Esercizi di algebra lineare (22 ottobre 2018)

Esercizio 1. Considerare i seguenti polinomi reali in t:

$$p_1 = 1+t, \quad p_2 = 1+2t+t^2, \quad p_3 = t-t^2, \qquad r_1 = 1-t, \quad r_2 = 2+t.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e che $\mathcal{C} = (r_1, r_2)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

(b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2-t+t^2$ e di $q_2 = 3+t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(c) Considerare l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ definita come $f(p) := (t+3)p$. Calcolare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. Considerare l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Esibire una base di $\ker(L_A)$ e calcolarne la dimensione.

(b) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\mathrm{Im}(L_A)$.

Esercizio 3. Fissiamo $n \geq 0$ un intero, e siano $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distinti.
Considerare l'applicazione $F\colon \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definita come

$$F(p) := (p(\alpha_0),\, p(\alpha_1),\, \ldots,\, p(\alpha_n)).$$

(a) Dimostrare che F è lineare ed è un isomorfismo.

(b) Per ogni $i = 0, \ldots, n$ determinare $p_i \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ tale che $F(p_i) = e_{1+i}$, dove $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Determinare l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ della parabola in $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$.

Esercizio 4. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ sottospazi vettoriali. Ricordiamo che $\mathrm{Hom}(V,W)$ denota lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{K}$-lineari $f : V \to W$.

(a) Dimostrare che l'insieme
$$H := \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid f(A) \subseteq B\}$$
è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V,W)$.

(b) Dimostrare che H ha dimensione $[\dim(V) - \dim(A)]\dim(W) + \dim(A)\dim(B)$.
(Suggerimento: scegliere basi di A e di B ed estenderle a baasi di V e di W. Come sono fatte le matrici che rappresentano una $f \in H$ rispetto a tali basi?)