sulla circonferenza. Ne segue chel'unica soluzione dell'equazione data che si trovi a una distanza al più di 1 dal punto i è la soluzione $z = 0$.

(ii) Usiamo l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Si ha

$$p_1(x) = p_2(x) + (-x^3 - 1)$$

$$p_2(x) = (x+2)(x^3+1) + (x^2 - x + 1)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Dunque $\mathrm{MCD}(p_1, p_2) = x^2 - x + 1$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Per ogni $A \in V$ indichiamo con $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la corrispondente applicazione lineare. Infine, indichiamo con $\mathbf{0}$ il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di V:

$$W_1 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \ker L_A = \{\mathbf{0}\} \right\}, \quad W_2 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \ker L_A \neq \{\mathbf{0}\} \right\}, \quad W_3 = \left\{ A \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker L_A \right\}.$$

(i) Determinare se ciascun W_i sia un sottospazio vettoriale di V.

(ii) Determinare una base di quei W_i che sono sottospazi vettoriali di V.

Risoluzione:

(i) <u>W_1 non è un sottospazio di V.</u>
Ad esempio la matrice nulla (che è lo zero di V) non appartiene a W_1 in quanto il suo nucleo non si riduce al solo $\mathbf{0}$.

<u>W_2 non è un sottospazio di V.</u>
Ad esempio se

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $A_1, A_2 \in W_2$ ma $A_1 + A_2 = \mathrm{I}_2$ e quindi $A_1 + A_2 \notin W_2$.

<u>W_3 è un sottospazio di V.</u>
Infatti se $A_1, A_2 \in W_3$ allora $L_{A_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = L_{A_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, e dunque

$$L_{A_1+A_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = L_{A_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + L_{A_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Quindi $A_1 + A_2 \in W_3$. Analogamente, se $A \in W_3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$L_{\alpha A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha L_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Quindi $\alpha A \in W_3$.

(ii) Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}.$$

Quindi $A \in W_3$ se e solo se $b = a$ e $d = c$ ovvero se e solo se A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$$

Una base di W_3 è dunque data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3. Sia $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'unico endomorfismo tale che

$$\tau(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \text{se } j = 1, \ldots, n-1 \\ e_1 & \text{se } j = n. \end{cases}$$

(i) Dire per quali $n \geq 1$ l'endomorfismo τ sia diagonalizzabile.

(ii) Determinare il polinomio caratteristico di τ per ogni $n \geq 1$.

(iii) Determinare il polinomio minimo di τ per $n = 2, 3, 4$.

(iv) Determinare il polinomio minimo di τ per $n \geq 1$ qualunque (motivando la risposta).

Risoluzione: Il modo più rapido per risolvere questo esercizio consiste nell'accorgersi che il vettore e_1 è un vettore ciclico per τ e che il primo valore di k per il quale $\tau^k(e_1)$ è linearmente dipendente sa $\{e_1, \tau(e_1), \ldots \tau^{k-1}(e_1)\}$ è $k = n$ per il quale si ha $\tau^n(e_1) = e_1$. Ne segue che il polinomio minimo di τ è

$$m_\tau(t) = t^n - 1$$

e che il polinomio caratteristico coincide (a meno del segno) con il polinomio minimo, ed è dunque

$$p_\tau(t) = (-1)^n (t^n - 1).$$

Le radici del polinomio caratteristico sono le radici n-me dell'unità. Dunque per $n > 2$ il polinomio caratteristico ha radici non reali e quindi τ non è diagonalizzabile per $n > 2$. È invece diagonalizzabile per $n \leq 2$ dato che in questi casi il polinomio minimo ha tutte le radici reali e queste sono tutte distinte.

Se non ci si accorge che e_1 è un vettore ciclico si può risolvere l'esercizio scrivendo la matrice che rappresenta τ nella base canonica di $\mathbb{R}^n$. L'unico punto non banale è l'ultimo. Questo si può fare accorgendosi che la matrice che rappresenta τ è una matrice compagna, oppure notando che se un polinomio $q(t)$ a coefficienti reali annulla τ allora $q(t)$ è anche un polinomio a coefficienti complessi che annulla τ, e dunque il polinomio minimo $m_\tau^{\mathbb{C}}(t)$ di τ sui complessi divide (come polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$) il polinomio minimo $m_\tau(t)$ di τ sui reali. Chiaramente $p_\tau^{\mathbb{C}}(t) = p_\tau(t)$ e, dato che $p_\tau(t)$ ha tutte le n-radici complesse distinte e il polinomio minimo ha le stesse radici del polinomio caratteristico, si ha che il polinomio minimo sui complessi $m_\tau^{\mathbb{C}}(t)$ coincide (a meno del segno) con $p_\tau^{\mathbb{C}}(t) = (-1)^n(t^n - 1)$. Dunque $t^n - 1 \,|\, m_\tau(t) \,|\, p_\tau(t)$ e se ne conclude $m_\tau(t) = t^n - 1$.

Esercizio 4. Sia $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli autovalori di A, le loro molteplicità algebriche, il polinomio caratteristico p_A e dire se A sia triangolabile.

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e dire se A sia diagonalizzabile.

(iii) Calcolare il polinomio minimo di A e determinare la forma di Jordan di A.

(iv) Determinare una base di Jordan per A.

Risoluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -1-t & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1-t & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (t-1)^4.$$

Dunque A ha il solo autovalore 1, con molteplicità algebrica 4. Dato che tutti gli autovalori sono nel campo, la matrice è triangolabile. La dimensione dell'unico auospazio V_1 è

$$\dim V_1 = 4 - \operatorname{rg}(A - \mathrm{Id}) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Calcoliamo la dimensione degli autospazi generalizzati. Si ha

$$\dim V_1^{(2)} = 4 - \operatorname{rg}((A - \mathrm{Id})^2) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

La dimensione di $V_1^{(k)}$ non può crescere ulteriormente, quindi $V_1^{(\infty)} = V_1^{(2)}$ e $\dim V_1^{(\infty)} = 4$. Il diagramma di Young corrispondente all'unico autovalore $\lambda = 1$ è pertanto

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Il polinomio minimo di A è pertanto $m_A(t) = (t-1)^2$ e la forma di Jordan di A è

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare una base di Jordan numeriamo le caselle del diagramma di Young relativo all'autovalore 1:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

e cerchiamo due vettori e_2, e_4 in modo che $[e_2]$ ed $[e_4]$ costituiscano una base di $V_1^{(2)}/V_1$. Per far questo è sufficiente determinare una base di V_1 e completarla ad una base di $V_1^{(2)} = \mathbb{R}^4$. Poiché una base di V_1 è data dai due vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

possiamo scegliere

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

I vettori e_1 ed e_3 sono dati da

$$e_1 = (A - \mathrm{Id})e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = (A - \mathrm{Id})e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Chiaramente esistono infinite altre basi possibili.