Esercizi di algebra lineare (26 ottobre 2018)

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e W un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Chiamiamo $A = f^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (fornendo, in tal caso, una dimostrazione) oppure false (fornendo, in tal caso, un controesempio).

(a) f è invertibile se e solo se esistono una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$ ed una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

(b) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

(c) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

(d) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

(e) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

(f) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

(g) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

(h) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AN = NA = \mathrm{Id}_n$.

(i) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

(j) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_n$.

Esercizio 2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita.
Dimostrare che $\{0\} \neq \ker f \neq V \iff$ esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = 0$ e $g \circ f \neq 0$.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

(a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

(b) Dedurre da (a) la disuguaglianza $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

(c) Trovare un esempio in cui $\mathrm{rg}(f + g) = 2$ e $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = 1$.

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim V.$$

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ che commuta con tutte le matrici diagonali $n \times n$.
Dimostrare che A è diagonale.

Definizione. La collezione degli elementi $M_{i,i}$ di una matrice M quadrata si dice *diagonale principale di M*. Una matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si dice **diagonale** se è nulla al di fuori della sua diagonale principale, ossia se $D_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esempio. Le matrici diagonali 2×2 sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Definizione. Siano $f, g : V \to V$ applicazioni lineari. Diciamo che f, g **commutano** se $f \circ g = g \circ f$. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono due matrici quadrate, diciamo che A, B **commutano** se $AB = BA$.

Esempio. Ogni matrice quadrata A commuta con se stessa.

Esempio. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non commutano.