Soluzione degli esercizi di algebra lineare (del 26 ottobre 2018)

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e W un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Chiamiamo $A = f^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (fornendo, in tal caso, una dimostrazione) oppure false (fornendo, in tal caso, un controesempio).

(a) f è invertibile se e solo se esistono una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$ ed una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

VERO.

Per definizione, f è invertibile se e solo se esiste $g : W \to V$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_W$. Inoltre, il passaggio alle coordinate rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dà un isomorfismo lineare $\mathrm{Hom}(W, V) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Dunque, se f è invertibile, allora $N = P = g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ soddisfano $NA = \mathrm{Id}_n$ e $AP = \mathrm{Id}_m$.

Viceversa, se esistono tali N, P, allora esistono uniche $g, h : W \to V$ tali che $g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = N$ e $h^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = P$ ed esse soddisfano $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ h = \mathrm{Id}_W$. La proprietà $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ implica che f sia iniettiva, mentre $f \circ h = \mathrm{Id}_W$ implica che f sia suriettiva. Dunque f è biiettiva e quindi è un isomorfismo, ossia esiste $f^{-1} : W \to V$ tale che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_W$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$.

In tal caso, componendo $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ a destra con l'inversa f^{-1} di f e ricordando che la composizione di applicazioni è associativa, otteniamo

$$g = g \circ \mathrm{Id}_W = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

Similmente, component $f \circ h = \mathrm{Id}_W$ a sinistra con f^{-1}, otteniamo

$$h = \mathrm{Id}_W \circ h = (f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_W = f^{-1}.$$

Da cui $g = f^{-1} = h$. Ne segue che $N = P$ e, essendo tale matrice l'inversa di A, si denota anche con A^{-1}.

(b) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

FALSO.

Come controesempio, possiamo considerare $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $f : V = \mathbb{R} \to W = \mathbb{R}^2$ definita come $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo abbiamo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se prendiamo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $NA = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_1$. Tuttavia f non è suriettiva perché il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ non è contenuto in $\mathrm{Im}(f)$. In particolare, f non è un isomorfismo.

(c) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

FALSO.

Come controesempio, possiamo considerare $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $f : V = \mathbb{R}^2 \to W = \mathbb{R}$ definita come $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$. Rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo abbiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se prendiamo $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, otteniamo* $AP = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_1$*. Tuttavia* f *non è iniettiva perché il vettore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ *è contenuto in* $\ker(f)$*. In particolare,* f *non è un isomorfismo.*

(d) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Sia $g : W \to V$ *è l'applicazione lineare corrispondente a* $N = g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$*, allora* $NA = \mathrm{Id}_n$ *è equivalente a* $g \circ f = \mathrm{Id}_V$*.*

Verifichiamo ora l'affermazione seguente. La conclusione seguirà prendendo $F = f$ *e* $G = g$*.*

Affermazione. *Se* $F : X \to Y$ *e* $G : Y \to Z$ *sono applicazioni di insiemi e se* $G \circ F : X \to Z$ *è iniettiva, allora* F *è iniettiva.*

Dimostrazione dell'affermazione. *Supponiamo* $F(x_1) = F(x_2)$ *per certi* $x_1, x_2 \in X$*. Allora* $(G \circ F)(x_1) = G(F(x_1)) = G(F(x_2)) = (G \circ F)(x_2)$*. Essendo* $G \circ F$ *iniettiva, questo implica* $x_1 = x_2$*. Dunque* F *è iniettiva.*

(e) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

FALSO.

Stesso controesempio del punto (b).

(f) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

FALSO.

Stesso controesempio del punto (c).

(g) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

VERO.

Se $h : W \to V$ *è l'applicazione lineare corrispondente a* $P = h^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$*, allora* $AP = \mathrm{Id}_m$ *è equivalente a* $f \circ h = \mathrm{Id}_W$*.*

Verifichiamo ora l'affermazione seguente. La conclusione seguirà prendendo $F = f$ *e* $H = h$*.*

Affermazione. *Se* $H : X \to Y$ *e* $F : Y \to Z$ *sono applicazioni di insiemi e se* $F \circ H : X \to Z$ *è suriettiva, allora* F *è suriettiva.*

Dimostrazione dell'affermazione. *Sia* $z \in Z$*. Per la suriettività di* $F \circ H$*, esiste* $x \in X$ *tale che* $(F \circ H)(x) = z$*. Questo vuol dire che* $F(y) = z$ *con* $y = H(x)$*. Dunque* F *è suriettiva.*

(h) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AN = NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva. Da questo concludiamo che f è invertibile $\iff$ esistono $N, P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tali che $AP = NA = \mathrm{Id}_n$. In questo caso però l'invertibilità di f implica $P = (f^{-1})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = N$.

(i) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è iniettiva. La conclusione segue da (d).

(j) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è suriettiva. La conclusione segue quindi da (g).

Esercizio 2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $\{0\} \neq \ker f \neq V \iff$ esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = 0$ e $g \circ f \neq 0$.

Soluzione.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Poiché $\ker(f) \neq \{0\}$ esiste $v_0 \in \ker(f)$ con $v_0 \neq 0$. Poiché $\ker(f) \neq V$, allora esiste $v_1 \in V \setminus \ker(f)$. Sia dunque $w_1 = f(v_1) \in W$. Notiamo che $w_1 \neq 0$ e dunque (w_1) è una collezione di vettori linearmente indipendenti di W. Completiamo (w_1) ad una base $(w_1, \ldots, w_m)$ di W.*
Definiamo $g : W \to V$ come l'unica applicazione lineare tale che $g(w_i) = v_0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. In questo modo $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$ e dunque $f(g(w)) = 0$ per ogni $w \in W$ (ossia $f \circ g = 0$). D'altra parte, $g(f(v_1)) = g(w_1) = v_0 \neq 0$ e dunque $g \circ f \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si verifica facilmente che $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ e che $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.*
La condizione $g \circ f \neq 0$ ci dice che $\ker(g \circ f) \neq V$ (e dunque $\ker(f) \neq V$) e che $\{0\} \neq \mathrm{Im}(g \circ f)$ (e dunque $\mathrm{Im}(g) \neq \{0\}$). La condizione $f \circ g = 0$ è equivalente a $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$. Poiché $\mathrm{Im}(g) \neq \{0\}$, ne segue che $\ker(f) \neq \{0\}$.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

(a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Soluzione.

Sia $w \in \mathrm{Im}(f + g)$. Allora esiste $v \in V$ tale che $(f + g)(v) = w$, ossia $w = f(v) + g(v)$. Poiché $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ e $g(v) \in \mathrm{Im}(g)$, ne segue che $w \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

(b) Dedurre da (a) la disuguaglianza $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Soluzione.
È sempre vero che, se U, Z *sono spazi vettoriali di dimensione finita, allora* $\dim(U+Z) \leq \dim(U) + \dim(Z)$ *(segue anche dalla formula di Grassmann). Infatti, se* $(u_1, \ldots, u_k)$ *è una base di* U *e* $(z_1, \ldots, z_l)$ *è una base di* Z*, allora* $(u_1, \ldots, u_k, z_1, \ldots, z_l)$ *generano* $U + Z$ *e dunque* $\dim(U+Z) \leq k + l = \dim(U) + \dim(Z)$*.*

Poiché W *ha dimensione finita, allora* $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(g) \subseteq W$ *hanno dimensione finita. Prendendo* $U = \mathrm{Im}(f)$ *e* $Z = \mathrm{Im}(g)$*, dalla (a) segue dunque che* $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$*, che è la disuguaglianza voluta.*

(c) Trovare un esempio in cui $\mathrm{rg}(f+g) = 2$ e $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = 1$.

Soluzione.
Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e siano* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \mathbb{R}^3$*. Consideriamo* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definite come*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se (e_1, e_2, e_3) *è la base canonica di* $W = \mathbb{R}^3$*, allora* $\mathrm{Im}(f)$ *ha base* (e_1) *e* $\mathrm{Im}(g)$ *ha base* (e_2) *e dunque* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 1$*. Tuttavia* $\mathrm{Im}(f+g)$ *ha base* (e_1, e_2) *e dunque* $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) = 2$*.*

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim V.$$

Soluzione.
Consideriamo la restrizione di f *al* $\ker(g \circ f)$*, ossia* $f\big|_{\ker(g\circ f)} : \ker(g \circ f) \to W$*. Notiamo che* $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f) = \{v \in V \mid f(v) \in \ker(g)\}$*. Dunque il nucleo di* $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ *è ancora* $\ker(f)$ *e l'immagine di* $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ *è contenuta nel* $\ker(g)$*.*
Dal teorema del rango applicato a $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ *otteniamo*

$$\begin{aligned}\dim\big(\ker(g\circ f)\big) &= \dim\big(\ker(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) = \\ &= \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) \leq \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\ker(g)\big).\end{aligned}$$

Dal teorema del rango applicato a f*, otteniamo* $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g\circ f)\big)$ *ma anche* $\mathrm{rg}(f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(f)\big)$ *e* $\mathrm{rg}(g) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g)\big)$*.*
Mettendo insieme queste quattro relazioni, otteniamo

$$\mathrm{rg}(g\circ f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g\circ f)\big) \geq \dim(V) - \dim\big(\ker(f)\big) - \dim\big(\ker(g)\big) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(V).$$

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ che commuta con tutte le matrici diagonali $n \times n$. Dimostrare che A è diagonale.

Soluzione.
Sia D una matrice diagonale e, per ogni $k = 1, \ldots, n$, sia $\lambda_k := D_{k,k} \in \mathbb{K}$. Chiaramente $D_{k,l} = 0$ per $k \neq l$ perché D è diagonale.
Dalla regola per il prodotto di matrici AD otteniamo

$$(AD)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} D_{k,j} = A_{i,j} D_{j,j} = \lambda_j A_{i,j}.$$

Analogamente dalla regola per il prodotto DA di matrici otteniamo

$$(DA)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} D_{i,l} A_{l,j} = D_{i,i} A_{i,j} = \lambda_i A_{i,j}.$$

È chiaro dunque che, se A è essa stessa diagonale, allora $AD = DA$ per ogni D diagonale.
Viceversa, se A non è diagonale, allora esistono $i \neq j$ tali che $A_{i,j} \neq 0$. Consideriamo quindi la matrice diagonale E che ha tutti zeri tranne un 1 al posto (i,i). Il calcolo fatto sopra implica che $(AE)_{i,j} = 0$ mentre $(EA)_{i,j} = A_{i,j} \neq 0$, da cui segue che $AE \neq EA$ e dunque A non commuta con tutte le matrici diagonali.
Osservazione. *Il calcolo fatto sopra dimostra anche che, se A commuta con una qualche matrice diagonale D con tutte entrate sulla diagonale principale distinte (ossia $\lambda_i \neq \lambda_j$ per ogni $i \neq j$), allora A è diagonale. (Osserviamo però che, se il campo $\mathbb{K}$ contiene meno di n elementi, allora una tale D non esiste.)*

Definizione. La collezione degli elementi $M_{i,i}$ di una matrice M quadrata si dice *diagonale principale di M*. Una matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si dice **diagonale** se è nulla al di fuori della sua diagonale principale, ossia se $D_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esempio. Le matrici diagonali 2×2 sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Definizione. Siano $f, g : V \to V$ applicazioni lineari. Diciamo che f, g **commutano** se $f \circ g = g \circ f$. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono due matrici quadrate, diciamo che A, B **commutano** se $AB = BA$.

Esempio. Ogni matrice quadrata A commuta con se stessa.
Esempio. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non commutano.