Esercizi di algebra lineare (15 ottobre 2018)

Esercizio 1. Si consideri $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale reale (ossia sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dato un vettore in $\mathbb{C}^n$ definiamo la sua parte reale come

$$\mathfrak{Re} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z_1) \\ \mathfrak{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \mathfrak{Re}(z_n) \end{pmatrix}.$$

Analogamente definiamo la parte immaginaria $\mathfrak{Im}$ di un vettore in $\mathbb{C}^n$.

(a) Dimostrare che $\mathfrak{Re}$ definisce una applicazione lineare $\mathfrak{Re} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ di spazi vettoriali reali.
Dire se tale applicazione sia iniettiva o suriettiva.
Stesse domande per l'applicazione $\mathfrak{Im} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$.

(b) Dimostrare che l'applicazione $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ definita come $\iota(v) := v$ definisce una applicazione lineare di spazi vettoriali reali. Dire inoltre se ι sia iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Ogni vettore in $\mathbb{R}^n$ può essere pensato come un vettore di $\mathbb{C}^n$ con entrate reali.
Dimostrare che $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ se e solo se, pensati come elementi di $\mathbb{C}^n$, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Siano V e W spazi vettoriali, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia inoltre $A = (v_1, \ldots, v_m)$ un insieme finito e ordinato di vettori in V.
Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se sia vera (fornendo una dimostrazione) o se sia falsa (fornendo un controesempio).

(a) Se A è un insieme (ordinato) di vettori di V linearmente indipendenti, allora $f(A) := \big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$ è un insieme (ordinato) di vettori di W linearmente indipendenti.

(b) Se A è un insieme (ordinato) di vettori di V linearmente dipendenti, allora $f(A)$ è un insieme (ordinato) di vettori di W linearmente dipendenti.

(c) Se A è un insieme (ordinato) di generatori per V, allora $f(A)$ è un insieme (ordinato) di generatori per W.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione 2 e sia (u, v) una base di V. Siano inoltre $a \in \mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un'applicazione lineare tali che $f(u) = v$ e $f(v) = u + av$.
Dimostrare che f è un isomorfismo.

Esercizio 5. Siano $f : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Dimostrare che la restrizione $f|_U : U \to W$ è un isomorfismo se e solo U è complementare di $\ker(f)$ in V, ovvero $V = U \oplus \ker(f)$.

Esercizio 6. Una applicazione lineare $f : V \to V$ si dice *proiezione* se $f = f \circ f$.
Dimostrare che, se f è una proiezione, allora $f(v) = v$ per ogni $v \in \mathrm{Im}(f)$, e valgono

$$V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)\,, \qquad e \qquad \mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{Id} - f)\,.$$